

# TDGL方程式とJosephson方程式と sine-Gordon方程式 (改訂版)

– Ballistic Fluxon Logic関係の話も –

量子化磁束動力学シミュレーション研究グループ  
夏のセミナー2022

有明高専 創造工学科 人間・福祉工学系 (情報システムコース) 松野哲也

# 常伝導電流と超伝導電流

• 常伝導電流 ← 電位勾配によるフェルミ球の重心のずれ)

→ 散逸 (ジュール熱: (電圧) x (電流) = (抵抗) x (電流)<sup>2</sup>)

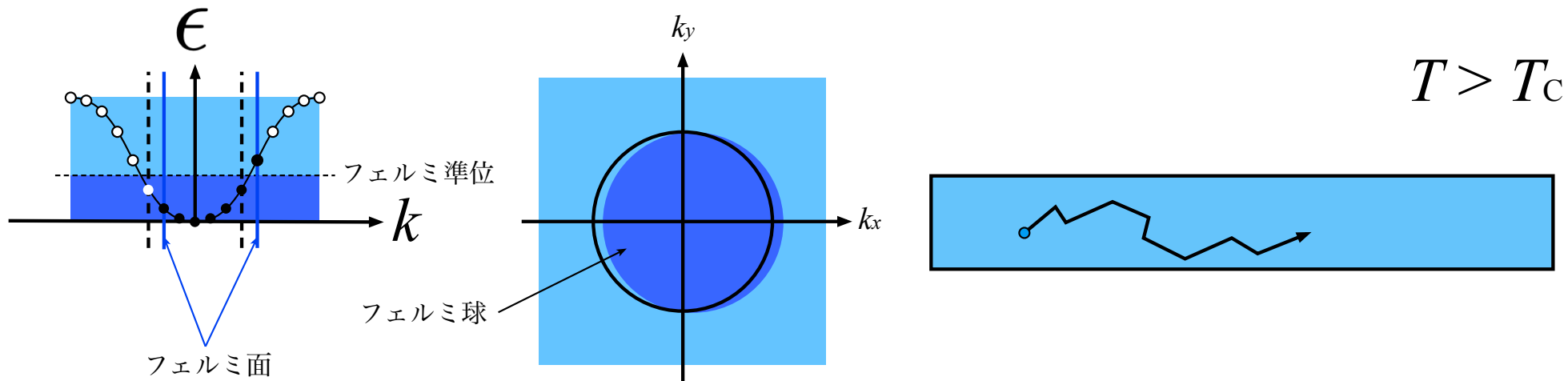
• 超伝導電流 ← オーダーパラメータ (巨視的波動関数) の位相勾配

→ 無散逸 (ただし磁束が動くとエネルギー損失が生じる)

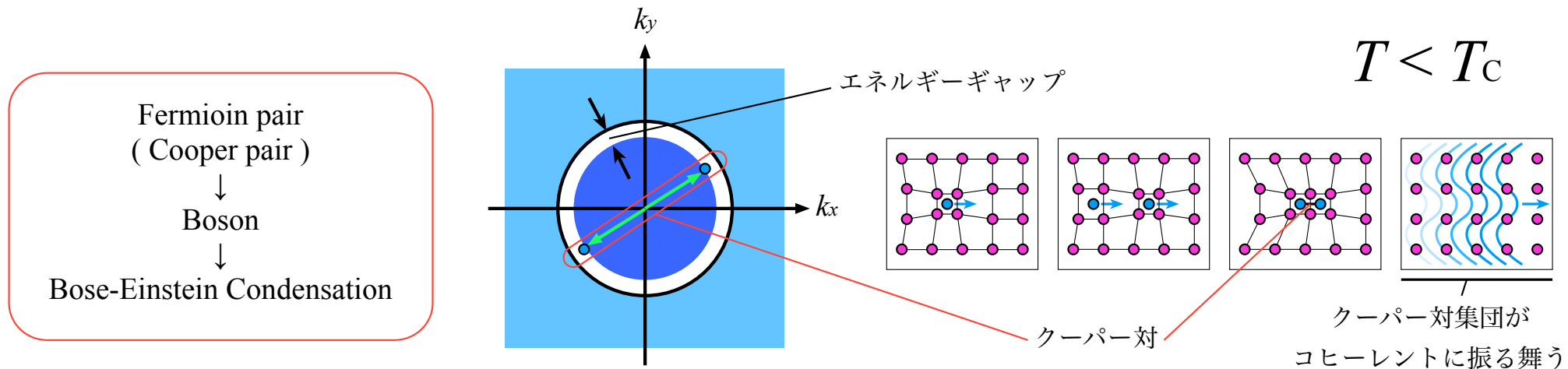
→ 量子渦 (量子化磁束)

# 常伝導電流と超伝導電流

常伝導状態



超伝導状態



# Ginzburg-Landau理論

擬似自由エネルギー

$$F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\}) = \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla \times \mathbf{A})^2$$

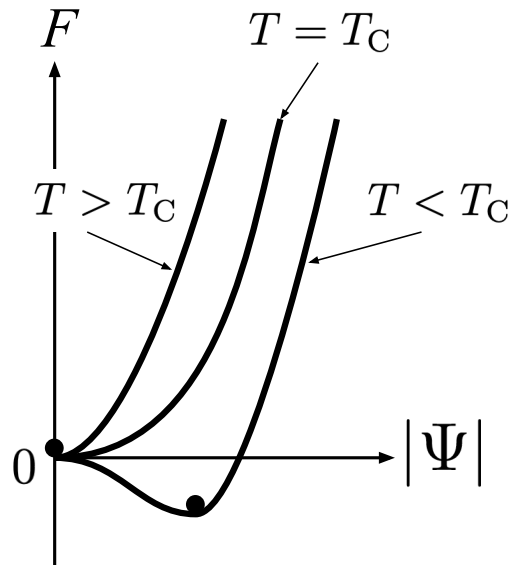
ポテンシャルエネルギー

運動エネルギー

磁気エネルギー

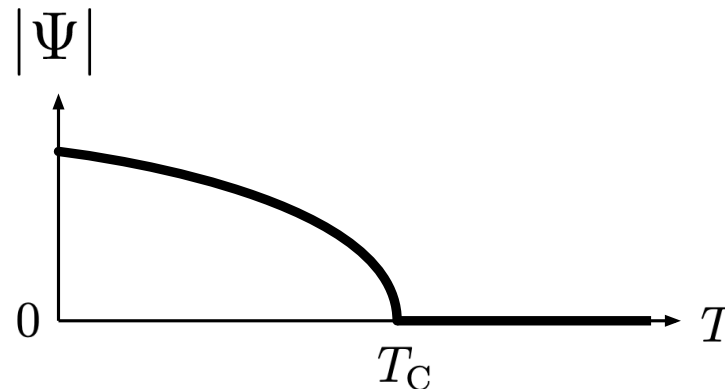
$\Psi$

オーダーパラメータ  
(巨視的波動関数)



ポテンシャルエネルギー

$$\alpha = a_0(T - T_C)$$



オーダーパラメータの大きさの温度依存性

$|\Psi|$

$\propto$  超伝導電子密度

# Ginzburg-Landau理論 → TDGL方程式

擬似自由エネルギーを  
変分して得られる

$$F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\}) = \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla \times \mathbf{A})^2$$

擬似自由エネルギー

$\mathbf{A}$  : ベクトルポテンシャル  
 $\phi$  : スカラーポテンシャル

(1) 
$$\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{e^*}{\hbar} \phi \right) \Psi = - \frac{\delta F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\})}{\delta \Psi^*}$$

時間依存ギンツブルグ・ランダウ方程式  
(Time-Dependent Ginzburg-Landau: **TDGL** 方程式)

(2) 
$$\tau \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = - \frac{\delta F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\})}{\delta \mathbf{A}}$$

オーダーパラメータの時間発展

電磁場の時間発展

# TDGL方程式 → Josephson方程式 (1/3)

定常状態（熱平衡状態）を考える。

定常状態：

式(1)の左辺において時定数  $\gamma$  の実部をゼロとおく。  
式(2)の左辺において時定数  $\tau$  をゼロとおく。

$$(1) \quad \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{e^*}{\hbar} \phi \right) \Psi = - \frac{\delta F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\})}{\delta \Psi^*}$$

$$(2) \quad \tau \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = - \frac{\delta F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\})}{\delta \mathbf{A}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\Psi = |\Psi| e^{i\varphi} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{J} = - \frac{\hbar e^*}{m^*} |\Psi|^2 \nabla \varphi - \frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A}$$

電流には  
オーダーパラメータの位相勾配と  
ベクトルポテンシャルが  
寄与する。

# TDGL方程式 → Josephson方程式 (2/3)

$$\rightarrow J = -\frac{\hbar e^*}{m^*} |\Psi|^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} + \frac{2\pi}{\phi_0} A_x \right), \quad \phi_0 = \frac{h}{e^*}$$

磁束量子

$$\rightarrow J = \frac{1}{d} \int_1^2 J dx = -\frac{\hbar e^*}{m^* d} |\Psi|^2 \left( \varphi_2 - \varphi_1 + \frac{2\pi}{\phi_0} \int_1^2 A_x dx \right)$$

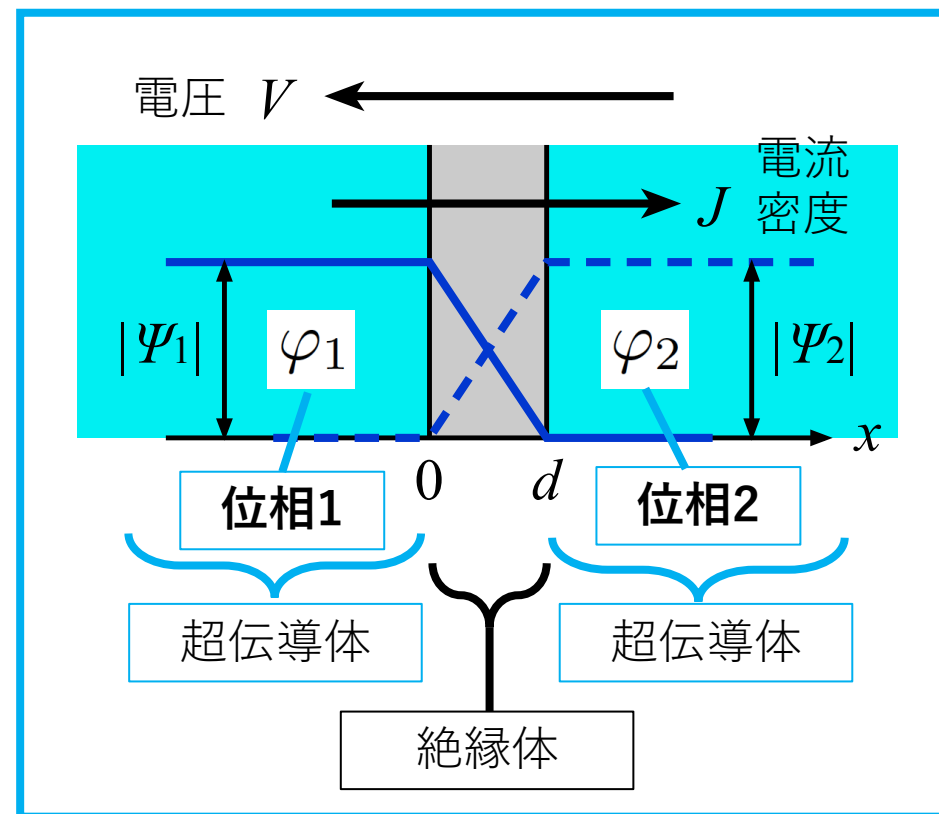
$$\theta \equiv \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{2\pi}{\phi_0} \int_1^2 A_x dx$$

$$J = J_C \theta, \quad J_C = \frac{\hbar e^*}{m^* d} |\Psi|^2$$

$$J = J_C \sin \theta$$

(※)

$J_C$ : Josephson臨界電流密度



# TDGL方程式 → Josephson方程式 (3/3)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = E_1 \Psi_1$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = E_2 \Psi_2$$

$$\theta = \varphi_1 - \varphi_2$$

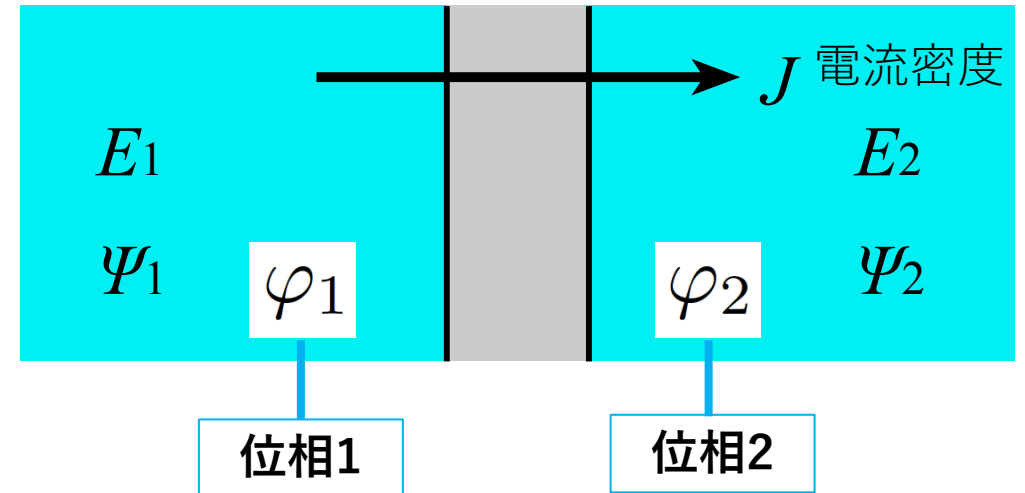
$$\Psi_i = |\Psi_i| e^{i\varphi_i}, \quad i = 1, 2$$

$$\frac{d}{dt} |\Psi_i| = 0, \quad i = 1, 2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{E_1 - E_2}{\hbar} = \frac{e^* V}{\hbar}$$

$$E_1 - E_2 = -e^* V$$

電圧  $V$  ←



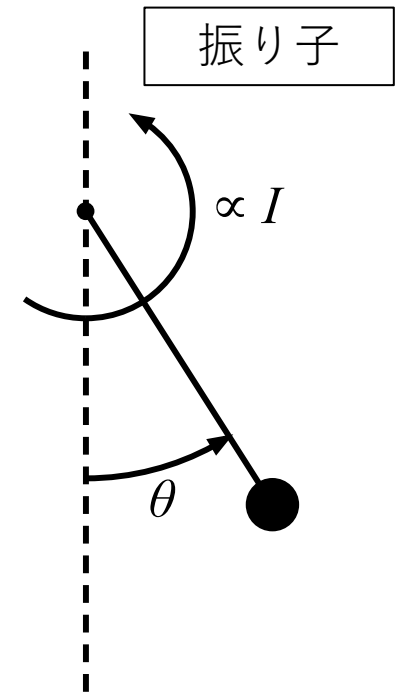
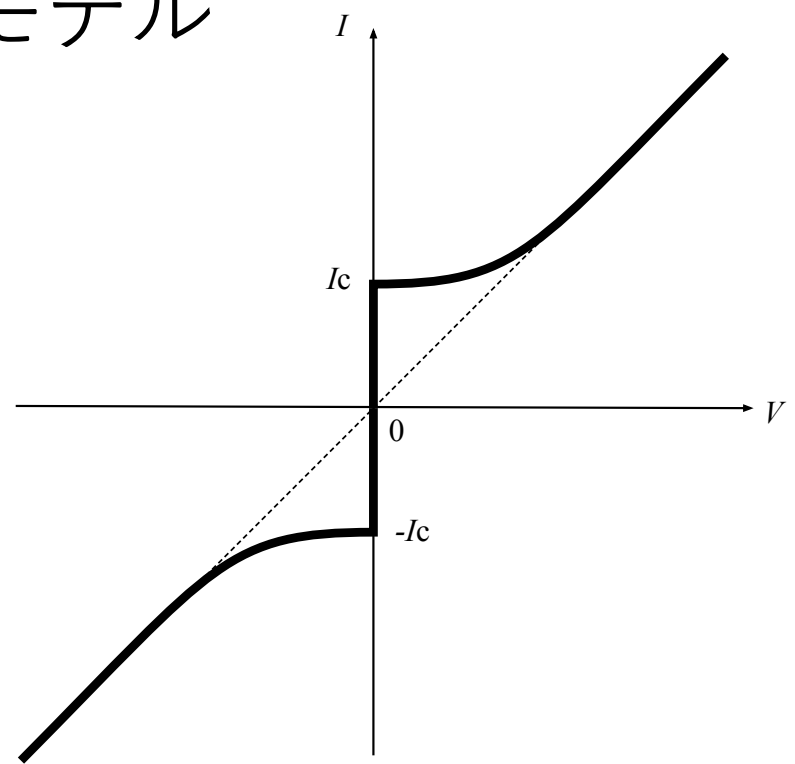
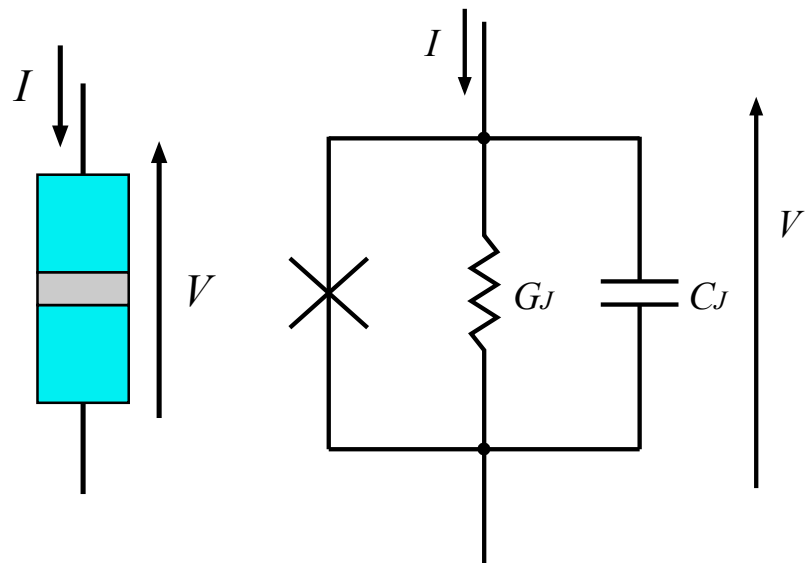
Josephson 方程式

$$J = J_C \sin \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{e^* V}{\hbar}$$



# Josephson接合の電気回路モデル



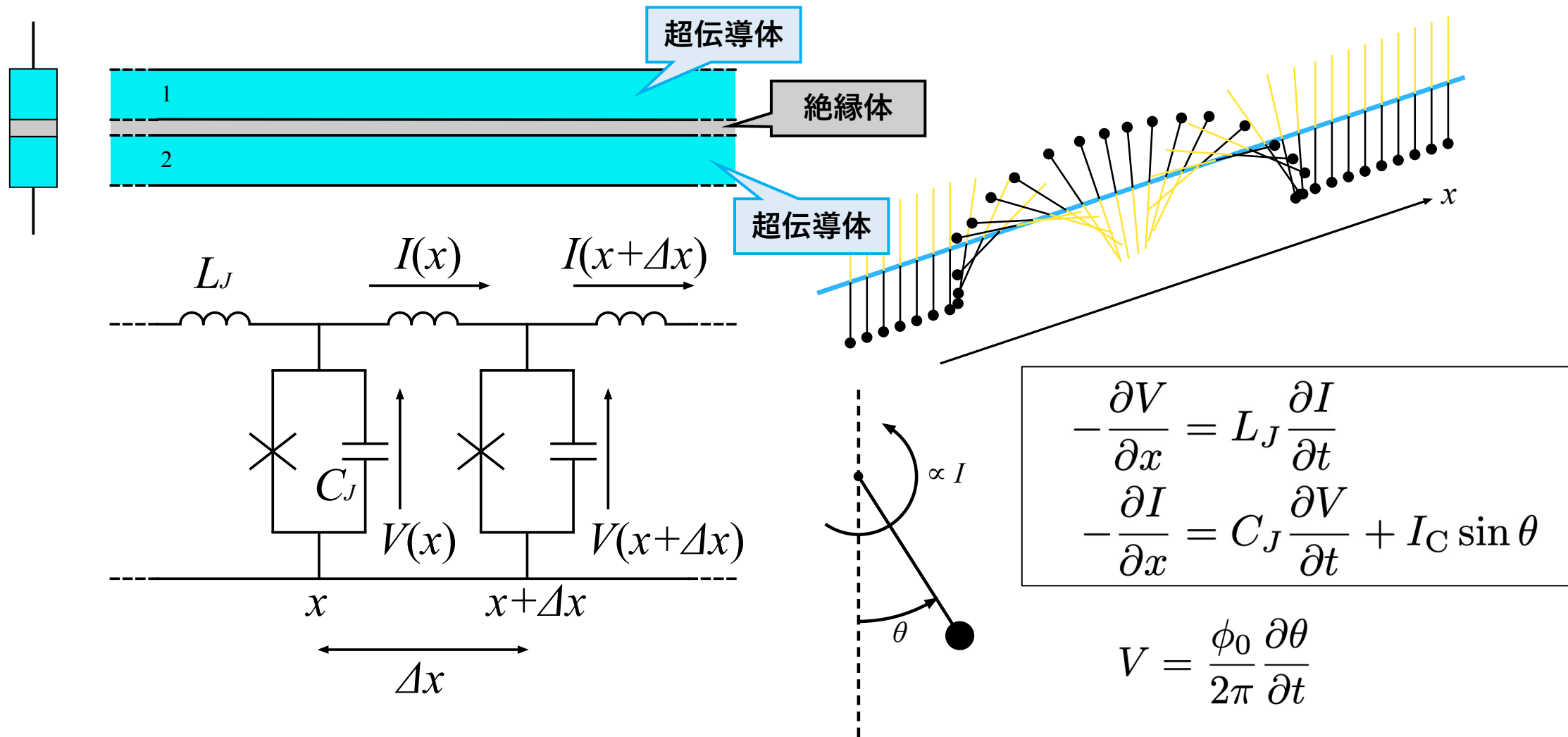
$$\left\{ \begin{aligned} I &= C_J \frac{dV}{dt} + G_J V + I_C \sin \theta \\ V &= \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \right.$$

$I_c$  : Josephson臨界電流

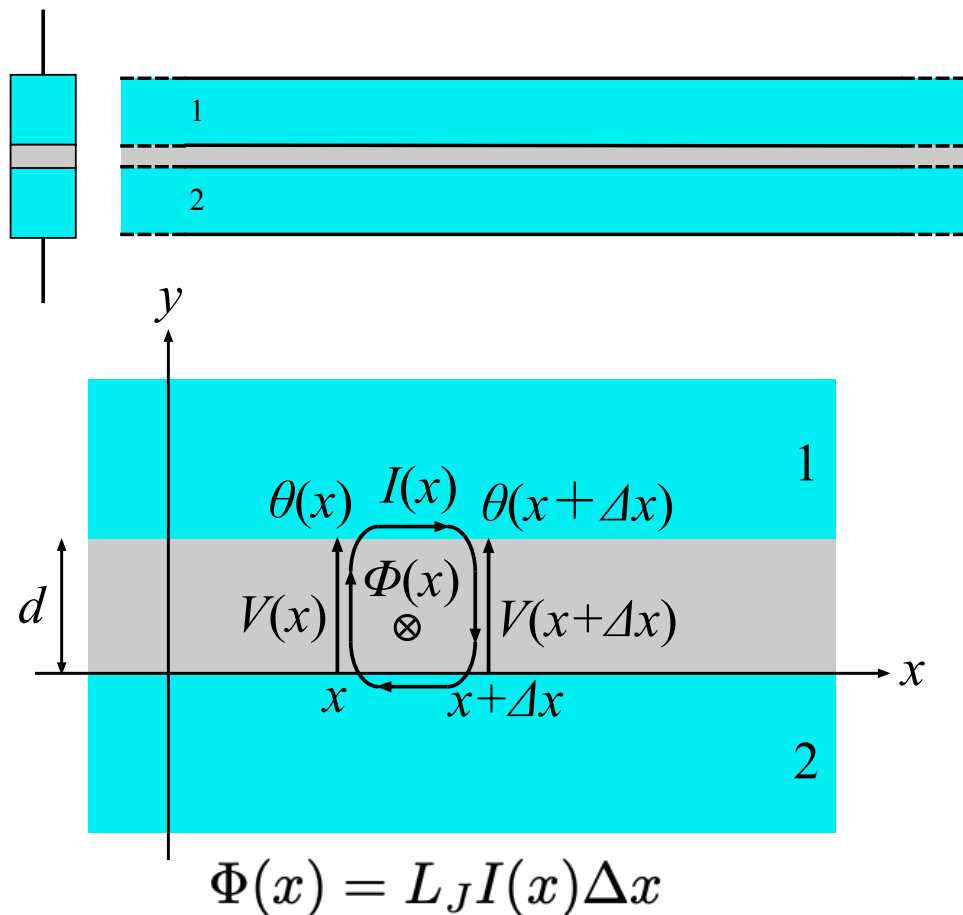
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\zeta \frac{d\theta}{dt} + \omega_J^2 \sin \theta = KI$$

$$\omega_J^2 = \frac{2\pi I_C}{C_J \phi_0}, \quad \zeta = \frac{G_J}{2C_J}, \quad K = \frac{2\pi}{C_J \phi_0}$$

# Long Josephson Junction (LJJ) と sine-Gordon方程式(1/2)



# Long Josephson Junction (LJJ) と sine-Gordon方程式(2/2)



磁束分布  $\leftrightarrow$  位相分布

Sine-Gordon方程式

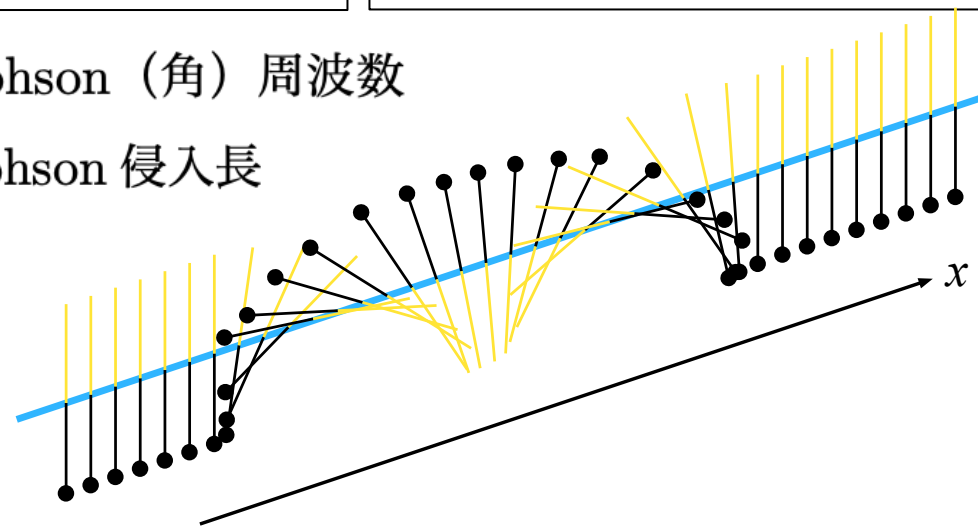
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \omega_J^2 \sin \theta$$

$$\omega_J^2 = \frac{2\pi I_C}{\phi_0 C_J}, \quad c^2 = \frac{1}{L_J C_J}$$

$$c^2 = \lambda_J^2 \omega_J^2, \quad \lambda_J^2 = \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{L_J I_C}$$

$\omega_J$  : Josephson (角) 周波数

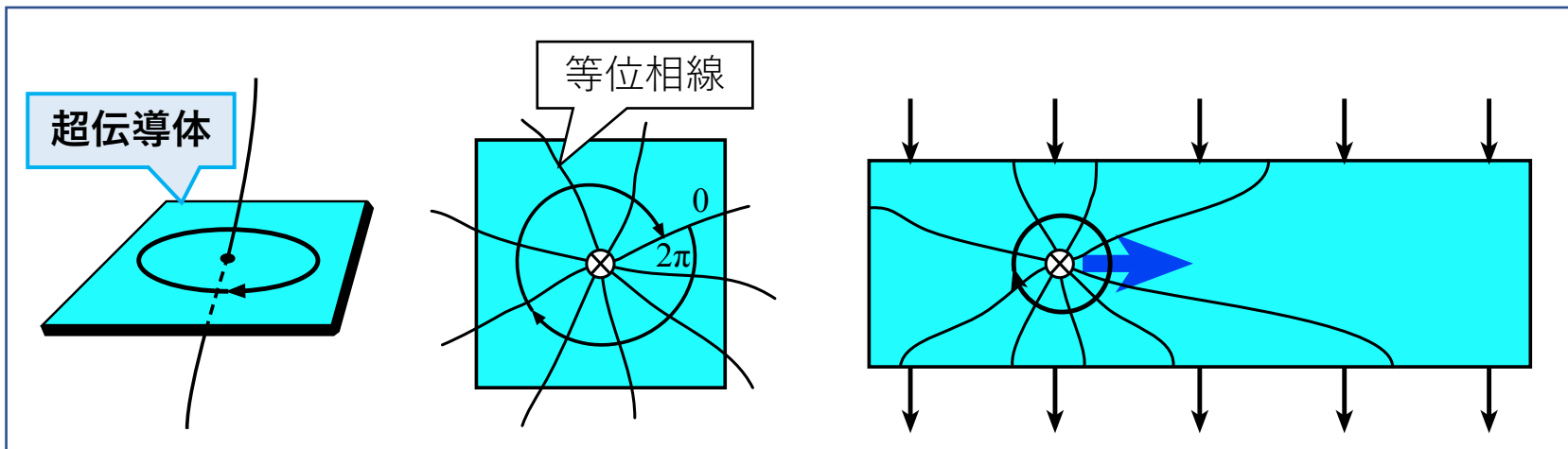
$\lambda_J$  : Josephson 侵入長



# ここまでのまとめ

- Ginzburg-Landau理論  
→ Time-Dependent Ginzburg-Landau(TDGL)方程式
- TDGL方程式 → Josephson方程式
- Long Josephson Junction → sine-Gordon方程式

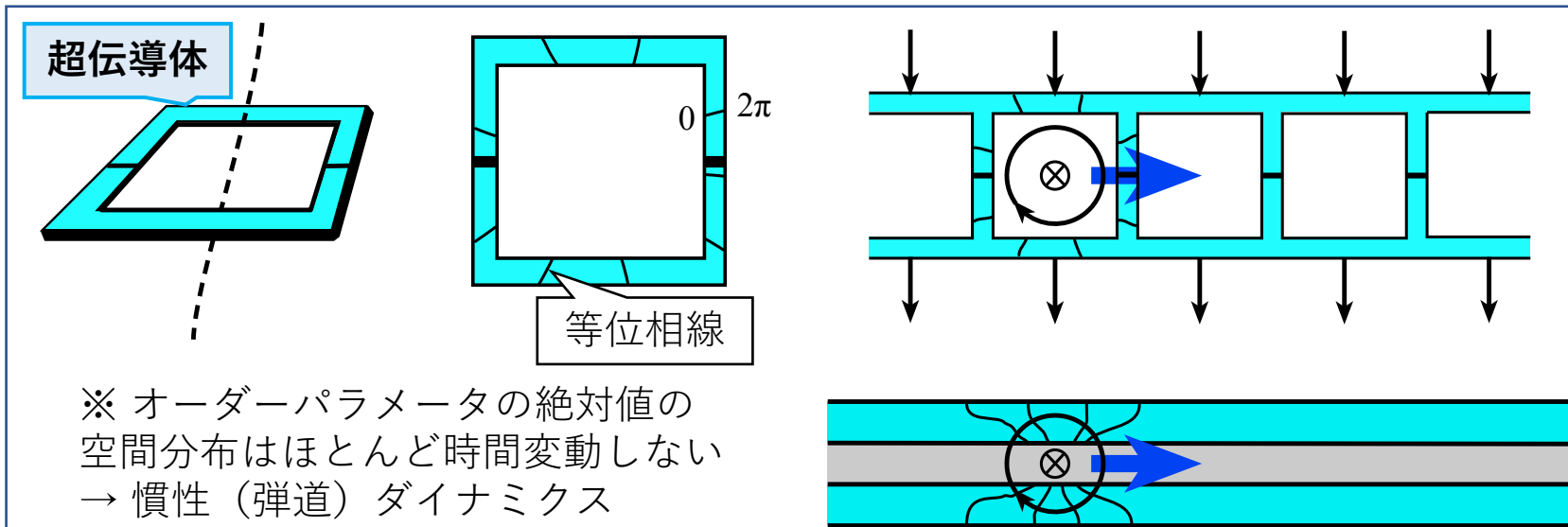
# 超伝導電力工学と超伝導エレクトロニクス



対象：超伝導線材  
 目的：量子化磁束を止めたい  
 （電力損失なくするため）  
 力学：緩和ダイナミクス

<https://youtu.be/85Yb3a1R1GI>

※磁束量子のコアは超伝導体内



※ オーダーパラメータの絶対値の空間分布はほとんど時間変動しない  
 → 慣性（弾道）ダイナミクス

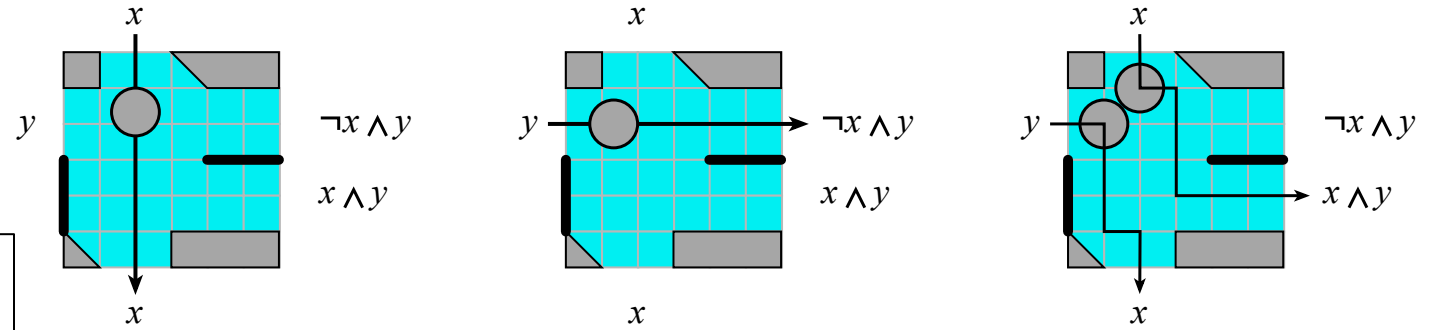
対象：超伝導集積回路  
 目的：量子化磁束を動かしたい  
 （計算に用いるため）  
 力学：「慣性+緩和」ダイナミクス

※磁束量子のコアは絶縁体内  
 （超伝導体外なので実はコアは明確ではない）

# 可逆計算

reversible computing

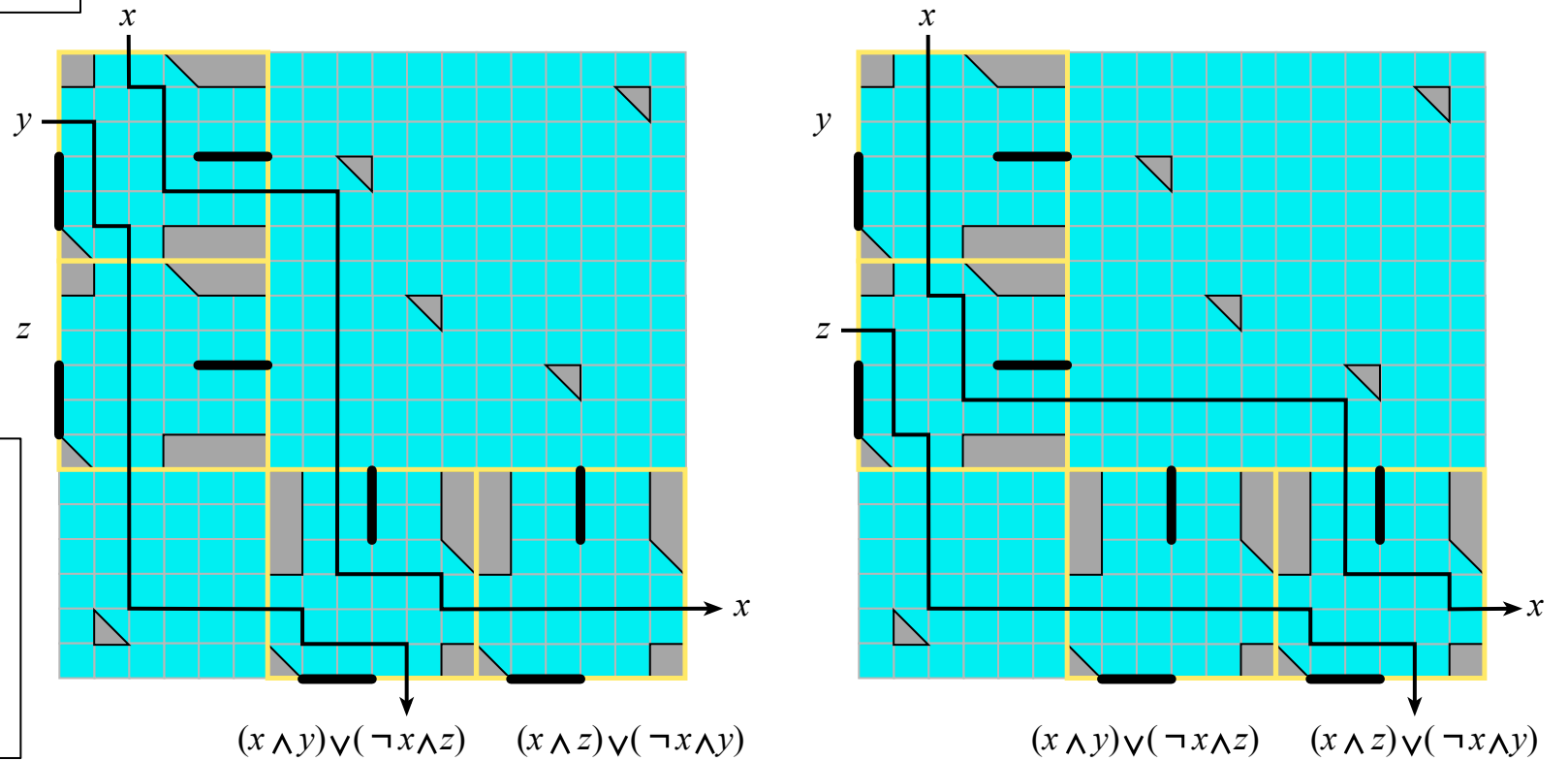
ビリヤードボールコンピューティング  
Fredkin & Toffoli (1982)



フレドキングゲート



- ◎ n入力n出力
- ◎ 出力から入力を復元できる
- ◎ フレドキングゲートはユニバーサル：  
任意のブール回路を作れる。



C. Bernhardt著「みんなの量子コンピュータ」翔泳社2020, p.134-139 の内容をもとに作図。

# 可逆計算と量子計算

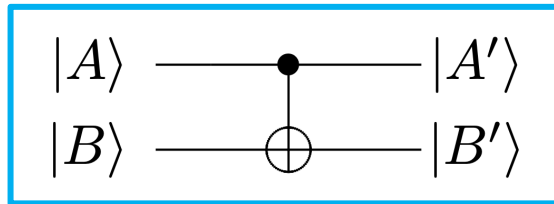
- 物理法則は可逆である。ボルツマン方程式だけが時間に方向性を与えている。
- 熱力学第2法則（エントロピー増大則：巨視系の不可逆性）
- 情報量と仕事の等価性（マクスウェルの悪魔などの話題）
- ランダウアーの原理のエントロピーコスト  $k_B T \ln 2$ 
  - ← 不可逆過程ベースの電子デバイスでは不可避
- 量子力学は可逆
- フレドキンビリヤードボールコンピュータ（可逆計算モデルとしての）はファインマンに感銘を与えた。
  - ファインマンは量子力学に基づいたゲートを考察した。
- ファインマンは2つの量子固有状態に「0」と「1」を対応させた量子的可逆ゲートを発案した。
- キュービットは確定状態のみならず「可能性状態」を保持できる。
- 量子論理ゲートの構成要素であるキュービットの物理実装としてさまざまなものが提案されている。
  - 例えば、  
超伝導体をベース（量子磁束ビット→主に量子アニーラ型？、トランズモン→量子ゲート型）としたもの。

## 参考文献：

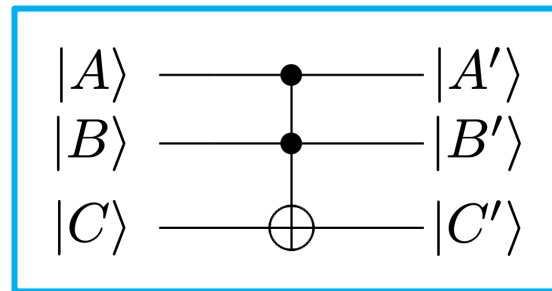
- G. P. Bermanら著「入門 量子コンピュータ」パーソナルメディア2002.
- A. ヘイ, R. アレン編「ファインマン計算機科学」岩波書店1999.

# 量子回路

CNOTゲート

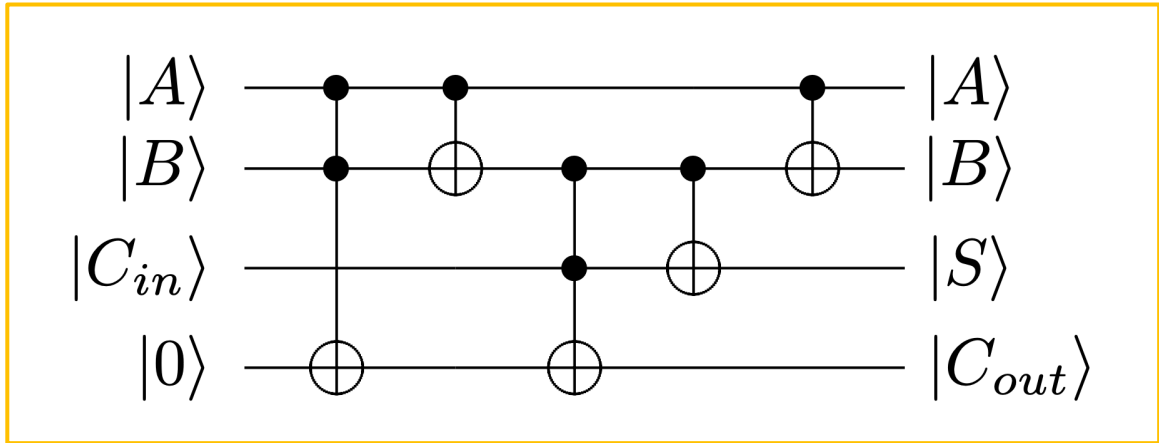
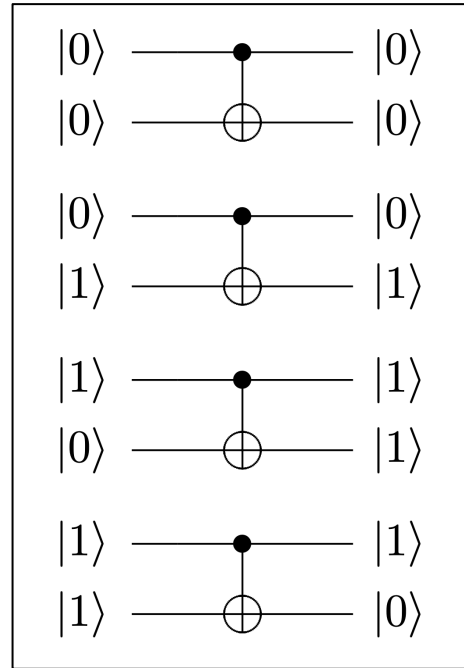


トフォリゲート  
(CCNOTゲート)



量子回路は古典回路とは異なり、  
確定値だけではなく可能性  
(重ね合わせ状態)  
を伝達することができる。

求める答え以外の「可能性」を  
波動関数の干渉現象を利用して  
排除する**効率的な**量子アルゴリズム  
が存在する。



A. ヘイ, R. アレン編「ファインマン計算機科学」岩波書店1999.



# 可逆な量子化磁束論理 (Reversible Fluxon Logic: RFL) (1/3)

可逆デジタル論理

→ 断熱可逆論理

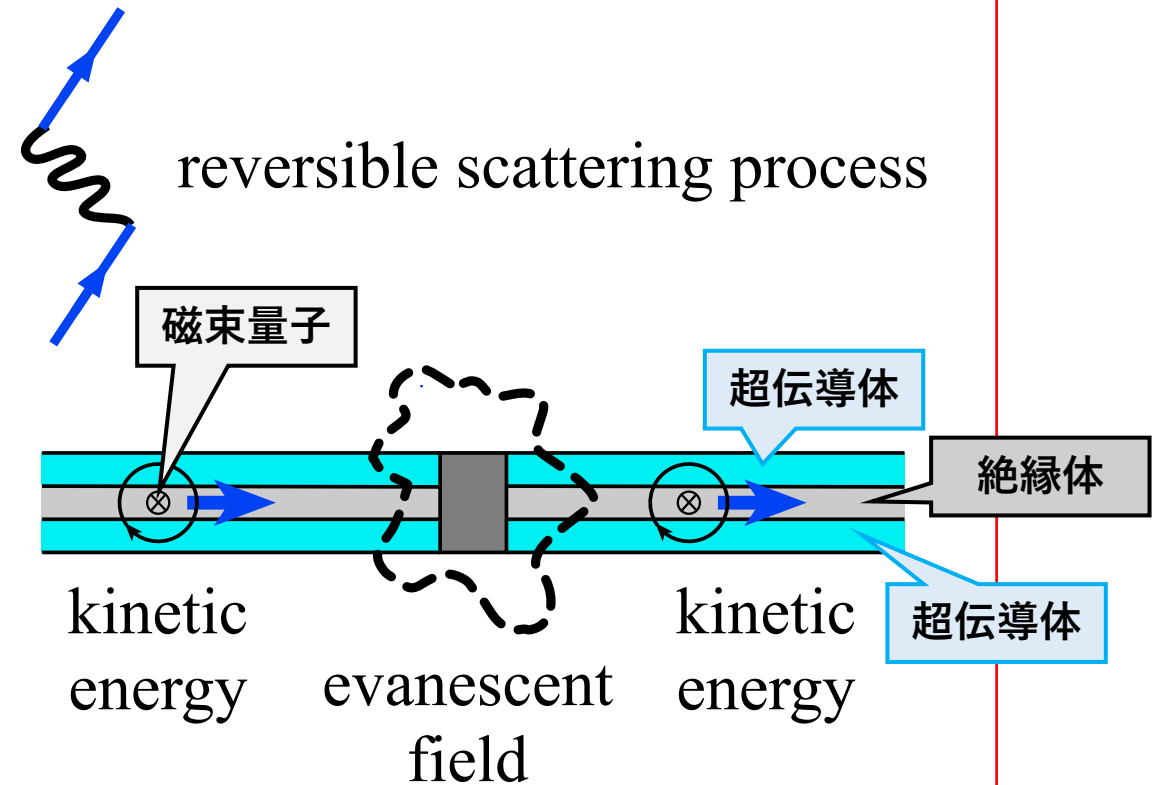
Adiabatic Quantum Flux Parametron

→ 弾道可逆論理

Billiard Ball Model

Reversible Fluxon Logic

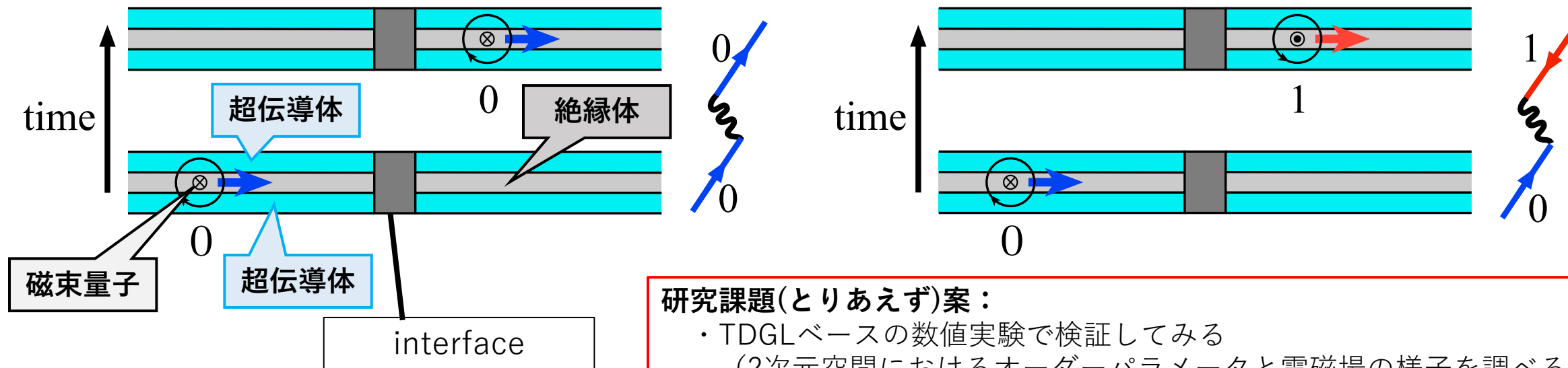
- 量子化磁束(Fluxon)は慣性運動する。  
→ バイアス電流不要はメリット
- スwitching損失が無い。  
← 慣性ダイナミクス & 弾性散乱なので



W. Wustmann & K. D. Osborn, "Reversible fluxon logic: Topological particles allow ballistic gates along one-dimensional paths," Phys. Rev. B 101, 014516 (2020) の内容をもとに作図.

## 可逆な量子化磁束論理 (Reversible Fluxon Logic: RFL) (2/3)

- Polarity change (量子化磁束の向きが反転する) 現象が数値シミュレーションにおいて発見された。
- Polarity changeが生じるかどうかは interface (LJJとLJJの接合部) の構造パラメータに依存する。
- 量子化磁束のPolarityに「0」と「1」を割り当てるアイデア



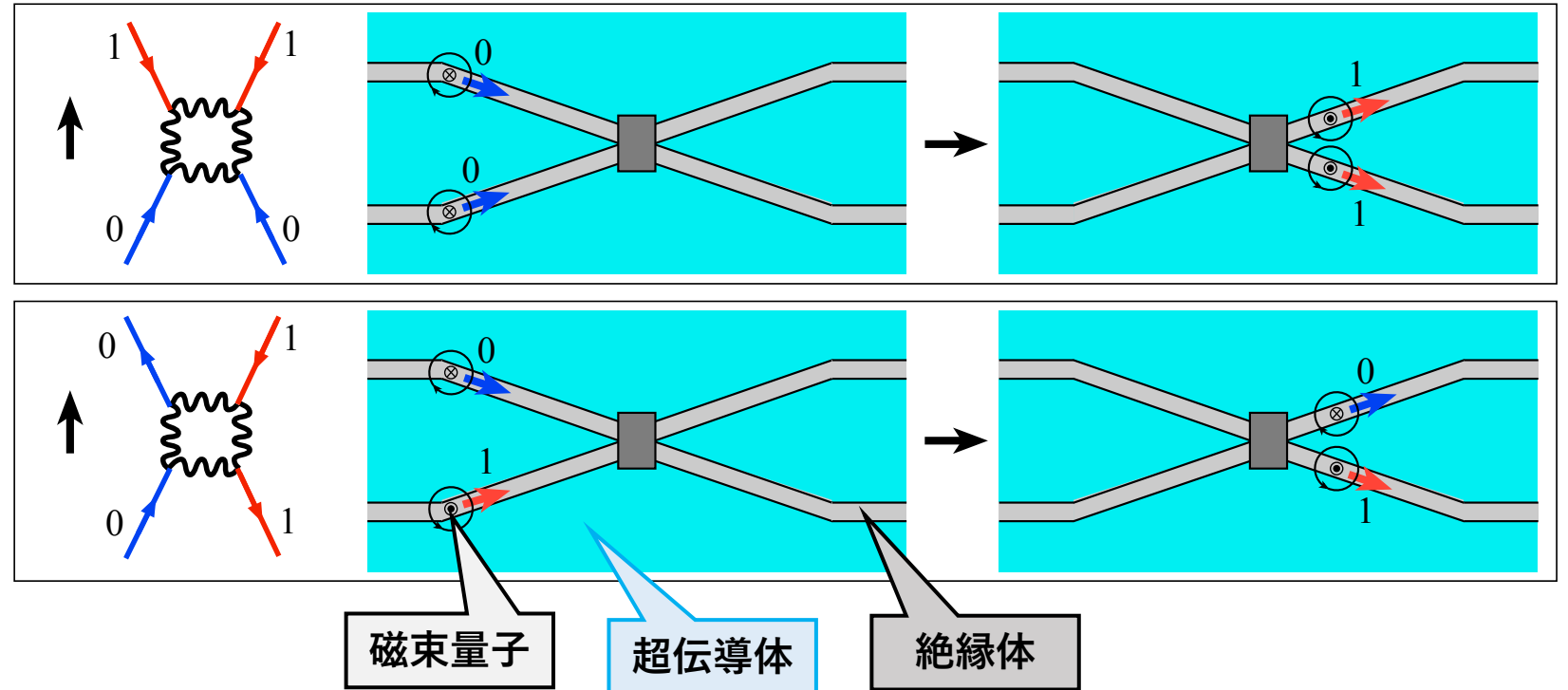
W. Wustmann & K. D. Osborn, "Reversible fluxon logic: Topological particles allow ballistic gates along one-dimensional paths," Phys. Rev. B 101, 014516 (2020) の内容をもとに作図.

# 可逆な量子化磁束論理 (Reversible Fluxon Logic: RFL) (3/3)

Polarity change はinterfaceの構造パラメータのみならず別の量子化磁束の影響を受ける。

→

2-bit gate (controlled NOT) を構成できる。



W. Wustmann & K. D. Osborn, "Reversible fluxon logic: Topological particles allow ballistic gates along one-dimensional paths," Phys. Rev. B 101, 014516 (2020) の内容をもとに作図。

# Discussion

- とっかかりとしてTDGLベースでRFLの動作検証を行ってみる。  
RFL論文では sine-Gordon方程式（電気回路（分布定数回路）ベース）なので  
TDGLベースの数値実験は新しい。回路的考察では捉えきれなかったことが見つかるかも？  
エネルギーを厳密保存するTDGL数値解法は弾道的力学のシミュレーションに適している。  
（（※）Maxwell方程式との整合性は重要検討事項と思われる ← （可逆）弾性散乱の実現）
- Sine-Gordon方程式のためのエネルギー厳密保存陽的数値積分法は構成可能か？  
という研究テーマ
- RFLの考え方は量子化磁束の弾道運動で古典的可逆計算が可能であることを示している。  
→ 磁束量子キュービットを弾道運動させて量子計算を行うことは可能か？  
→ TDGL方程式は磁束量子キュービットを表現可能か？

付録（詳細版）：  
Ginzburg-Landau理論 → TDGL方程式

擬似自由エネルギーを  
変分して得られる

$$F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\}) = \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla \times \mathbf{A})^2$$

擬似自由エネルギー

$$(1) \quad \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{e^*}{\hbar}\phi \right) \Psi = -\frac{\delta F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\})}{\delta \Psi^*}$$

時間依存ギンツブルグ・ランダウ方程式  
(Time-Dependent Ginzburg-Landau: **TDGL** 方程式)

$$(2) \quad \tau \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = -\frac{\delta F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\})}{\delta \mathbf{A}}$$

オーダーパラメータの時間発展

電磁場の時間発展

$$\frac{\delta F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\})}{\delta \Psi^*} = \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi$$

$$\frac{\delta F(\{\Psi\}, \{\mathbf{A}\})}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{i\hbar e^*}{2m^*}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + \frac{e^{*2}}{m^*}|\Psi|^2\mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

$\mathbf{A}$  : ベクトルポテンシャル  
 $\phi$  : スカラーポテンシャル

※ 式(1)と(2)はゲージ対称性を持つ（ゲージ変換に関して不変である）。

※ 時定数  $\gamma$  の実部が正のとき緩和ダイナミクスとなる。

※ 時定数  $\gamma$  が純虚数（ $-i$ ）掛ける（エイチバー）ならば式(1)は非線形シュレディンガー方程式となる。

※ **式(2)は人工的緩和ダイナミクスでありMaxwell方程式と整合しない。 → 左辺に $(\partial/\partial t)$ を付け加えるとMaxwell方程式になる**

付録：TDGL方程式 → Josephson方程式 (※)：

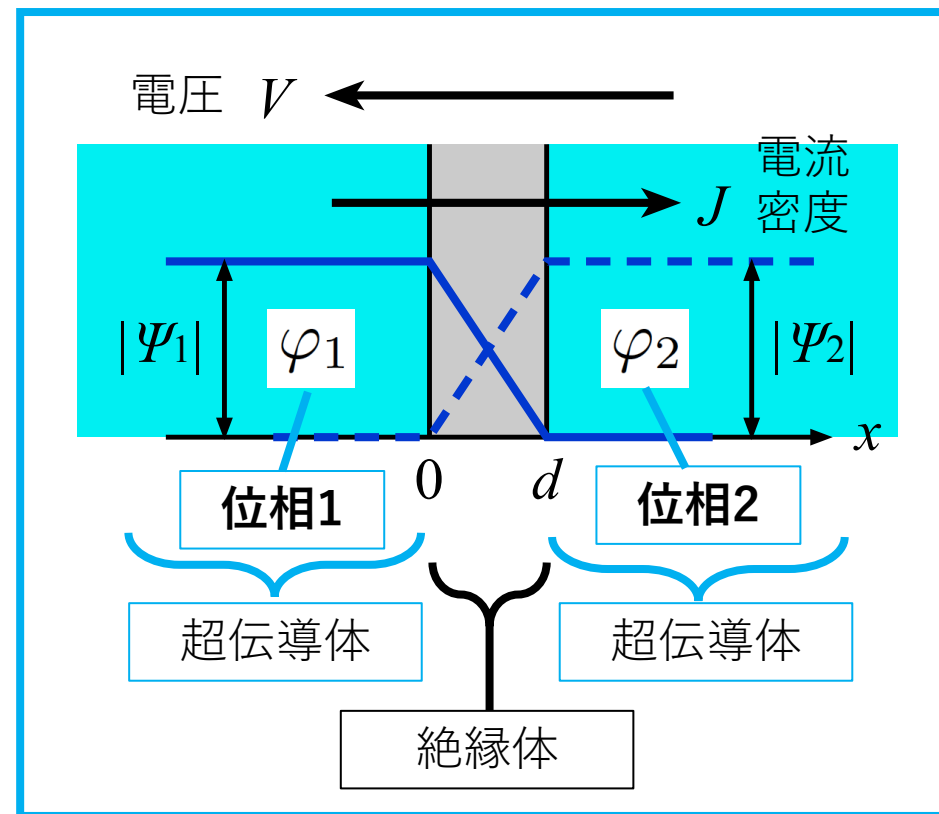
$$\Psi(x) = \left(1 - \frac{x}{d}\right) e^{i\theta} + \frac{x}{d}$$

オーダーパラメータの  
絶縁体領域への  
浸み出し

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{d}(1 - e^{i\theta})$$

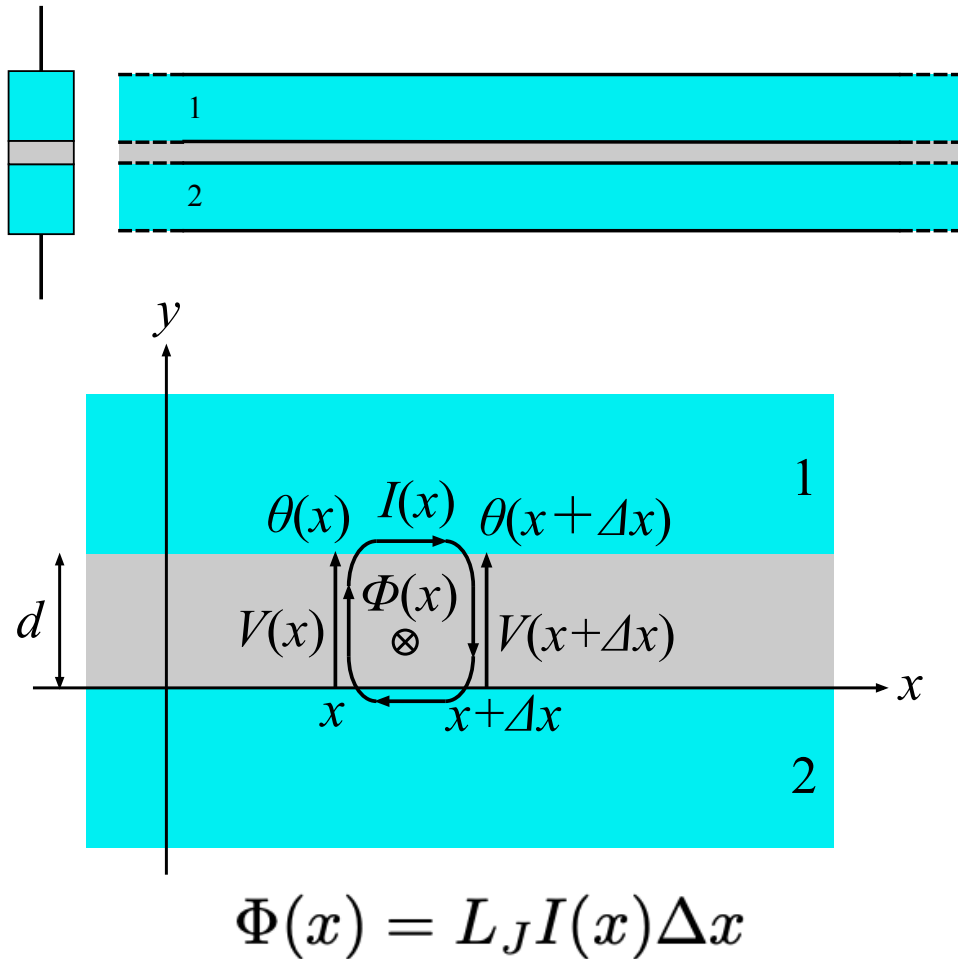
$$\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{d} \left( -\frac{2x}{d} \cos \theta - 1 + \frac{2x}{d} + e^{i\theta} \right)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Im} \left[ \Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \right] = -\frac{1}{d} \sin \theta$$



参考文献：勝本信吾，河野公俊著「超伝導と超流動」  
(岩波講座 物理の世界) 岩波書店2006.

# 付録：Long Josephson Junction (LJJ) と sine-Gordon方程式(導出詳細)



$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (A_y(x + \Delta x) - \theta(x)) \times d \\ &= -\frac{\phi_0}{2\pi} (\theta(x + \Delta x) - \theta(x)) \\ &= -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Delta x \\ &\rightarrow -\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\phi_0}{2\pi L_J} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ &\rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{L_J C_J} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2\pi I_C}{\phi_0 C_J} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \omega_J^2 \sin \theta$$

$$\omega_J^2 = \frac{2\pi I_C}{\phi_0 C_J}, \quad c^2 = \frac{1}{L_J C_J}$$

$$c^2 = \lambda_J^2 \omega_J^2, \quad \lambda_J^2 = \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{L_J I_C}$$

$\omega_J$  : Josephson (角) 周波数,  $\lambda_J$  : Josephson 侵入長