

超流体と超伝導体における量子渦および  
量子渦ダイナミクスのための幾何学的数値積分法  
(web掲載簡略化版)

有明高専 創造工学科 松野哲也

2018/08/21-22 大分 湯布院FIT セミナーハウス

# 超流体の現象論的基礎方程式としての 時間依存Gross-Pitaevskii 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi + \underline{g|\psi|^2\psi}$$

相互作用  
 $g > 0$ : 反発的  
 $g < 0$ : 引力的

# 座標変換 $\Leftrightarrow$ 有効電磁ポテンシャル

$$A^\mu = (-\phi, \mathbf{A}) = (-\phi, A_x, A_y, A_z)$$

ガリレイ変換

$$A^\mu = \left(-\frac{1}{2}v^2, \mathbf{v}\right) \quad \begin{array}{l} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}mv^2 \\ -i\hbar\nabla \longrightarrow -i\hbar\nabla - m\mathbf{v} \end{array}$$

回転座標系へ

$$A^\mu = \left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2, \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}\right) \quad \begin{array}{l} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \\ -i\hbar\nabla \longrightarrow -i\hbar\nabla - m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \end{array}$$

## 座標変換 $\leftrightarrow$ 有効電磁ポテンシャル (つづき)

ガリレイ変換

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - m\mathbf{v})^2 - \frac{1}{2}mv^2 + V + g|\psi|^2$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi + g|\psi|^2\psi + i\hbar\mathbf{v}\cdot\nabla\psi$$

回転座標系へ

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - m\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})^2 + V + g|\psi|^2$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi + g|\psi|^2\psi - \boldsymbol{\Omega}L_z\psi$$

$$L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

# 回転効果と磁場効果のアナロジー

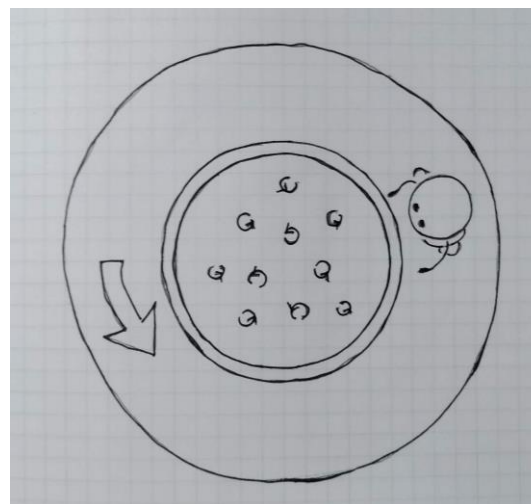
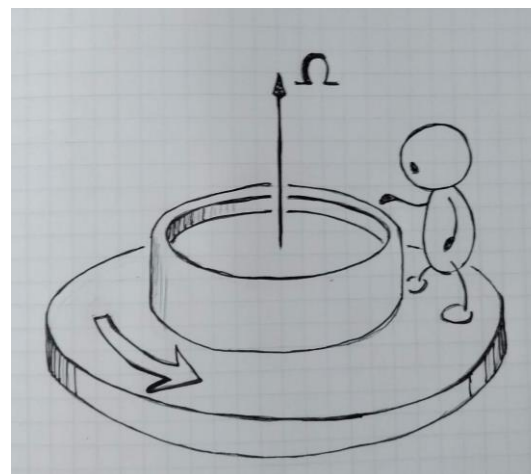
$$-i\hbar\nabla \longrightarrow -i\hbar\nabla - q\mathbf{A}$$

$$-i\hbar\nabla \longrightarrow -i\hbar\nabla - m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$$



$$2m\mathbf{\Omega} \longleftrightarrow q\mathbf{B}$$

磁場は空間を「回転」させている。  
磁束密度は回転角速度に対応する。



# 散逸効果

$$(i - \underline{\gamma})\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \psi + V_{\text{eff}} \psi + g|\psi|^2 \psi$$

$$V_{\text{eff}} = V - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$$

$\gamma > 0$  は散逸の強さを表す実数パラメータ

# TDGP方程式からTDGL方程式へ

$$(i - \gamma)\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \psi + V_{\text{eff}} \psi + g|\psi|^2 \psi$$

$$m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \longrightarrow q\mathbf{A}$$

$$V_{\text{eff}} \longrightarrow -\alpha$$

$$g \longrightarrow -\beta$$

$$\gamma\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla - iq\mathbf{A}/\hbar)^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2 \psi$$

# TDGL方程式

$$\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi \right) \psi = (\nabla - iq\mathbf{A})^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi$$

$$\tau_B \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\phi \right) = q\text{Im}[\bar{\psi}(\nabla - iq\mathbf{A})\psi] - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\epsilon_{\text{GL}} = \epsilon_{\text{K}} + \epsilon_{\text{P}} + \epsilon_{\text{B}}$$

$$\epsilon_{\text{K}} = |\nabla - iq\mathbf{A}|^2, \quad \epsilon_{\text{P}} = -\alpha|\psi|^2 - \frac{1}{2}\beta|\psi|^4, \quad \epsilon_{\text{B}} = \frac{1}{2}|\nabla \times \mathbf{A}|^2$$

$$\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi \right) \psi = -\frac{\delta\epsilon_{\text{GL}}}{\delta\bar{\psi}}$$

$$\tau_B \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\phi \right) = -\frac{\delta\epsilon_{\text{GL}}}{\delta \mathbf{A}}$$

ゲージ対称性

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \phi \longrightarrow \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \psi \longrightarrow \psi \exp(iq\chi)$$



## TDGL 方程式からTDGP方程式へ

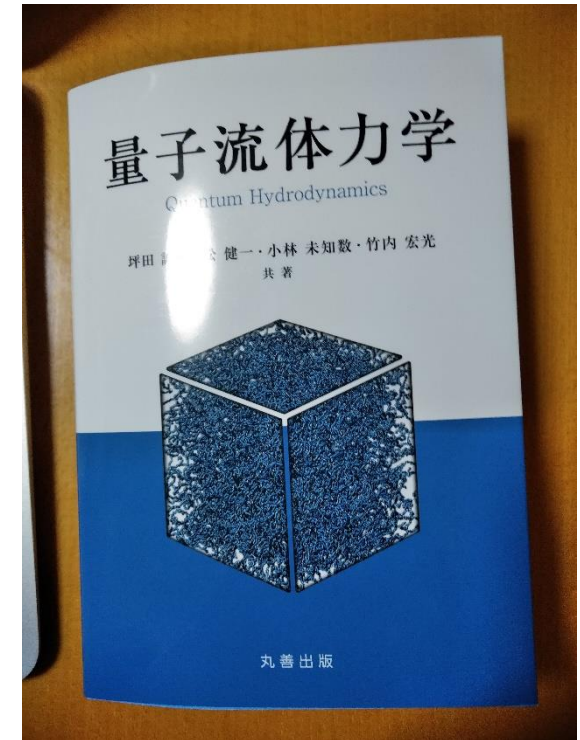
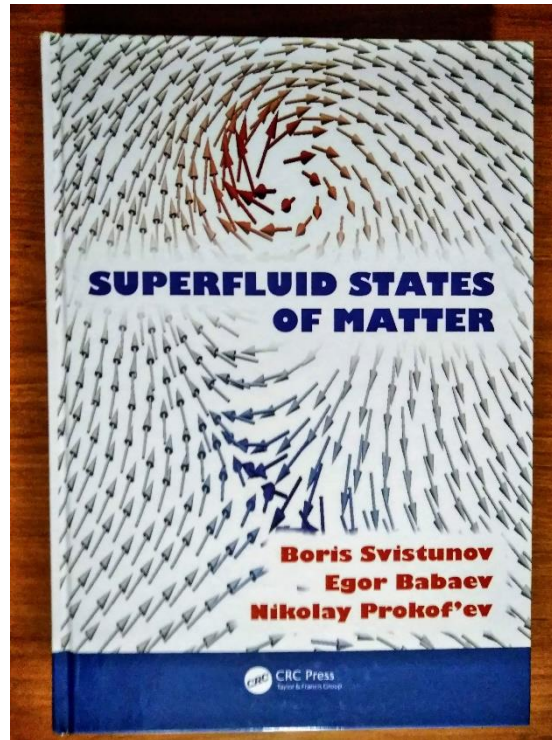
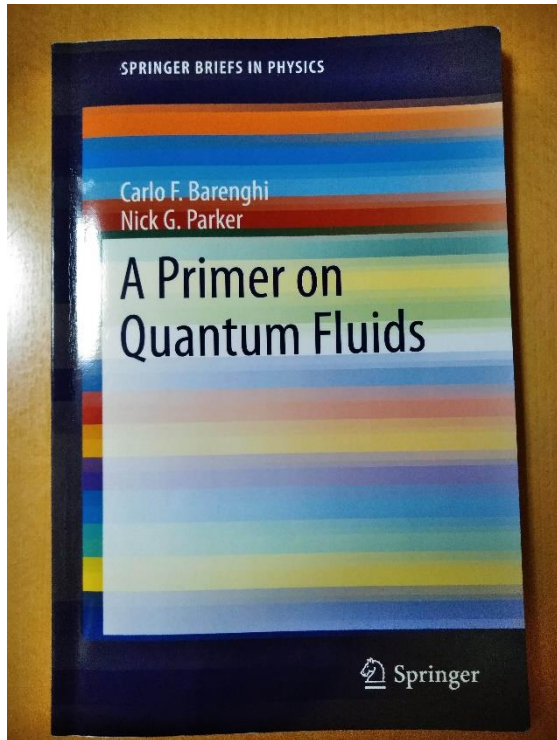
$$\gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla - iq\mathbf{A})^2 \psi + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi$$

$$\gamma = 1/i$$

実時間微分から虚時間微分への変換 ( $t \longrightarrow it$ )

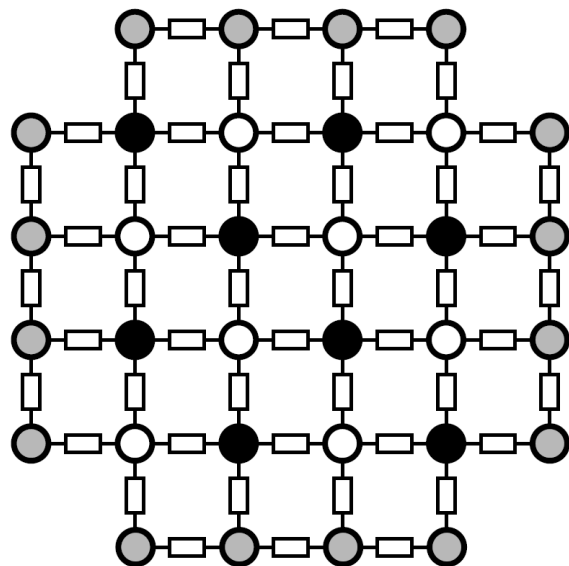
$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -(\nabla - iq\mathbf{A})^2 \psi - \alpha \psi - \beta |\psi|^2 \psi$$

# 参考文献

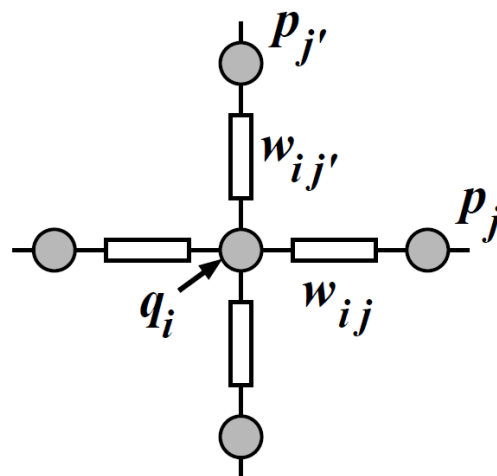


- [1] C. F. Barenghi and N. G. Parker: “A Primer on Quantum Fluids,” Springer 2016.
- [2] B. Svistunov, E. Babaev, N. Prokof'ev: “Superfluid states of matter,” CRC Press 2014.
- [3] 坪田, 笠松, 小林, 竹内: 「量子流体力学」, 丸善出版 2018.

# 量子系のための幾何学的数値積分法



$$\psi_t(t) = \begin{cases} q_i(t), & i \in Q, \\ p_i(t), & i \in P. \end{cases}$$



$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}((\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)/2)$$

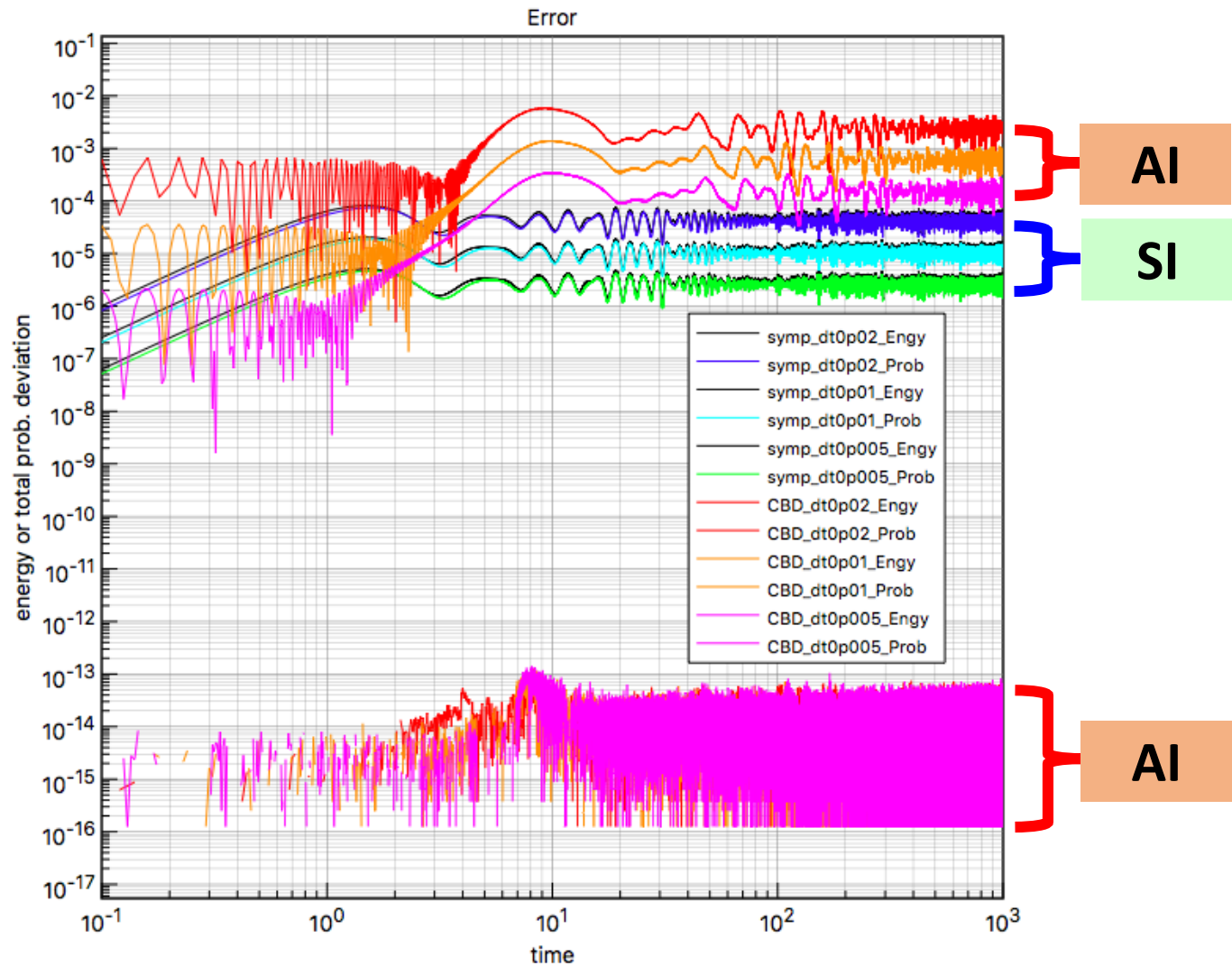
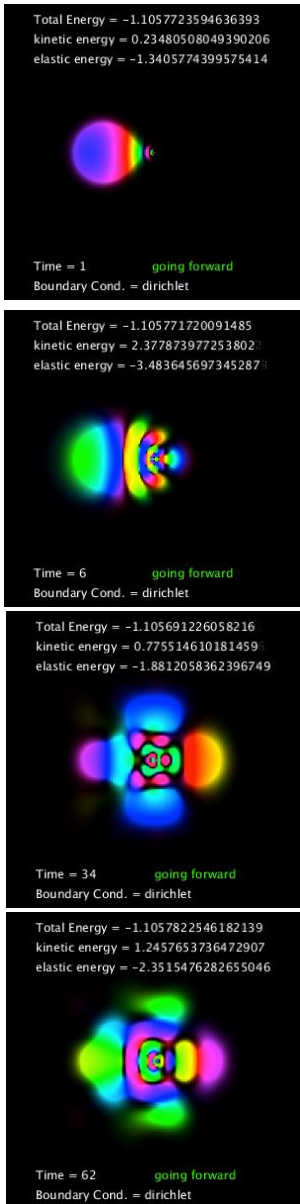
$$w_{ij} = \exp(-i(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{A}_{ij})$$

# 拡張複素アフィン変換群

$$\begin{cases} \mathbf{q}' = A\mathbf{q} + B\mathbf{p} \\ \mathbf{p}' = \mathbf{p} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

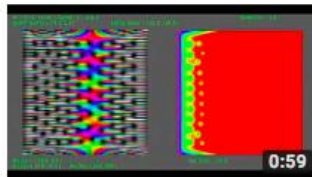
$$\begin{cases} \mathbf{q}' = \mathbf{q} \\ \mathbf{p}' = A\mathbf{p} + B\mathbf{q} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$$

# 「虚時間拡散方程式」におけるエネルギー厳密保存



# TDGL方程式ベースのシミュレーション

<https://www.youtube.com/user/pftetsuyaGPU/videos>



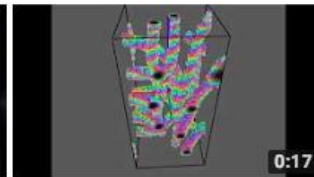
TDGL equation with pure-imaginary time-constant

視聴回数 17 回・1 週間前



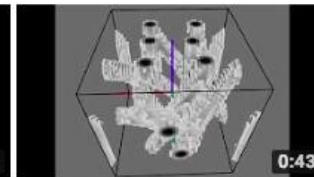
Visualizing a fast periodic phenomenon

視聴回数 34 回・2 週間前



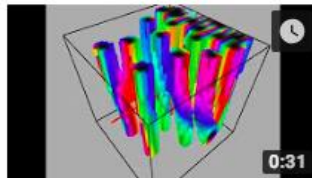
Spiral flux lines in type-II superconductors under the...

視聴回数 31 回・1 か月前



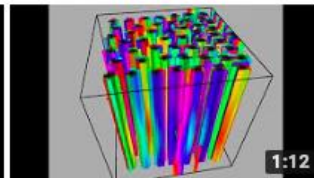
Spiral motion of quantum vortices in type-II...

視聴回数 53 回・1 か月前



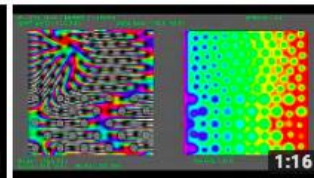
Flow dynamics of quantum vortices in type-II...

視聴回数 29 回・1 か月前



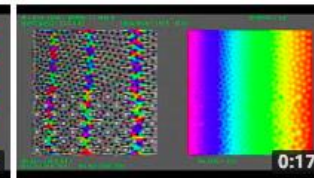
Flux flow in type-II superconductors in 3D...

視聴回数 24 回・1 か月前



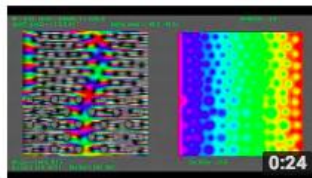
Attractive pins to impede the flow of quantum vortices in...

視聴回数 37 回・1 か月前



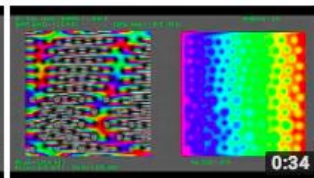
Pinning effect on the flux flow in type-II...

視聴回数 33 回・1 か月前



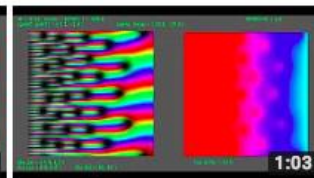
Pinning effect on the flux flow in type-II...

視聴回数 12 回・1 か月前



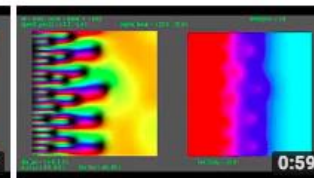
Pinning effect on the flux flow in type-II...

視聴回数 22 回・1 か月前



Hall effect in type-II superconductors

視聴回数 14 回・1 か月前



Flux flow Hall effect in type-II superconductors (again)

視聴回数 21 回・1 か月前

# 課題

- 安定性解析
  - 実時間拡散 → 無条件安定
  - 虚時間拡散 → 条件安定
- Consistency
  - 極限  $(\tau, h) \rightarrow (0, 0)$  において,  
離散的スキームは連続方程式に収束するか？
- 誤差解析
  - 解の正確性
  - エネルギー保存の正確性 (虚時間拡散)