

TDGL方程式に基づく 磁束線ピンニングシミュレーション (web掲載簡略化版)

松野哲也

有明高専 創造工学科 人間・福祉工学系(情報システムコース)

量子化磁束動力学シミュレーション研究グループ 研究会 発表資料
2019年1月22日(火)14:00-17:00天神イムズ, 九工大サテライトキャンパス

基礎方程式:TDGL方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla - i\mathbf{A})^2 \psi + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi$$

$$\tau_A \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \text{Im}[\psi^* (\nabla - i\mathbf{A}) \psi] - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

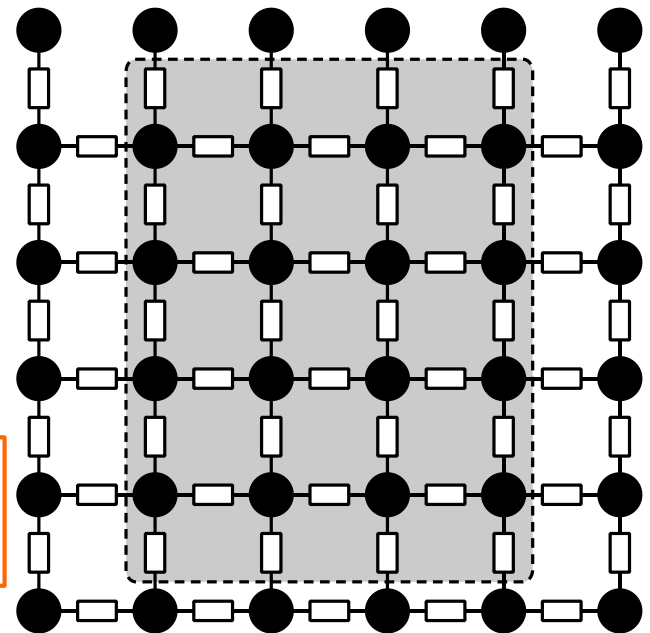
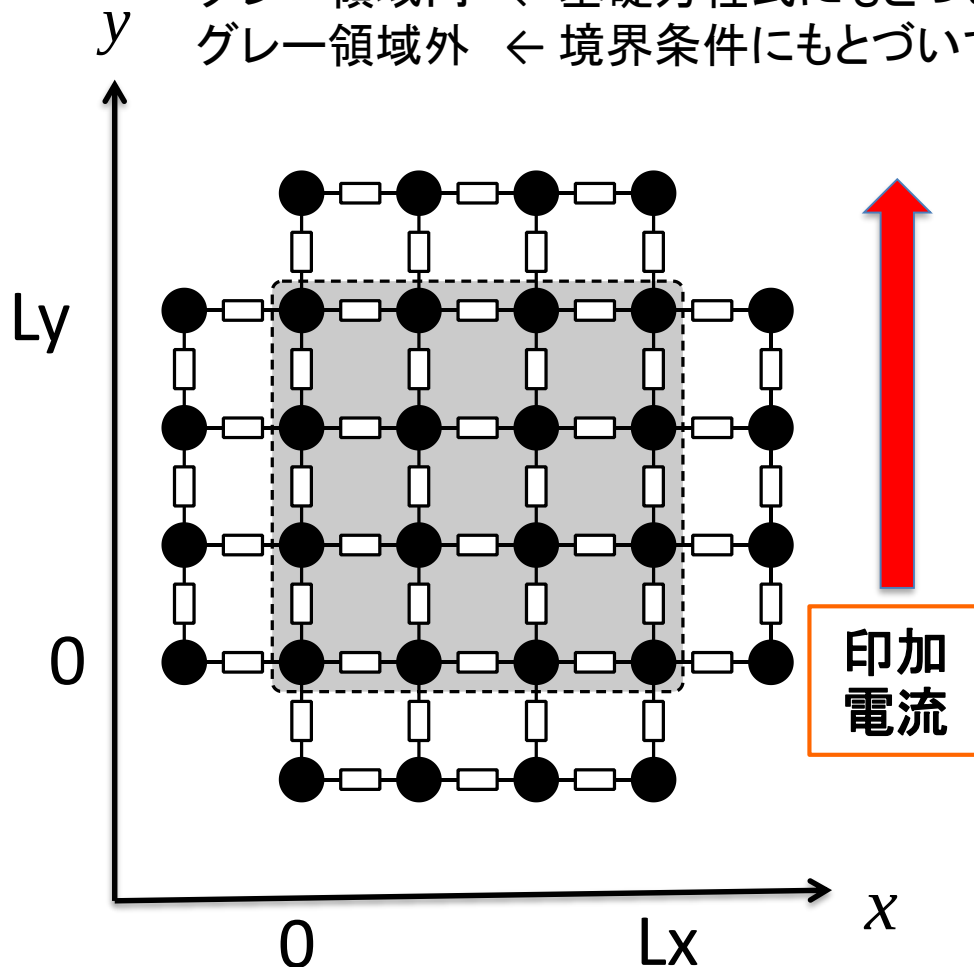
← ファイゼロゲージ

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

ϕ : スカラーポテンシャル

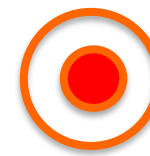
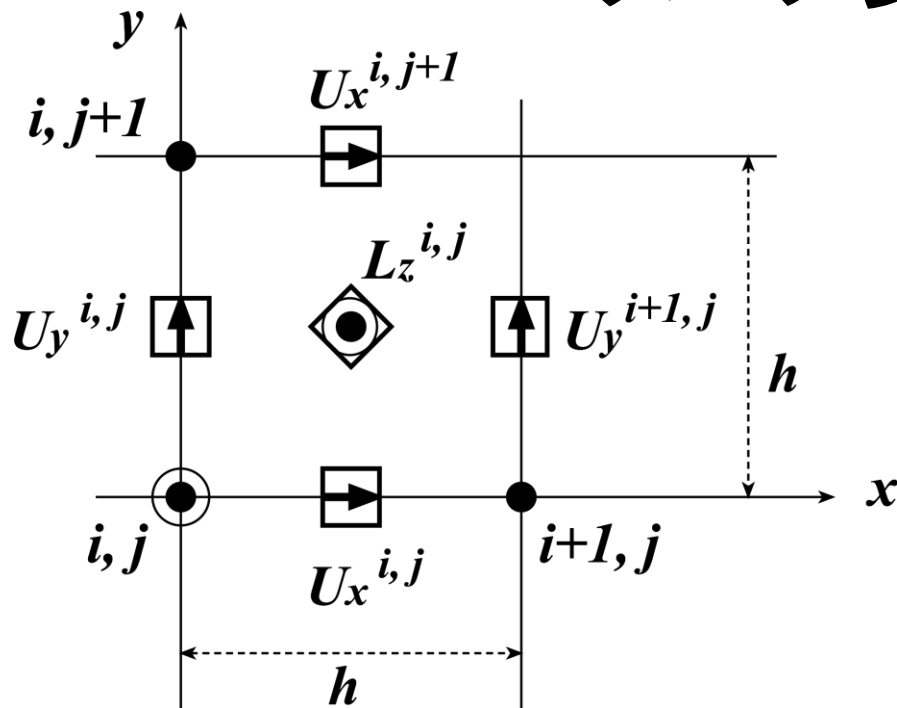
シミュレーション領域

グレー領域内 ← 基礎方程式にもとづいて更新していく
グレー領域外 ← 境界条件にもとづいて更新していく



周期的境界条件 (y方向) の場合

リンク変数



印加
磁界

印加
電流

$$U_x^{i,j} = \exp(-ihA_x^{i,j})$$

$$U_y^{i,j} = \exp(-ihA_y^{i,j})$$

印加磁界や印加電流は
ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ に反映される。
ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ はリンク変数で表される。

境界条件

- ノイマン型境界条件(東西の端) $\rightarrow \psi$
- 印加磁界と印加電流を反映(東西の端) $\rightarrow \mathbf{A}$

$$\nabla \times \mathbf{A}(0, y) = \mathbf{B}_a + \frac{L_x}{2} J_a, \quad 0 \leq y \leq L_y$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(L_x, y) = \mathbf{B}_a - \frac{L_x}{2} J_a, \quad 0 \leq y \leq L_y$$

- 周期的境界条件(南北の端: y 方向に周期的)

$$\psi(x, 0) = \psi(x, L_y), \quad 0 \leq x \leq L_x$$

$$\mathbf{A}(x, 0) = \mathbf{A}(x, L_y), \quad 0 \leq x \leq L_x$$

ψ , A の更新に関して

ψ と A はTDGL方程式に基づいて更新される:

$\psi \rightarrow$ AI法(後述)で数値積分

$A \rightarrow$ リンク変数の位相をオイラー法で数値積分(改善余地あり)

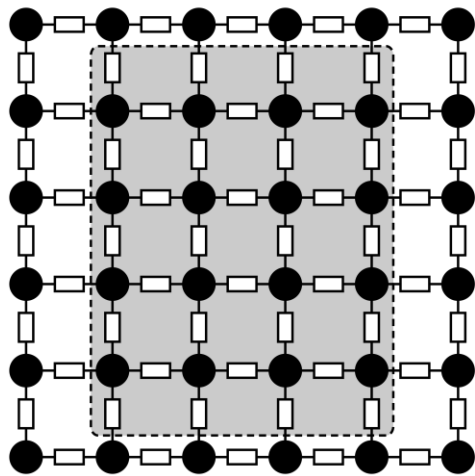
(a)

$j=N_y + 1$

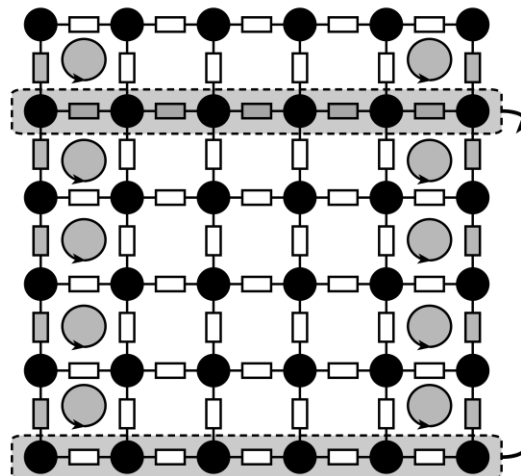
$j=N_y$

$j=1$

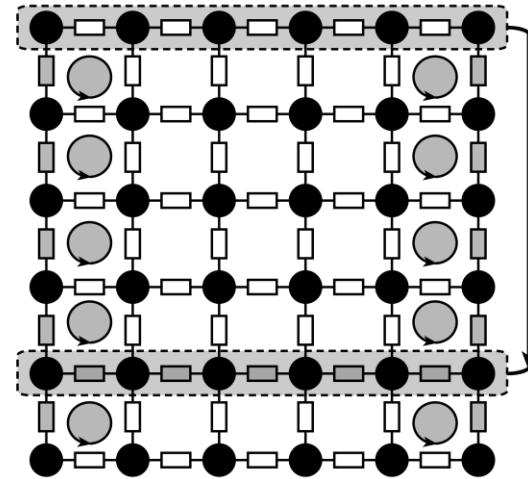
$j=0$



(b)



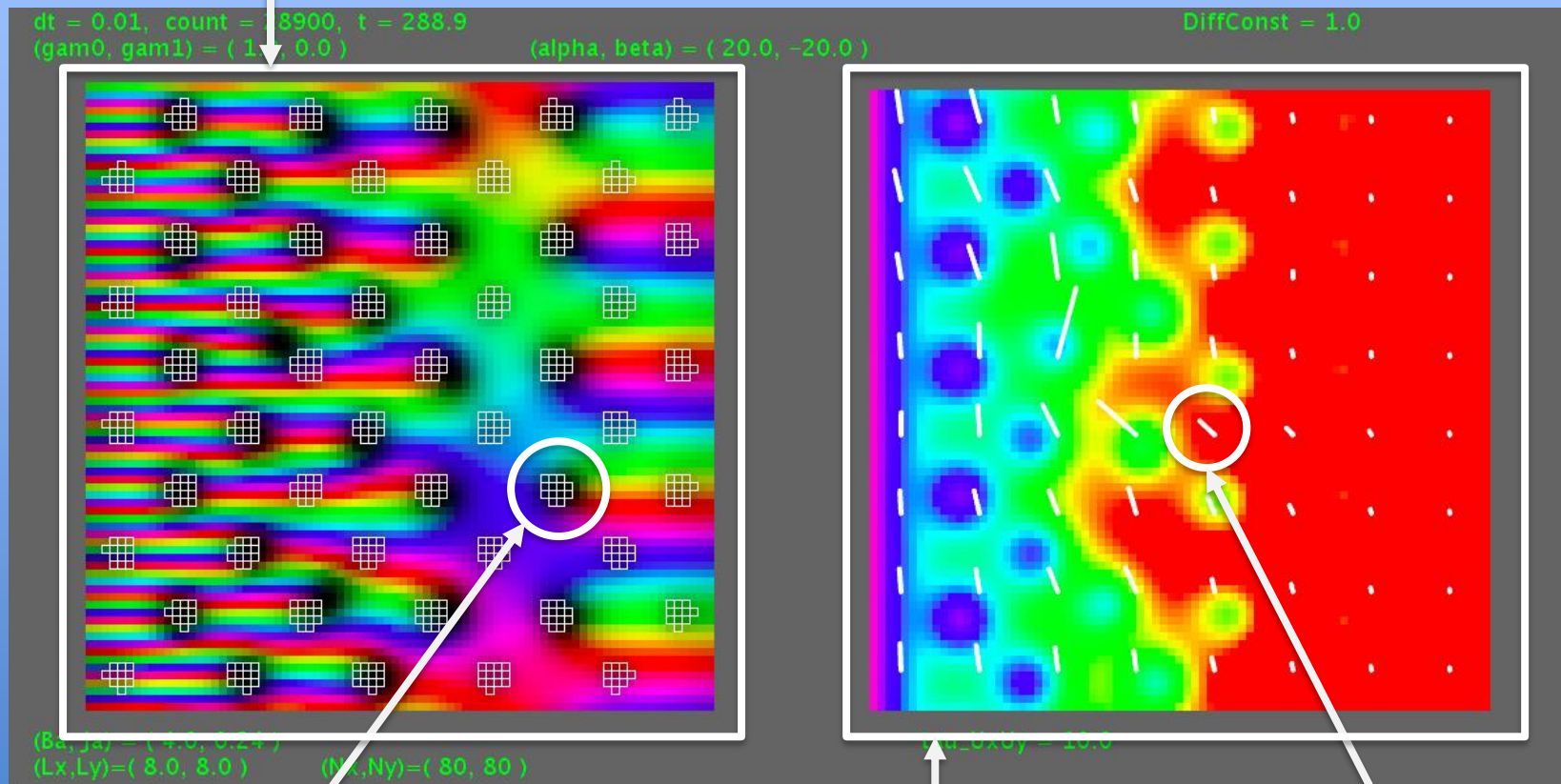
(c)



```
Ux[i][0].equal(Ux[i][Ny]);    //Periodic Boundary Condition
Ux[i][Ny+1].equal(Ux[i][1]);  //Periodic Boundary Condition
```

$$\psi = |\psi| \exp(i\theta)$$

シミュレーション監視画面



ピン: 内側では $\alpha=0$

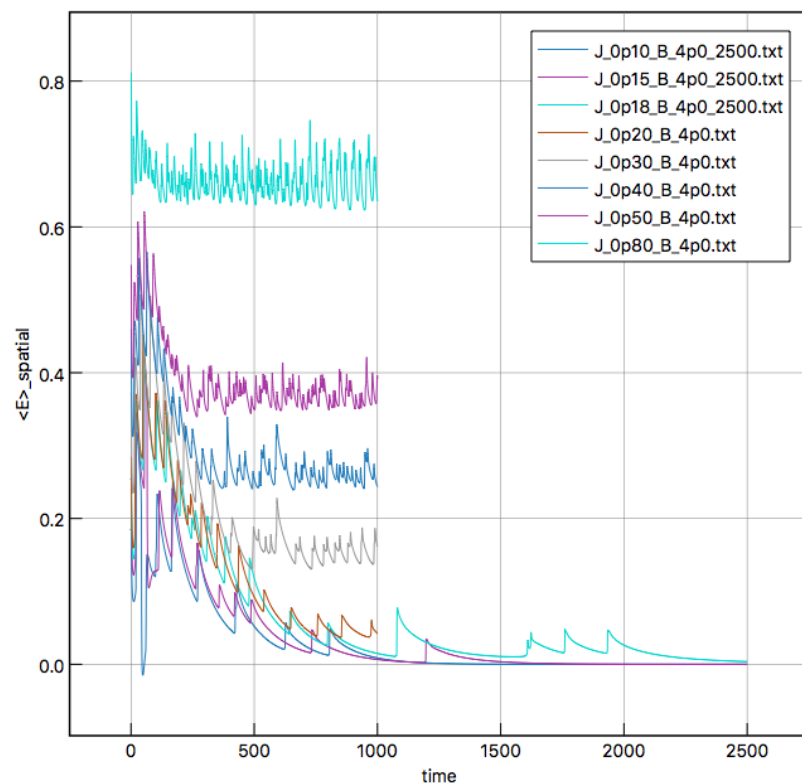
$$B = \nabla \times A$$

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t}$$

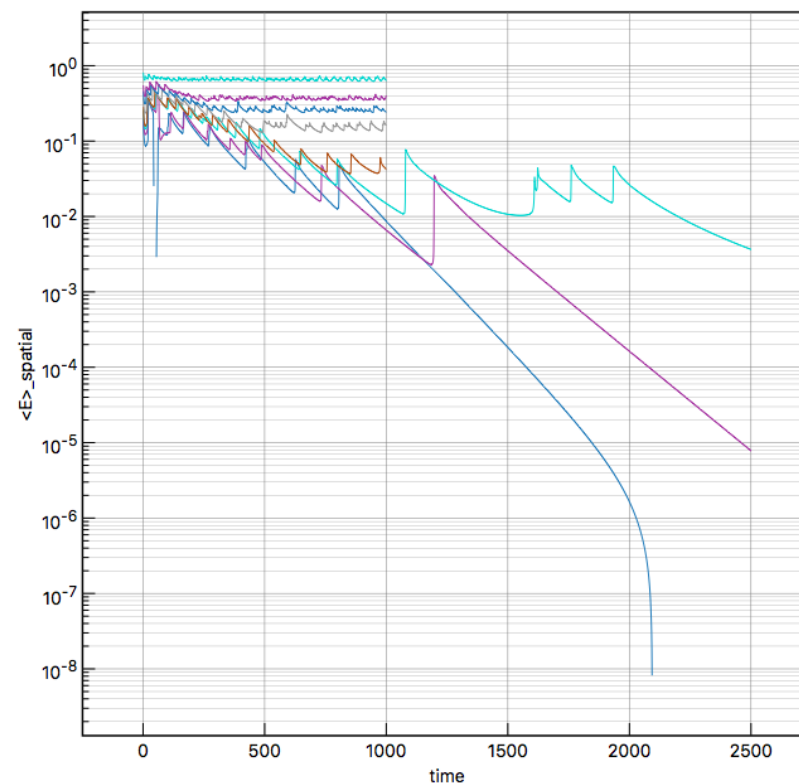
シミュレーションパラメータ

- $L_x = L_y = 8, N_x = N_y = 80$ ($h = 0.1$)
- $dt = 0.01$
 $dt / (h * h) = 1.0$: satisfying the CFL condition ?
CFL: Courant-Friedrichs-Lewy
- $\alpha = 20$ (outside) or 0 (inside of the pin),
 $\beta = 20$
- $\tau_A = 10$

フロー電圧 (ピン無し)



縦軸：線形スケール

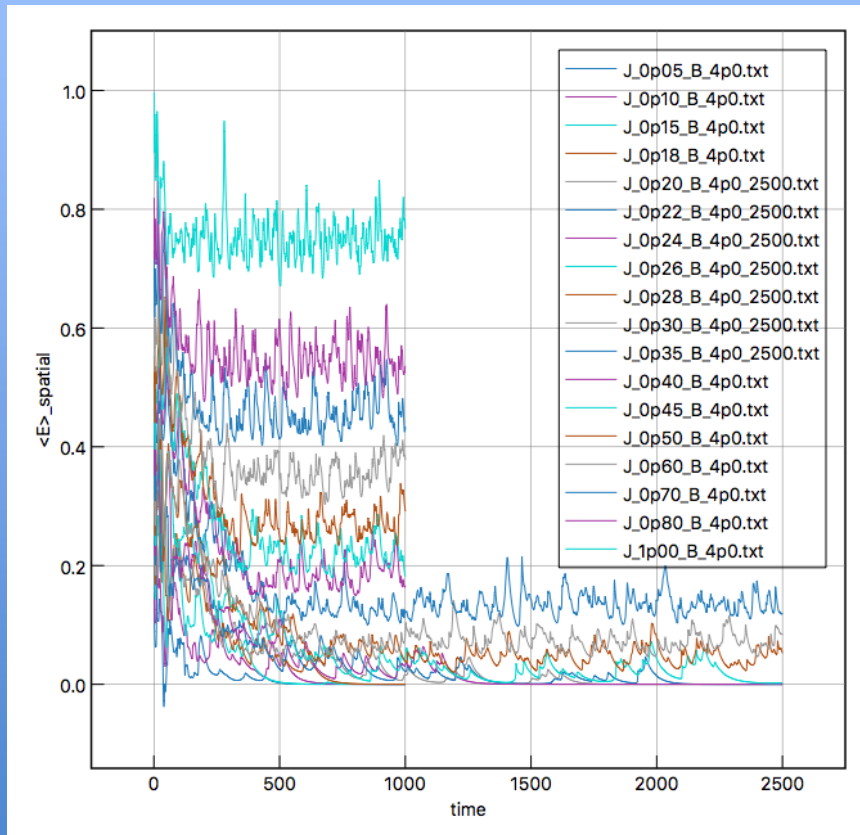


縦軸：対数スケール

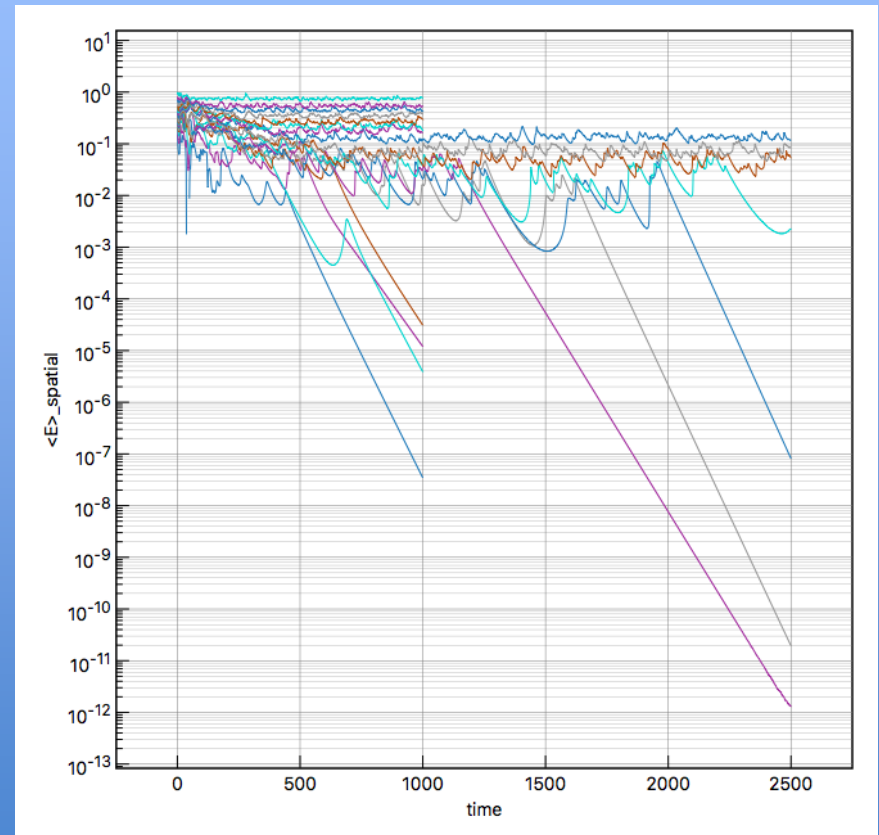
時間



フロー電圧 (ピン有り)



縦軸: 線形スケール



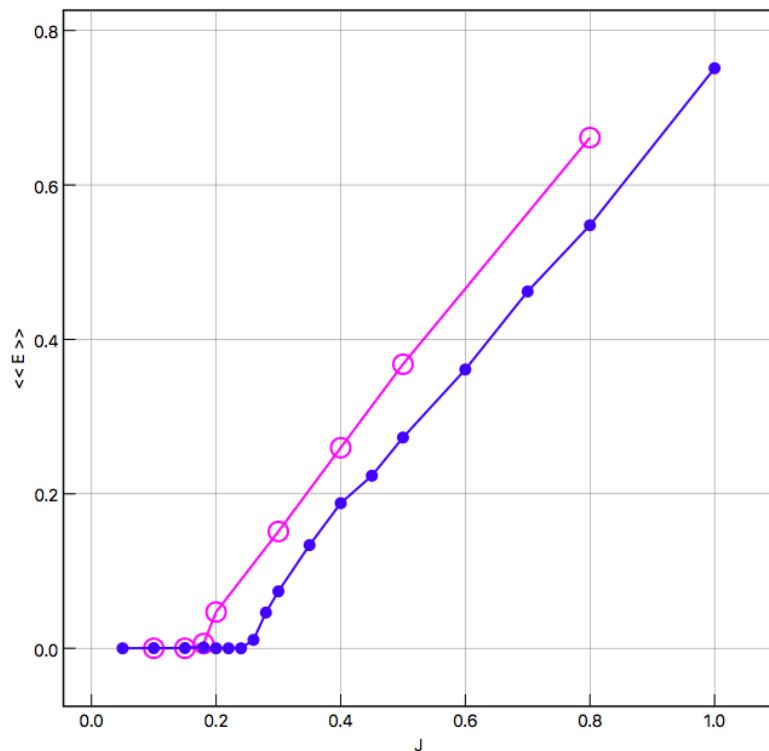
縦軸: 対数スケール

時間

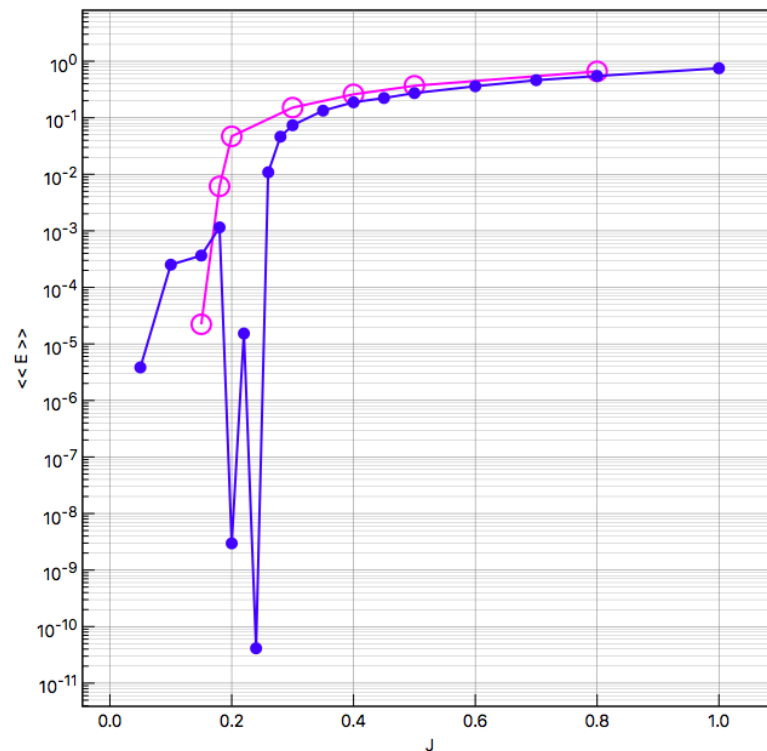


電流電圧特性

発生電圧



印加電流

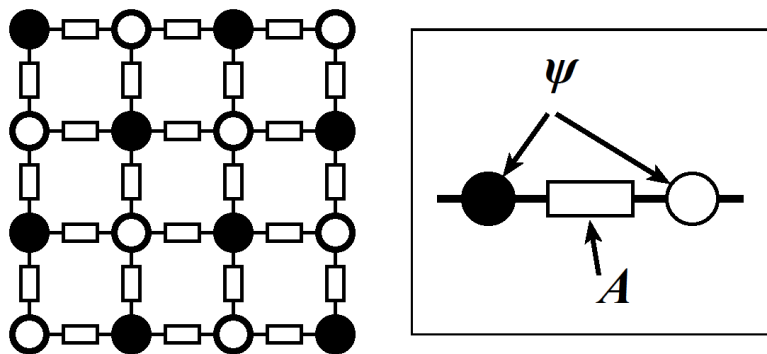


まとめと考察

- TDGL方程式(ファイゼロゲージ)に基づいて電流電圧特性を求めた.
- ピンニングの影響をシミュレートできた.
- 印加電流密度が J_c よりも下であるときは, 算出される発生電圧はゼロ(まるめ誤差レベル)に漸近した.

数値積分アルゴリズムの詳細

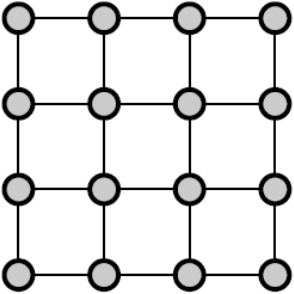
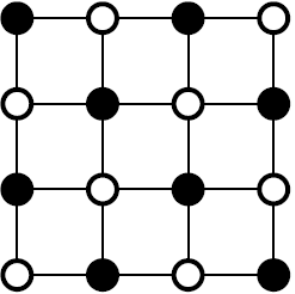
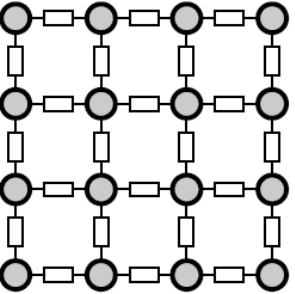
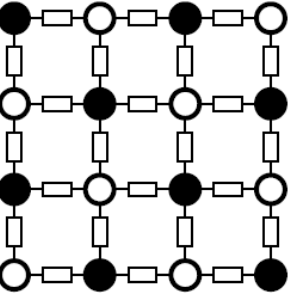
- 空間格子のチェッカーボード分解から導かれる拡張多次元アフィン変換対を用いた陽的幾何学的数値積分法 (Affine Integrator: AI) (論文投稿準備中).
- AIは「反応項」が無い場合は無条件安定.



$$\begin{pmatrix} q(t + \tau) \\ p(t + \tau) \end{pmatrix} = e^{\tau(\hat{A}_Q + \hat{A}_P)} \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix},$$

$$\exp[\tau(\hat{A}_Q + \hat{A}_P)] = \exp((\tau/2)A_Q) \exp(\tau A_P) \exp((\tau/2)A_Q) + O(\tau^3)$$

偏微分方程式のための陽的数値積分法に関して

	リンク変数なし		リンク変数あり	
				
古典力学 (実数場)	・熱拡散方程式 ・波動方程式 ・移流方程式	・熱拡散方程式 (DF 法)	・ Navier-Stokes 方程式 ・電磁波伝搬方程式	(先行研究なし)
量子力学 (複素場)	・ Schrödinger 方程式 ・ TDGP 方程式 (既存の手法)	【本研究】 $(A = 0)$	・ TDGL 方程式 (既存の手法) ・ 格子 QCD (量子色力学)	【本研究】 $(A \neq 0)$

量子化磁束の運動に関するHall効果

$$\begin{aligned}\tau_\psi \frac{\partial \psi}{\partial t} &= (\nabla - i\mathbf{A})^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi \\ \tau_A \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \text{Im}[\psi^*(\nabla - i\mathbf{A})\psi] - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}$$

$$\tau_\psi^{-1} = g_0 + ig_1$$

複素緩和率

$$\tau_{\psi}^{-1} = g_0 + ig_1$$

