研究

球対称2乗屈折率分布平板状レンズの3次収差係数

坂本豊和

兵庫県立工業試験場　〒654 神戸市須磨区行平町 3-1-12

(1982年9月10日受理)

The 3rd-Order Aberration Coefficients of Planar Lenses with Spherically Symmetric Quadratic Index Profile

Toyokazu SAKAMOTO

Industrial Laboratory of Hyogo Prefecture,
3-1-12, Yukihira, Suma, Kobe 654, Japan

The paraxial ray paths in a planar lens with spherically symmetric quadratic index profile are found analytically, and the 3rd-order aberration coefficients are derived by employing the 3rd-order aberration theory of inhomogeneous lenses developed by P. J. Sands.

1. はじめに

微小光学素子としての利用が進みつつある屈折率分布レンズは，ガラス，プラスチックあるいは結晶を母材として種々の製法で作られる．屈折率の分布形状には，大別して，(1)光軸方向分布，(2)半径方向分布（あるいは円筒状分布)，そして，(3)球状分布の三つがあり，これらの分布形状を個別に得ることも，また組み合わさったものにすることもできる．(1)は屈折率が光軸に沿って連続的に変化するものをいい，非球面と一対一の対応関係があることが知られている[1-3]．(2)は光軸と垂直な方向に屈折率が変化するものを指し，ロッドレンズ(または SELFOC®) として実用化されている[4]．(3)は点対称に屈折率が変化するものをいい，代表的なものとしては，Maxwell の fish-eye レンズ，そして Luneburg レンズが有名である．しかし，現在のところ光学レンズとしてはまだ開発されていない．また，最近これら以外にも(1)および(2)の屈折率分布を共有する平板マイクロレンズが伊賀らによって報告されている[5]．

屈折率分布レンズの設計は，数値的な光線追跡あるいは Sands の展開した不均質レンズの 3 次収差論[1] によって行なわれているが，前者は，収差全体の大きさを精度良く知るうえで有効であり，先に述べたすべての屈折率分布について，数値的な光線追跡の手法および結果が数多く報告されている．また，(2)，(3)および平板マイクロレンズに関しては光線方程式の解析解が得られている例もある[6]．一方，後者は，球面，非点等の3次収差の大きさを個別に把握でき，しかもレンズの端面形状，厚み，そして屈折率分布係数を3次収差係数に陽に表現できるといった特長がある．そして，(1)および(2)の屈折率分布に関しては，Sands の3次収差論を用いた3次収差係数の計算がいくつか報告されている．たとえば，Moore[2] は，(1)あるいは(2)の屈折率分布を有する単レンズについて3次収差係数を数値計算し，レンズの最適設計を行なっている．また，(2)に関して同様な計算が，Paxton[7] らによって報告されており，屈折率分布係数を含んだ形の3次収差係数を解析的に導出している．

本文では，Luneburg レンズの一つの拡張である(3)の屈折率分布

$$n^2(r, z)=n_0{}^2[1-g^2(r^2+z^2)], \quad r^2=x^2+y^2 \quad (1)$$

をもつレンズについて，Sands の 3 次収差論を適用し，球面，コマ，非点，像面彎曲，歪曲の各3次収差係数を解析的に導出する．ただし，ここでは簡単のため，両端面が平行な平板状レンズについて考察することとし，端面がゼロでない曲率をもつレンズについては別の機会にゆずる．

2. 近軸光線経路

屈折率分布が $n(r, z)$ で与えられる不均質媒質中での光線経路は，Fermat の原理から導かれる次の Euler-Lagrange 方程式によって記述される[1,2]．

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=0 \qquad (3)$$

ここで，ラグランジアン $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L}=n(r, z)(1+\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2} \qquad (4)$$

で定義され，また・は z に関する微分を表わす．

3次収差論においては，子午面光線のみを対象とすればよく，いま x-z 平面を子午面に選ぶと，式(2)および(4)より子午面光線の満たすべき微分方程式として

$$2n^2\ddot{x}+(1+\dot{x}^2)\left(\dot{x}\frac{\partial n^2}{\partial z}-\frac{\partial n^2}{\partial x}\right)=0 \qquad (5)$$

が得られる．3次収差係数は，二つの近軸光線を追跡することによって求めることができるので，この近軸光線として一般性を失うことなく，a光線 (axial ray) とb光線 (chief ray) を選ぶと，任意の点 z における実際の光線高さ x は，近軸近似の範囲で

$$x(z)=x_a(z)S+x_b(z)T \qquad (6)$$

のように，物体面上での光線高さ S と入射瞳上での光線高さ T の1次結合で表わされる[1,2]．ここに，x_a および x_b はそれぞれaおよびb光線の高さであり，S および T はいずれも正規化された量である．

次に，式(1)，(5)そして(6)を用いて近軸光線方程式を導出する．まず，式(5)に式(1)および(6)を代入し，S および T の1次項のみを残すという近軸近似を行なうと，

$$\{[1-(gz)^2]\ddot{x}_a-g^2z\dot{x}_a+g^2x_a\}S + \{[1-(gz)^2]\ddot{x}_b-g^2z\dot{x}_b+g^2x_b\}T=0 \qquad (7)$$

が得られる．式(6)は，互いに独立な S, T についての恒等式であり，S, T の各係数がともにゼロでなければならないことから，結局，a光線およびb光線の満たすべき微分方程式として

$$[1-(gz)^2]\ddot{x}_a-g^2z\dot{x}_a+g^2x_a=0 \qquad (8)$$

$$[1-(gz)^2]\ddot{x}_b-g^2z\dot{x}_b+g^2x_b=0 \qquad (9)$$

を得る．

視察により，式(8)および(9)は完全微分方程式であることが知られるので，直ちに積分できて，その解は，

$$x_a(z)=x_a(0)\sqrt{1-(gz)^2}+v_a(0)z \qquad (10)$$

$$x_b(z)=x_b(0)\sqrt{1-(gz)^2}+v_b(0)z \qquad (11)$$

となる．ここで，$x_a(0)$, $v_a(0)$, $x_b(0)$, そして $v_b(0)$ は，各光線の初期条件によって定まる定数であるが，通常，a光線に対しては $x_a(0)=0$, またb光線に対しては $v_b(0)=0$ とおく．さらに，開口絞りを用いないとすれば，$x_b(0)=a$, また $v_a(0)=a/t$ とおけるので，a光線およびb光線の経路は，それぞれ

$$x_a(z)=(a/t)z \qquad (12)$$

$$x_b(z)=a\sqrt{1-(gz)^2} \qquad (13)$$

に帰着される．ただし，$2a$ および t は，それぞれレンズ径およびレンズ厚を表わす．また，以下では，$\dot{x}(z)$ を $v(z)$ で表わすものとする．

3. 3次収差係数

Sands によれば，3次収差係数は不均質媒質による transfer contributions とレンズ端面の曲率による surface contributions の1次結合で表わされる．

3.1 transfer contributions

ここで，transfer contributions $a_i{}^*$ $(i=1, 2, \cdots, 5)$ を計算するための準備をする．まず，屈折率分布式(1)を回転対称性により r^2 で級数展開すると，

$$n(r, z)=N_0(z)+N_1(z)r^2+N_2(z)r^4+\cdots \qquad (14)$$

ただし，

$$N_0(z)=n_0\sqrt{1-(gz)^2} \qquad (15)$$

$$N_1(z)=-\frac{n_0g^2}{2\sqrt{1-(gz)^2}} \qquad (16)$$

$$N_2(z)=-\frac{n_0g^4}{8[1-(gz)^2]^{3/2}} \qquad (17)$$

となる．次に，入射面に対する射出面の屈折率差 ∇N_0 を求めると，

$$\nabla N_0=n_0[\sqrt{1-(gt)^2}-1] \qquad (18)$$

となり，さらに近軸不変量 λ は

$$\lambda=N_0(x_av_b-x_bv_a) = -n_0a^2/t \qquad (19)$$

で与えられることが知られる．

以上の準備の下に，transfer contributions $a_i{}^*$ を求めると

$$a_1{}^*=-\frac{n_0a^4}{2t^3}\left[1+\frac{(gt)^2}{\sqrt{1-(gt)^2}}\right] \qquad (20)$$

$$a_2{}^*=\frac{n_0g^2a^4}{2t}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(gt)^2}}-1\right] \qquad (21)$$

$$a_3{}^*=\frac{n_0g^4a^4t}{2[1-(gt)^2]}[\sqrt{1-(gt)^2}-1] \qquad (22)$$

$$a_4{}^*=-\frac{n_0g^2a^4}{2t\sqrt{1-(gt)^2}} \qquad (23)$$

$$a_5^* = \frac{n_0 g^2 a^4}{2t}\left\{\frac{1}{2}\cdot\ln[1-(gt)^2]+\frac{3}{2}(gt)^2-1-\frac{1}{1-(gt)^2}\right.$$
$$\left.+2\sqrt{1-(gt)^2}+\frac{(gt)^2}{[1-(gt)^2]^{3/2}}\right\} \qquad (24)$$

となる.

3.2 surface contributions

surfaces contributions $a_i(i=1,2,\cdots,5)$ は, 不均質媒質による項と通常のレンズ端面による項の二つから成り, 前者は, 形式的には非球面による surface contributions と同じものである. 両端面が平行な平板状レンズにおいては, 入射面および射出面の曲率がいずれもゼロであることを考慮すると, 前者は消えることが示されるので, surface contributions は後者のみによって定まる.

ここで, surface contributions を構成するパラメータ

$$\hat{a}=(1/2)n_0(n_0-1)x_a v_a^2(v_a+v_a') \qquad (25)$$
$$q=v_b/v_a \qquad (26)$$
$$v_a'=\frac{n_e v_a}{\sqrt{1+(1-n_e^2)v_a^2}}\simeq n_e v_a \qquad (27)$$
$$n_e=n_0\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)} \qquad (28)$$

を用いると, 結局, 各 surface contributions a_i はそれぞれ

$$a_1=\hat{a}$$
$$=\frac{1}{2}n_0(n_0-1)\frac{a^4}{t^3}[1+n_0\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}] \qquad (29)$$
$$a_2=q\hat{a}$$
$$=-\frac{1}{2}n_0(n_0-1)\frac{g^2a^4}{t\sqrt{1-(gt)^2}}$$
$$\times[1+n_0\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}] \qquad (30)$$
$$a_3=q^2\hat{a}$$
$$=\frac{1}{2}n_0(n_0-1)\frac{g^4a^4t}{1-(gt)^2}$$
$$\times[1+n_0\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}] \qquad (31)$$
$$a_4=0 \qquad (32)$$
$$a_5=q^3\hat{a}$$
$$=-\frac{1}{2}n_0(n_0-1)\frac{g^6a^4t^3}{[1-(gt)^2]^{3/2}}$$
$$\times[1+n_0\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}] \qquad (33)$$

に帰着される.

3.3 3次収差係数

式(20)～(24)および(29)～(33)にそれぞれ示される transfer contributions a_i^* および surface contributions a_i と3次収差係数 σ_i の関係は

$$\sigma_i=\mu(a_i^*+a_i), \qquad i=1,2,\cdots,5 \qquad (34)$$

で与えられ, $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_5$ にはそれぞれ球面, コマ, 非点, 像面彎曲, そして歪曲の各収差が対応する. ここで, $\mu=-1/v_a'$ なる関係を用いると

$$\mu=-\frac{t}{n_0 a\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}} \qquad (35)$$

となるので, 各3次収差係数 σ_i は

$$\sigma_1=-\frac{g^2a^3}{2}\left\{\frac{n_0(n_0-1)}{(gt)^2}+\frac{n_0-2}{(gt)^2\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{[1-(gt)^2][1-g^2(a^2+t^2)]}}\right\} \qquad (36)$$
$$\sigma_2=\frac{g^2a^3}{2}\left\{\frac{n_0(n_0-1)}{\sqrt{1-(gt)^2}}+\frac{n_0-2}{\sqrt{[1-(gt)^2][1-g^2(a^2+t^2)]}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}}\right\} \qquad (37)$$
$$\sigma_3=-\frac{g^2a^3}{2}\left\{\frac{n_0(n_0-1)(gt)^2}{1-(gt)^2}+\frac{(n_0-2)(gt)^2}{[1-(gt)^2]\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}}\right.$$
$$\left.+\frac{(gt)^2}{\sqrt{[1-(gt)^2][1-g^2(a^2+t^2)]}}\right\} \qquad (38)$$
$$\sigma_4=\frac{g^2a^3}{2\sqrt{[1-(gt)^2][1-g^2(a^2+t^2)]}} \qquad (39)$$
$$\sigma_5=\frac{g^2a^3}{2}\left\{\frac{n_0(n_0-1)(gt)^4}{[1-(gt)^2]^{3/2}}+\frac{(n_0-1)(gt)^4-(gt)^2}{[1-(gt)^2]^{3/2}\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}}\right.$$
$$-\frac{1}{\sqrt{1-g^2(a^2+t^2)}}\left[\frac{3}{2}(gt)^2-1-\frac{1}{1-(gt)^2}\right.$$
$$\left.\left.+2\sqrt{1-(gt)^2}+\ln\sqrt{1-(gt)^2}\right]\right\} \qquad (40)$$

で与えられることが知られる.

各収差係数について検討すると, まず像面彎曲 σ_4 は, 平板レンズに関する限り除去できず, とくにレンズが薄肉の場合レンズ径に比例することがわかる. したがって, σ_4 を除去するには, たとえば端面にゼロでない曲率を与えて, レンズ設計の自由度を増やすことが必要である. 次に, レンズの中心屈折率 n_0 を $1<n_0<2$ の範囲から選ぶと, 球面 σ_1, コマ σ_2, そして非点 σ_3 に関しては各収差を構成する項の中に異符号のものが現われるため, 除去される可能性があると思われる. また, 歪曲 σ_5 についても同様なことが推察される.

4. まとめ

本文では, 球対称2乗屈折率分布の平板状レンズについて, Sands の不均質レンズの3次収差論を適用し, 球面, コマ, 非点, 像面彎曲, そして歪曲の収差係数を解析的に導出した. 各収差係数には, 中心屈折率 n_0, 集束定数 g, レンズ半径 a, そしてレンズ厚 t が陽に含ま

れているため，各パラメータを適切に組み合わせることによって低収差のレンズ設計が可能になると思われる．

また，屈折率分布式(1)のもっと一般的な場合，すなわち屈折率分布が

$$n^2(\rho)=n_0^2[1-(g\rho)^2+h(g\rho)^4],\qquad \rho^2=r^2+z^2 \quad (41)$$

と表わされる場合の数値的な光線追跡の手法および結果が Kikuchi らによって報告されており[8]，3次収差論を式(41)の場合に適用することも興味深いことであると思われる．筆者らは，式(41)で示される不均質媒質中での近軸光線経路を解析的に導出するとともに，レンズ設計に新たな自由度を与える4次の屈折率分布係数 h の影響について現在検討を進めている．

文　献

1) P. J. Sands : J. Opt. Soc. Am., **60** (1970) 1436.
また，Gupta らは3次収差論を5次の収差論にまで発展させた．詳しくは，A. Gupta, K. Thyagarajan, I. C. Goyal and A. K. Ghatak : J. Opt. Soc. Am , **66** (1976) 1320.
2) D. T. Moore : J. Opt. Soc. Am., **61** (1971) 886.
3) D. T. Moore : J. Opt. Soc. Am., **67** (1977) 1143.
4) 杉元重時，石川　朗，小林功郎：光学，**10** (1981) 128.
5) 伊賀健一，及川正尋：光学，**10** (1981) 414.
6) (2)に関しては，W. Streifer and K. B. Paxton : Appl. Opt., **10** (1971) 769，(3)に関してはたとえば，S. P. Morgan : J. Appl. Phys., **29** (1958) 1358，また平板マイクロレンズに関しては，K. Iga, M. Oikawa and J. Banno : Appl. Opt., **21** (1982) 3451，があり，本文での屈折率分布式(1)を用いると，平行入射光線の経路は
$x(z)=x_i\sqrt{1-(gz)^2/[1-(gx_i^2)]}$，($x_i$ は初期光線高さ)で与えられ，$|gx_i|\ll 1$ とすれば，本文での b 光線の経路と一致する．
7) K. B. Paxton and W. Streifer : Appl. Opt., **10** (1971) 2090.
8) K. Kikuchi, T. Morikawa, J. Shimada and K. Sakurai : Appl. Opt., **20** (1981) 388.
屈折率分布式(41)の記法が異なるが，本質的な相違はない．