

# 縦磁界における量子化磁束の運動の数値シミュレーション

Numerical simulations for the motion of fluxoids under the longitudinal magnetic field

松野 哲也 (有明工業高等専門学校)

Tetsuya Matsuno (National Institute of Technology, Ariake College)

第77回応用物理学会秋季学術講演会,

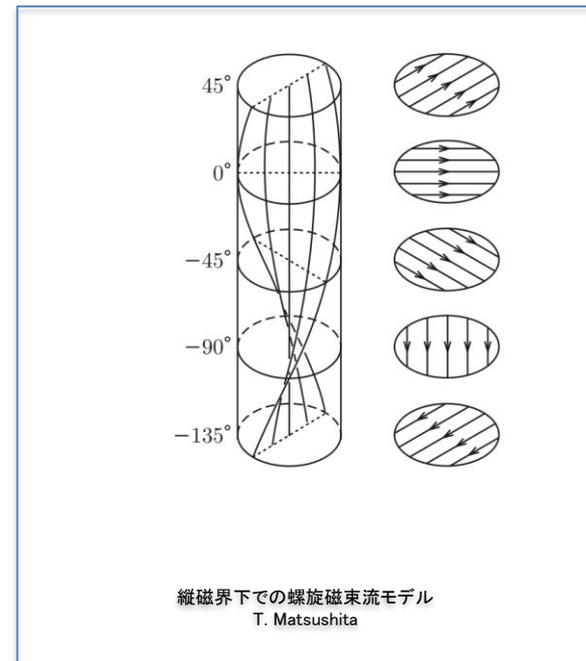
量子化磁束動力学シミュレーション研究グループミーティング (2016/09/15)

## Introduction

第2種超伝導体における縦磁界効果

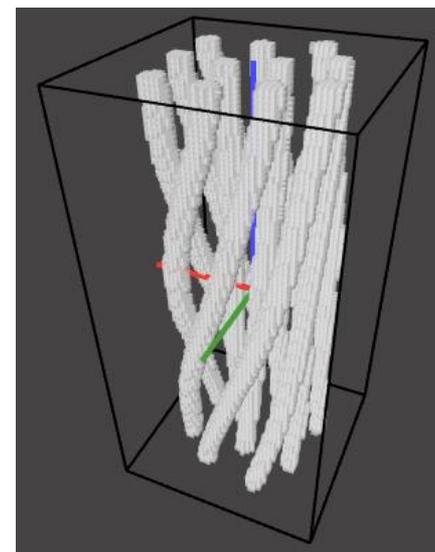
- 臨界電流密度の増大
- 特異的な電流電圧特性

← 量子化磁束線の特異的な配置と  
特異的な運動様式



# 目的

- 縦磁界効果の数値的再現 → メカニズムの解明
- 基礎方程式の妥当性の検討
- リンク変数法によるシミュレーション手法の確立



# 基礎方程式

TDGL方程式 ( Time-Dependent Ginzburg-Landau equation ) の導出

$$\epsilon_{GL} = \epsilon_K + \epsilon_P + \epsilon_B,$$

$$\epsilon_K = \frac{1}{2} |\mathbf{D}\psi|^2, \quad \mathbf{D} \equiv \nabla - ig\mathbf{A},$$

$$\epsilon_P = \frac{\eta}{2} (|\psi|^2 - 1)^2,$$

$$\epsilon_B = \frac{1}{2} |\nabla \times \mathbf{A}|^2.$$

- エネルギーが減少するように時間発展すると仮定.  
ただしゲージ対称性を満たすこと.

$$\begin{aligned} \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + ig\phi \right) \psi &= -\frac{\delta \epsilon_{GL}}{\delta \psi}, \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi &= -\frac{\delta \epsilon_{GL}}{\delta \mathbf{A}}, \end{aligned}$$

# TDGL方程式

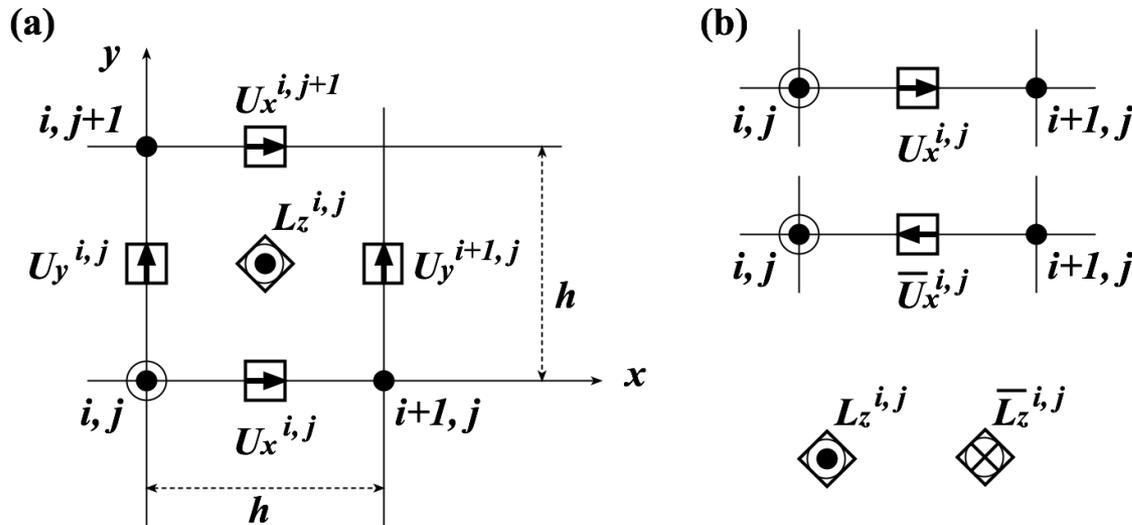
$$\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + ig\phi \right) \psi = \frac{1}{2} \mathbf{D}^2 \psi + \eta(1 - |\psi|^2) \psi,$$
$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi = g \text{Im} [\bar{\psi} \mathbf{D} \psi] - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}.$$

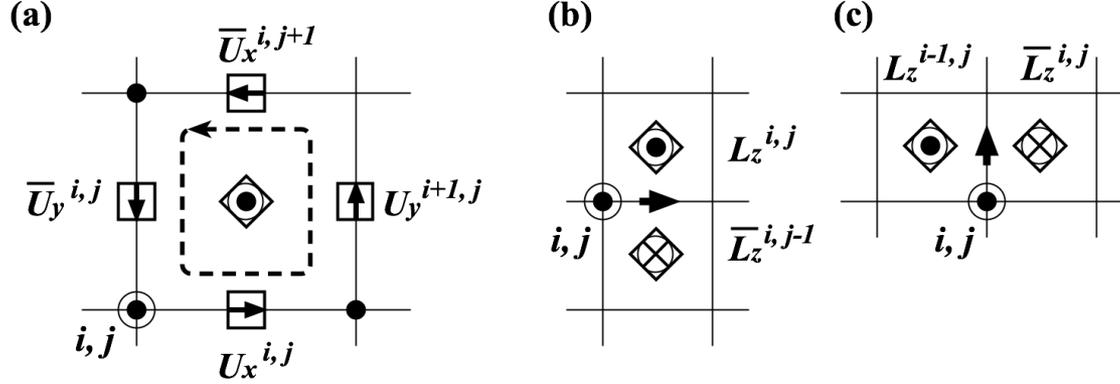
- スカラーポテンシャルをゼロとするゲージを用いる.
  - 上式において  $\phi = 0$  とおけばよい.
  - ベクトルポテンシャルの値の大きさが時間に関して増大
  - リンク変数法の使用が必然となる.
    - ※ベクトルポテンシャルはリンク変数の偏角に寄与.
- 数値積分スキームの構成
  - (1) 空間に関する離散化:
    - 共変微分  $\mathbf{D}$  を「複素重み(リンク変数)」付きラプラシアンとして実装.
    - 回転演算  $\nabla \times$  や  $\nabla \times \nabla \times$  をリンク変数の積で実装.
  - (2) 時間に関する離散化:
    - ラプラシアン項はStaggeringを利用したSymplectic的スキーム.
    - 非線形項については素朴に実装.
    - リンク変数の時間発展は偏角の時間発展方程式として実装.

# 空間に関する離散化とリンク変数

- リンク変数はベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の各成分に対応する.
- オーダーパラメータ  $\psi$  が定義された格子点を結ぶ辺上で定義される.
- 向きを持つ.

$$U_x^{i,j} \equiv \exp(-ihgA_x^{i,j}),$$

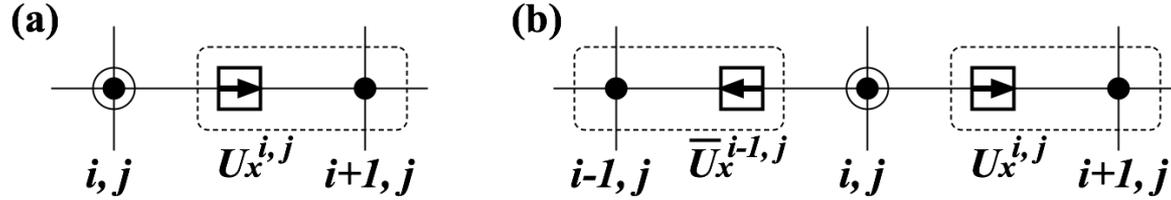




$$\begin{aligned}
L_z^{i,j} &\equiv U_x^{i,j} U_y^{i+1,j} \bar{U}_x^{i,j+1} \bar{U}_y^{i,j} \\
&= \exp[-ihg(A_y^{i+1,j} - A_y^{i,j} - A_x^{i,j+1} + A_x^{i,j})] \\
&\simeq \exp[-ih^2g(\nabla \times \mathbf{A})_z^{i,j}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_z^{i,j} \bar{L}_z^{i,j-1} &\simeq \exp[-ih^3g(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_x^{i,j}], \\
\bar{L}_z^{i,j} L_z^{i-1,j} &\simeq \exp[-ih^3g(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_y^{i,j}],
\end{aligned}$$

# 共変微分演算 → 複素重みつき差分演算として実装



$$V_x^{i,j} \equiv \exp \left[ -ig \int_{-\infty}^{x_i} A_x(\zeta, y_j) d\zeta \right], \quad V_y^{i,j} \equiv \exp \left[ -ig \int_{-\infty}^{y_j} A_y(x_i, \zeta) d\zeta \right].$$

$$\begin{aligned} D_x \psi &\longrightarrow \bar{V}_x^{i,j} \frac{1}{h} (V_x^{i+1,j} \psi^{i+1,j} - V_x^{i,j} \psi^{i,j}) \\ &= \frac{1}{h} (\bar{V}_x^{i,j} V_x^{i+1,j} \psi^{i+1,j} - \psi^{i,j}) \\ &= \frac{1}{h} (U_x^{i,j} \psi^{i+1,j} - \psi^{i,j}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x^2 \psi &\longrightarrow \bar{V}_x^{i,j} \frac{1}{h^2} (V_x^{i+1,j} \psi^{i+1,j} + V_x^{i-1,j} \psi^{i-1,j} - 2V_x^{i,j} \psi^{i,j}) \\ &= \frac{1}{h^2} (U_x^{i,j} \psi^{i+1,j} + \bar{U}_x^{i-1,j} \psi^{i-1,j} - 2\psi^{i,j}) \end{aligned}$$

# 空間に関して離散化されたTDGL方程式

$$\gamma \frac{\partial \psi^{i,j,k}}{\partial t} = \frac{1}{2h^2} (U_x^{i,j,k} \psi^{i+1,j,k} + \bar{U}_x^{i-1,j,k} \psi^{i-1,j,k} + U_y^{i,j,k} \psi^{i,j+1,k} + \bar{U}_y^{i,j-1,k} \psi^{i,j-1,k} + U_z^{i,j,k} \psi^{i,j,k+1} + \bar{U}_z^{i,j,k-1} \psi^{i,j,k-1} - 6\psi^{i,j,k}) + \eta(1 - |\psi^{i,j,k}|^2) \psi^{i,j,k}.$$

$$\frac{\partial U_x^{i,j,k}}{\partial t} = -ig \text{Im}[\bar{\psi}^{i,j,k} U_x^{i,j,k} \psi^{i+1,j,k}] - \frac{1}{h^2} (\bar{L}_y^{i,j,k} L_y^{i,j,k-1} L_z^{i,j,k} \bar{L}_z^{i,j-1,k} - 1),$$

$$\frac{\partial U_y^{i,j,k}}{\partial t} = -ig \text{Im}[\bar{\psi}^{i,j,k} U_y^{i,j,k} \psi^{i,j+1,k}] - \frac{1}{h^2} (\bar{L}_z^{i,j,k} L_z^{i-1,j,k} L_x^{i,j,k} \bar{L}_z^{i,j,k-1} - 1),$$

$$\frac{\partial U_z^{i,j,k}}{\partial t} = -ig \text{Im}[\bar{\psi}^{i,j,k} U_z^{i,j,k} \psi^{i,j,k+1}] - \frac{1}{h^2} (\bar{L}_x^{i,j,k} L_x^{i,j-1,k} L_y^{i,j,k} \bar{L}_y^{i-1,j,k} - 1),$$

$$\gamma \frac{\partial \psi^{i,j,k}}{\partial t} = \frac{1}{2h^2} (U_x^{i,j,k} \psi^{i+1,j,k} + \overline{U_x^{i-1,j,k}} \psi^{i-1,j,k} + U_y^{i,j,k} \psi^{i,j+1,k} + \overline{U_y^{i,j-1,k}} \psi^{i,j-1,k} + U_z^{i,j,k} \psi^{i,j,k+1} + \overline{U_z^{i,j,k-1}} \psi^{i,j,k-1} - 6\psi^{i,j,k}) + \eta(1 - |\psi^{i,j,k}|^2) \psi^{i,j,k}.$$

### ラプラシアン演算の実装

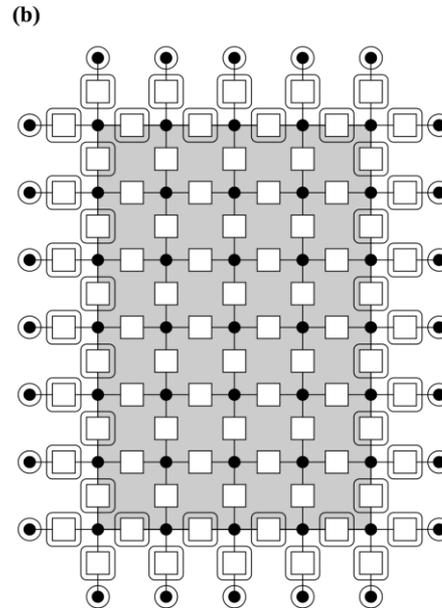
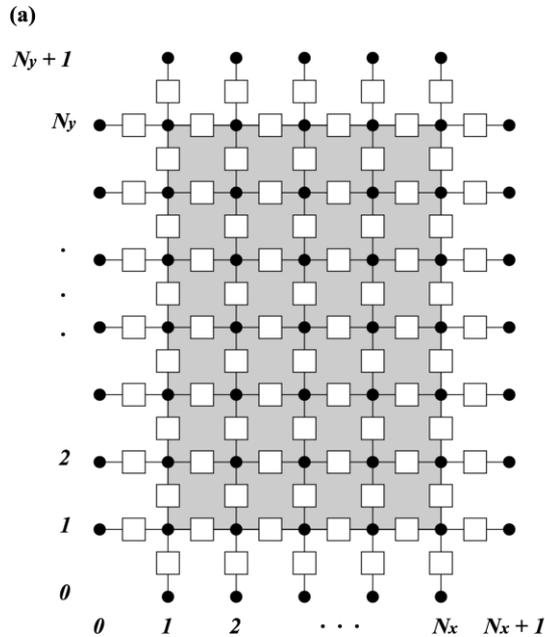
```

//////////
void do_Laplacian(Complex[][][] psi, Complex[][][] Ux, Complex[][][] Uy, Complex[][][] Uz,
double dt, double D) {
    for (int k = 1; k <= Nz; k++) {
        for (int j = 1; j <= Ny; j++) {
            for (int i = 1; i <= Nx; i++) {
                psi_s[i][j][k].equal(psi[i][j][k].plus(
                    (psi[i+1][j][k].mul(Ux[i][j][k])).plus(psi[i-1][j][k].mul(Ux[i-
1][j][k].conj()))
                    .plus(psi[i][j+1][k].mul(Uy[i][j][k])).plus(psi[i][j-1][k].mul(Uy[i][j-
1][k].conj()))
                    .plus(psi[i][j][k+1].mul(Uz[i][j][k])).plus(psi[i][j][k-1].mul(Uz[i][j][k-
1].conj()))
                    .minus(psi[i][j][k].mul(6.0) ) )
                .mul(dt * D / (h * h) )
            )
        }
    }
}
for (int k = 1; k <= Nz; k++) {
    for (int j = 1; j <= Ny; j++) {
        for (int i = 1; i <= Nx; i++) {
            psi[i][j][k].equal(psi_s[i][j][k]);
        }
    }
}
}
//////////

```

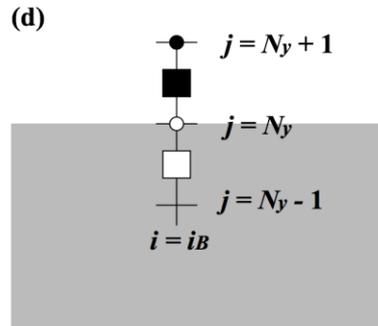
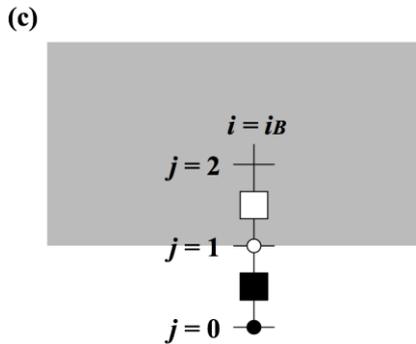
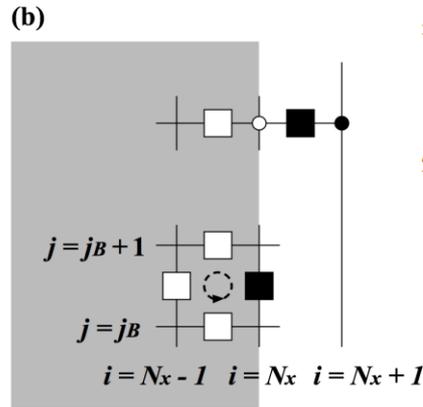
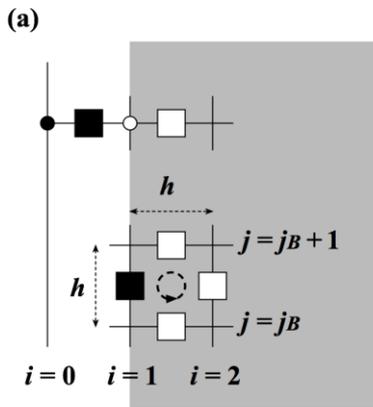
# 境界条件

- オーダーパラメータ  $\psi$  : ノイマン型境界条件
- リンク変数(法線成分): ノイマン型境界条件
- リンク変数(接線成分): 印加磁界と印加電流を反映する.

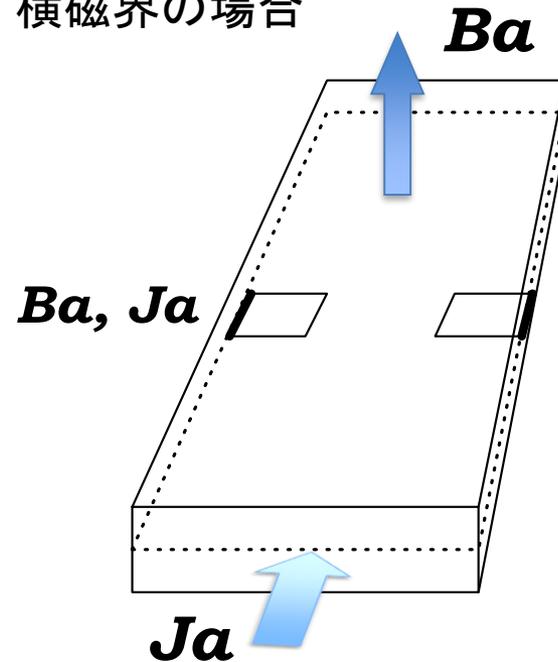


- 印加磁界  $B_a$  および印加電流  $J_a$  はリンク変数の境界条件に反映.

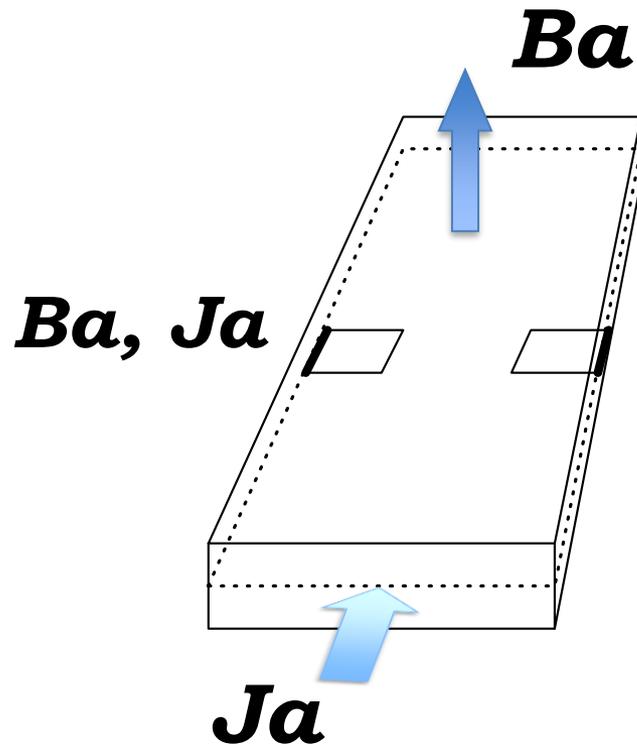
$$\begin{aligned}
 U_x^{1,j_B} U_y^{2,j_B} \bar{U}_x^{1,j_B+1} \bar{U}_y^{1,j_B} &\simeq \exp \left( -ig \oint_{(1,j_B)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) \\
 &= \exp \left( -ig \iint_{(1,j_B)} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right) \\
 &\simeq \exp \left[ -igh^2 \left( \underline{B_a} + \mu_0 \frac{W_x}{2} \underline{J_a} \right) \right],
 \end{aligned}$$



横磁界の場合

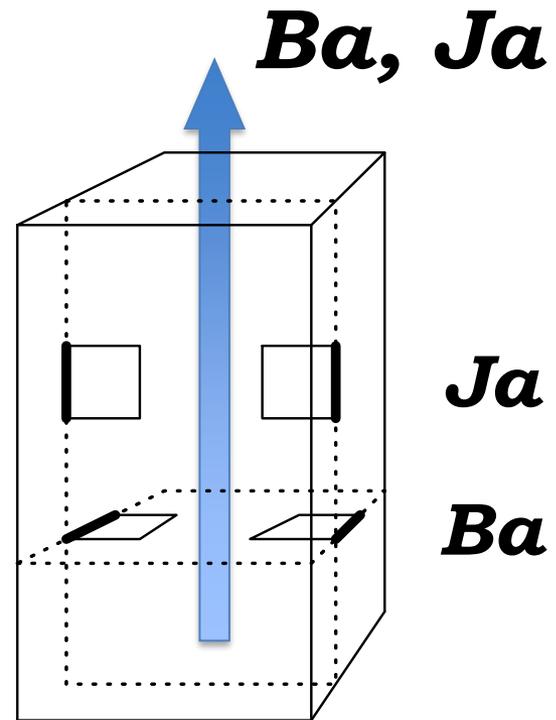


## 横磁界



印加磁界と印加電流は  
境界リンク変数の同一成分に  
加算的に反映される

## 縦磁界



印加磁界と印加電流はそれぞれ  
境界リンク変数の異なる成分に反映される

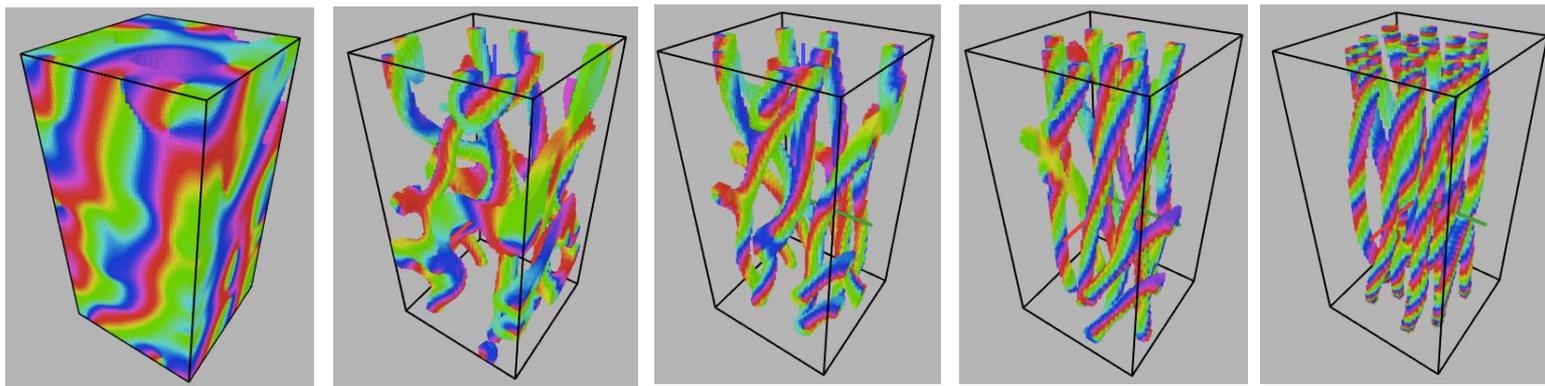
## 境界条件の実装

```
/// constraints by the applied field and current
/// y-z plane ( Bz-Uy-component ) set Ja = 0 when longitudinal
for(int k = 1; k <= Nz; k++){
  for(int j = 1; j <= Ny-1; j++){
    ex.setPolar(1.0, h*h*(Ba + Ja*SSx/2.0));
    Uy[1][j][k].equal(Uy[2][j][k].mul(Ux[1][j+1][k].conj()).mul(Ux[1][j][k]).mul(ex));
    ex.setPolar(1.0, -h*h*(Ba - Ja*SSx/2.0));
    Uy[Nx][j][k].equal(Uy[Nx-1][j][k].mul(Ux[Nx-1][j+1][k]).mul(Ux[Nx-1][j][k].conj()).mul(ex));
  }
}
/// z-x plane ( Bz-Ux-component ) omit when transverse
for(int i = 1; i <= Nx-1; i++){
  for(int k = 1; k <= Nz; k++){
    ex.setPolar(1.0, -h*h*Ba);
    Ux[i][1][k].equal( (Uy[i+1][1][k].conj()).mul(Ux[i][2][k]).mul(Uy[i][1][k]).mul(ex) );
    ex.setPolar(1.0, h*h*Ba);
    Ux[i][Ny][k].equal( Ux[i][Ny-1][k].mul(Uy[i+1][Ny-1][k]).mul(Uy[i][Ny-1][k].conj()).mul(ex) );
  }
}
/// y-z plane ( J=(0,0,Jb)-Uz-component ) longitudinal
for(int k = 1; k <= Nz-1; k++){
  for(int j = 1; j <= Ny; j++){
    ex.setPolar(1.0, h*h*Jb*SSx/2.0);
    Uz[1][j][k].equal( Ux[1][j][k].mul(Uz[2][j][k]).mul(Ux[1][j][k+1].conj()).mul(ex) );
    Uz[Nx][j][k].equal( (Ux[Nx-1][j][k].conj()).mul(Uz[Nx-1][j][k]).mul(Ux[Nx-1][j][k+1]).mul(ex) );
  }
}
/// z-x plane ( J=(0,0,Jb)-Uz-component ) longitudinal
for(int i = 1; i <= Nx; i++){
  for(int k = 1; k <= Nz-1; k++){
    ex.setPolar(1.0, h*h*Jb*SSy/2.0);
    Uz[i][1][k].equal( Uy[i][1][k].mul(Uz[i][2][k]).mul(Uy[i][1][k+1].conj()).mul(ex) );
    Uz[i][Ny][k].equal( (Uy[i][Ny-1][k].conj()).mul(Uz[i][Ny-1][k]).mul(Uy[i][Ny-1][k]).mul(ex) );
  }
}
```

# 結果

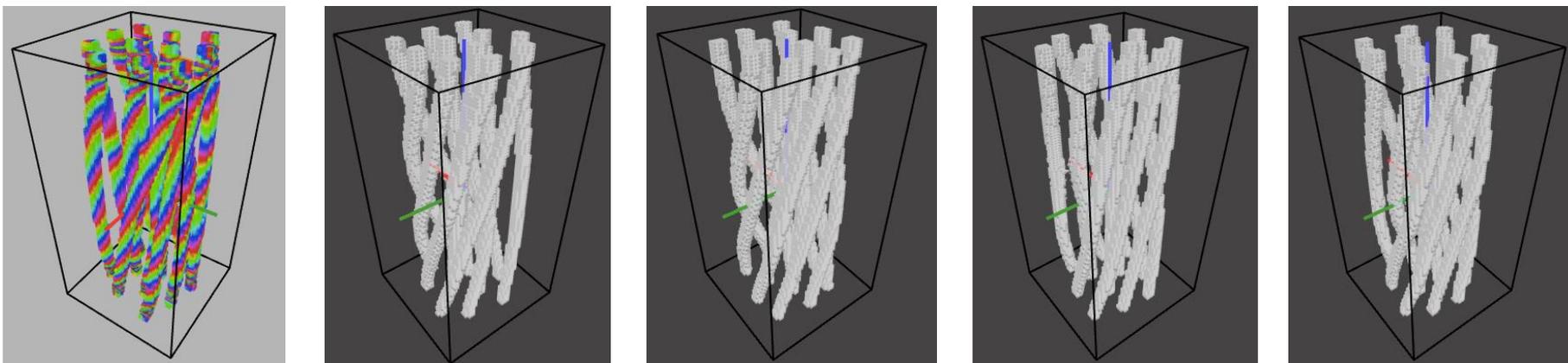
● パラメータ:

$(W_x, W_y, W_z) = (10, 10, 20)$ ,  $(N_x, N_y, N_z) = (50, 50, 100)$ ,  
 $h=0.2$ ,  $dt = 0.005$ ,  $\text{gamma} = 1.0$ ,  $\text{eta} = 2.0 \rightarrow \xi = 0.5$



過渡過程

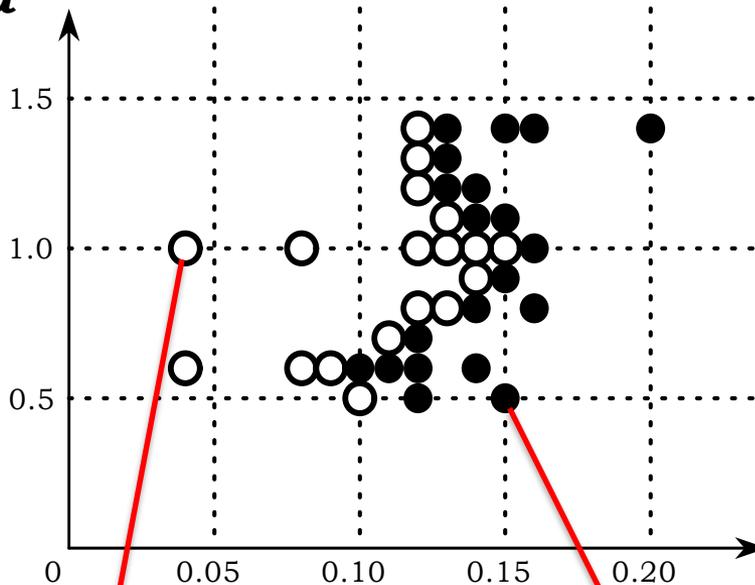
time



(定常的)動的振る舞い

time

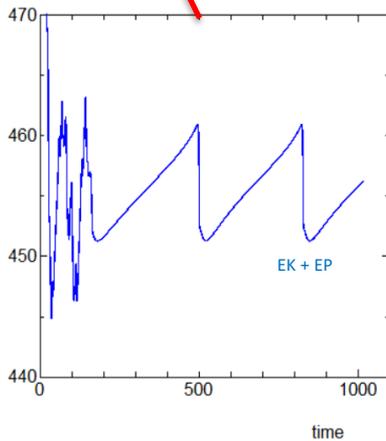
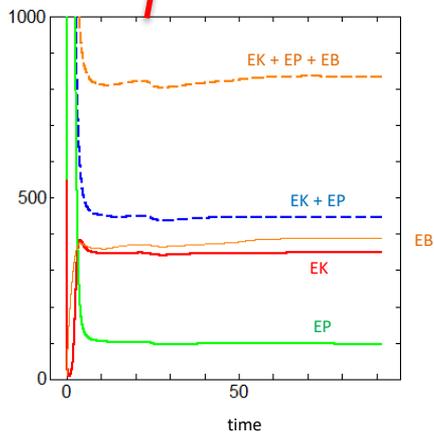
**Ba**



相図

- 動的振る舞い
- 静的振る舞い

energy



全エネルギーが単調減少しない  
→ OK?

# 考察・課題

- 縦磁界での量子化磁束の運動に関して相図を作成した。「臨界電流」の磁界依存性にピークが見られた。  
→ ほんとうの臨界電流の磁界依存性との関係あるのか？
- 磁束線のカッティングにともない、全エネルギーが変動した。  
→ 全エネルギーは単調減少すべきでは？  
→ エネルギーが系に注入されているからOKか？
- さらにシミュレーションポイントを増やして相図を完成させる。
- 数値積分スキームの再検討
- 試料形状依存性, ピンの導入