



ガウス括弧による内蔵イクステンダーを有するズームレンズの近軸解析*

田 中 一 夫

キャノン(株)中央研究所 〒152 東京都目黒区中根 2-2-1

(1983年9月7日受理)

Paraxial Analysis on Zoom Lens Having Built-in Range Extender by Means of Gaussian Brackets

Kazuo TANAKA

Canon Research Center, Canon Inc.,
2-2-1, Nakane, Meguro-ku, Tokyo 152

1. 緒 言

近年、ズームレンズの焦点距離範囲を簡便に遷移する機能が望まれている。ここで、焦点距離範囲の遷移とは f'_{wide} から f'_{tele} までの連続した焦点距離範囲をもつズームレンズになんらかの手段を付加することで、 mf'_{wide} から mf'_{tele} までの焦点距離範囲に変えることである。

従来から知られている遷移方式として、フロントコンバータ方式¹⁾、リアコンバータ方式²⁾、リレー部交換方式³⁾、そしてダブルズーム方式⁴⁻⁶⁾がある。なお、最近提案されたいくつかの新規な遷移方式を高島⁷⁾が整理している。

本論で紹介する内蔵イクステンダー方式は従来の方式とはまったく異なる原理に基づく構成であり、最終像面位置不動かつ全長不変のまま、焦点距離範囲を遷移させるものである。

近軸理論とは、数学的にいえば射影変換であり、物理的にいえば光軸のごく近傍を進み、かつ各面への入射角のきわめて小さい光線を対象とする理論である。近軸理論は光学系の基本構造を決定するものとして幾何光学における最も重要な理論の一つである。

近軸理論はいままでに、種々の記述の体系化がなされてきた。すなわち、 $Y-\bar{Y}$ 図表⁸⁾、行列法^{9,10)}、雷文図

表¹¹⁾、そしてガウス括弧¹²⁻¹⁵⁾等が従来から知られている。また、最近では、Wigner 関数¹⁶⁻¹⁸⁾、正準演算子¹⁹⁻²¹⁾、Lie 代数²²⁾そして群論²³⁾による近軸光学の表記も検討されている。

本論ではこれらのうち、光学系の近軸特性を記述するのに適した興味ある方法といわれたが、いままで実際問題にはほとんど適用されなかったガウス括弧を取り上げ、その連分数論^{24,25)}に基づく拡張定義を紹介する。

以下、2章において内蔵イクステンダー方式の概略を述べ、3章においてガウス括弧を概説する。そして、4章において内蔵イクステンダーを有するズームレンズの近軸構造のガウス括弧による解析を紹介する。

2. 内蔵イクステンダーを有するズームレンズ

2.1 内蔵イクステンダー方式とは?

図1に内蔵イクステンダーを備えたズームレンズの一例^{26,27)}を示す。

物界側より合焦のため光軸方向に可動なフォーカス部、ズーミングに際して光軸上を互いにある関係を保って移動するバリエータとコンペンセータとから成るズーム部そして常に不動な2群のリレー部で構成される典型的な機械補正式ズームレンズを取り扱う。

内蔵イクステンダー方式とは、2群のリレー部内にある条件を満たすレンズ系(内蔵イクステンダー)を挿入することにより、最終像面位置は不動のまま、ズーミングによる焦点距離範囲を遷移させるものである。

* 本論は光学論文賞受賞記念講演(1983年4月4日、千葉大)を骨子とし、加筆したものである。

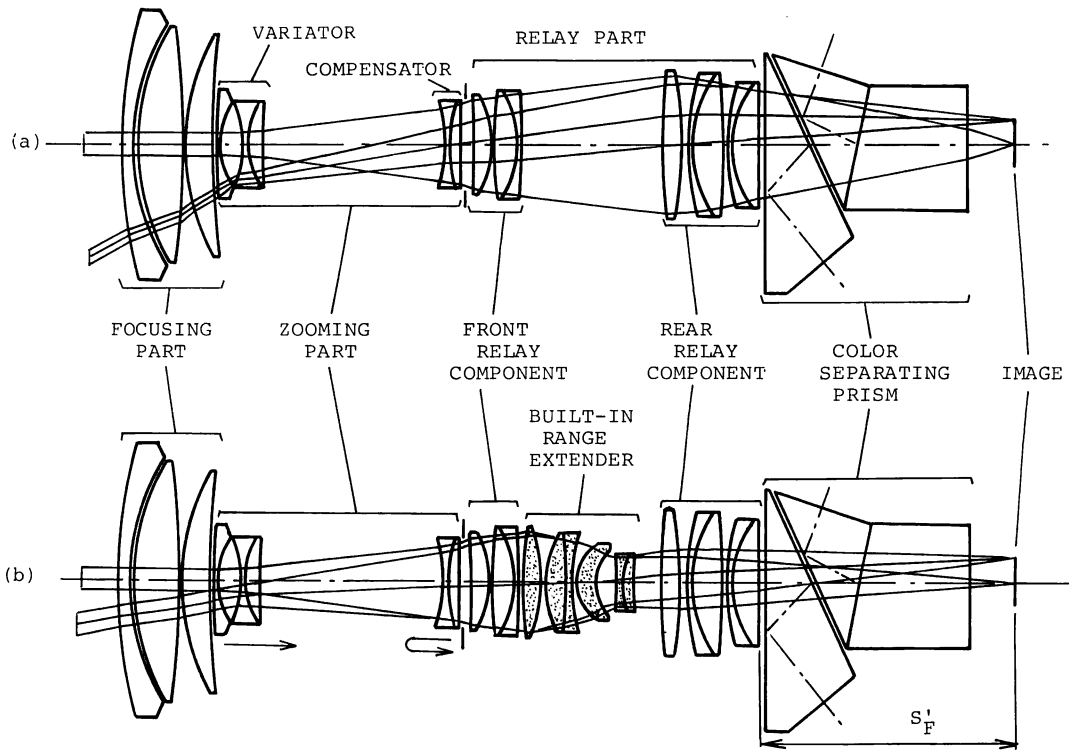


図 1 内蔵イクステンダーを有するズームレンズの一例

(a) 内蔵イクステンダー未装着系

(b) 内蔵イクステンダー装着系

本光学系の焦点距離範囲は未装着系において、15.208~149.273 mm、そして装着系において 37.399~367.131 mm。なお、バックフォーカスは内蔵イクステンダーの有無およびズーム位置にかかわらず 65.602 mm なる一定値。

本例の内蔵イクステンダー未装着系 (図 1 (a)) において、バリエータおよびコンペンセータが移動すると全系焦点距離は 15.21 から 149.27 mm まで連続して変化する。そして、リレー部内に内蔵イクステンダーを装着した系 (図 1 (b)) で同様のズームを行なうと焦点距離範囲は 37.40 から 367.13 mm までとなり、未装着系にくらべて約 2.5 倍ほど長焦点側へ遷移する。なお、内蔵イクステンダーの有無にかかわらず、バックフォーカス s'_F は常に 65.60 mm (in air) と一定値を保つ。

2.2 内蔵イクステンダー方式の基本原則

ここで、内蔵イクステンダーを有するズームレンズの基本原則、すなわち、最終像面位置が不動のままズームによる焦点距離範囲が遷移する方式を述べる。

Hirose²⁸⁾ はズームレンズのリレー部を 2 群とし、さらにフォーカス部、ズーム部そしてリレー前群から成る部分系をアフォーカル系となるよう構成し、リレー前後群の間にアフォーカルコンバータを出し入れすることによる焦点距離範囲の遷移方式を提案した。図 2 にこの構

成を示す。アフォーカル系の組合せであることより、最終像面位置が一定のまま、ズームによる焦点距離範囲の遷移することが容易に理解できよう。

また、Bravais²⁹⁾ は物点と像点との光軸上位置が一致する光学系、いわゆるブラベー系³⁰⁻³²⁾ の存在を導出した。図 3 にブラベー系の一例^{32,33)} を示す。この例で、主レンズ ML の像を物体とする副レンズ SL の像はそれ自身の物体面、換言すれば主レンズの像面と同一位置に作られる。すなわち、副レンズがブラベー系である。このことより、副レンズを主レンズとその像面との間に出入れすることにより、最終像面位置は不動のまま、全系焦点距離が変化する。

内蔵イクステンダー方式は上記 2 種類の光学系を組み合わせたものと理解される。すなわち、全系の小型化および収差補正の自由度追加等のため、近軸的に理解しやすい Hirose のアフォーカル条件をあえて崩し、リレー部内に挿入するレンズ系をブラベー系とするものである。換言すると、フォーカス部、ズーム部およびリレー

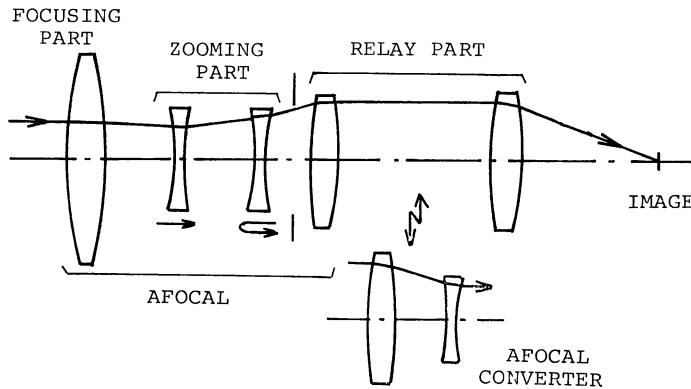


図2 Hiroseの焦点距離範囲遷移方法の基本構成
 フォーカス部、ズーム部そしてリレー前群から構成される部分系および挿入レンズ系はともに無焦点系。
 無焦点系をリレー前後群の間に設けることにより全系の焦点距離範囲を遷移。

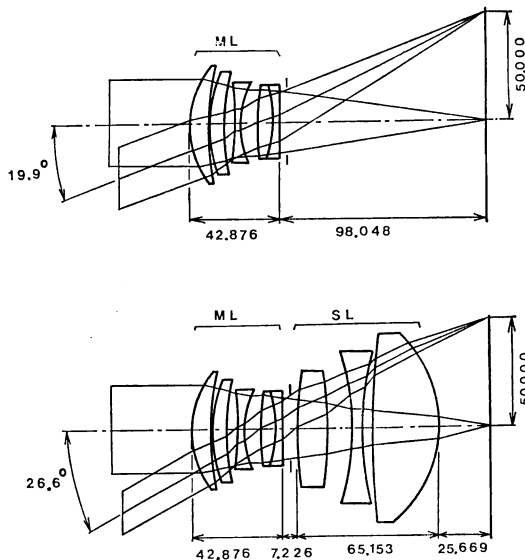


図3 ブラベ-光学系の一例
 MLおよびSLはそれぞれ主レンズおよび副レンズを意味し、SLがブラベ-系を構成。SLをMLとその像面との間に出し入れすることにより、最終像面位置不動のまま、全系焦点距離範囲を変化。なお、SLの屈折力は有限値。

前群から成る部分系の像点、すなわち挿入するレンズ系(内蔵イクステンダー)の物点と、その内蔵イクステンダーによる像点位置が一致するよう構成される。

上記の構成とすることで、内蔵イクステンダー未装着状態でバリエータおよびコンペンセータを移動させて得られる焦点距離範囲に対して、内蔵イクステンダーをリレー部内に挿入した状態で同様のズームングを行なって

得られる焦点距離範囲の遷移が、最終像面位置不動かつ全長不変のまま、達成される。

3. ガウス括弧およびその近軸理論への適用

内蔵イクステンダーを有するズームレンズの理解には、その近軸構造を明らかにする必要がある。

ここで、ガウス括弧を解析手段として採用し、その主要事項を述べる。

3.1 一般化ガウス括弧

まず、Herzberger¹²⁻¹⁵⁾が示したガウス括弧をより一般化し、汎用性を増すために、連分数論^{24,25)}に基づきその定義を次のように拡張する。すなわち、ガウス括弧とは「部分分子がすべて+1なる連分数の第*n*近似分数の分母」と約束する。これによれば、 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j$ を要素とするガウス括弧は

$${}^iG_j \equiv [a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j] = \begin{cases} {}^iG_{j-1}a_j + {}^iG_{j-2}, & i \leq j \\ 1, & i = j+1 \\ 0, & i = j+2 \end{cases} \quad (1)$$

なる漸化式^{34,35)}で与えられる。これを、一般化ガウス括弧 (generalized Gaussian brackets, verallgemeinerte Gaußsche Klammern) と呼ぶことにする*1。

ここで、一般化ガウス括弧に関する二、三の公式を挙げ、連分数論に基づく定義の有用性を示す。まず、一般化ガウス括弧はその任意要素により展開される。すなわち、

$${}^iG_k = {}^iG_{j-1} {}^{j+1}G_k a_j + {}^iG_{j-2} {}^{j+1}G_k + {}^iG_{j-1} {}^{j+2}G_k$$

*1 Bergstein³⁶⁾はこれとは異なる“modified Gaussian brackets”なるものを定義している。

$$i \leq j \leq k \quad (2)$$

これは Herzberger¹⁴⁾ の (B.73) 式に対応するが, Herzberger の公式は $i=j, j=k$ ないし $i=j=k$ の場合は用いられない. また, 一般化ガウス括弧は任意要素で微分できる. すなわち,

$$\frac{\partial}{\partial a_j} {}^i G_k = {}^i G_{j-1} {}^{j+1} G_k \quad i \leq j \leq k \quad (3)$$

これは, Herzberger¹⁴⁾ の (B.71) 式に対応する. ただし, Herzberger の公式は $i=j, j=k$ ないし $i=j=k$ の場合が明確に与えられていない. そして, 一般化ガウス括弧を要素として以下の恒等式が成立する.

$${}^i G_n {}^j G_m - {}^i G_m {}^j G_n = (-1)^{m-j+1} {}^i G_{j-2} {}^{m+2} G_n$$

$$i \leq j \leq m \leq n \quad (4)$$

ここで, $i+1=j$ とすると (4) 式は

$${}^i G_n {}^{i+1} G_m - {}^i G_m {}^{i+1} G_n = (-1)^{m-i} {}^{m+2} G_n \quad (5)$$

となり, Herzberger¹⁴⁾ の (B.78) 式を得る.

以上のように, 一般化ガウス括弧は Herzberger のものを内含し, より汎用性のある形態となっている.

3.2 一般化ガウス定数および近軸理論

次に, 前記の一般化ガウス括弧を用いて近軸理論を構築するため, 一般化ガウス定数なるものを与える. ここで, ϕ_k を第 k 光学要素 (光学系の各面ないし薄肉レンズ) の屈折力, そして e'_k を第 k と第 $(k+1)$ 光学要素との換算間隔とし, これらを光線の遭遇する順に並べた数列

$$\dots, \phi_i, -e'_i, \phi_{i+1}, \dots, -e'_{j-1}, \phi_j, -e'_j, \dots \quad (6)$$

を取り扱う. (6) 式を要素とする一般化ガウス括弧により, 第 i から第 j 光学要素で構成される光学系の一般化ガウス定数を次式^{34, 35)}で定義する*2.

$${}^i A_j = [\phi_i, -e'_i, \phi_{i+1}, \dots, -e'_{j-1}]$$

$$= \begin{cases} -{}^i C_{j-1} e'_{j-1} + {}^i A_{j-1}, & i < j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$${}^i B_j = [-e'_j, \phi_{i+1}, \dots, -e'_{j-1}]$$

$$= \begin{cases} -{}^i D_{j-1} e'_{j-1} + {}^i B_{j-1}, & i < j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

$${}^i C_j = [\phi_i, -e'_i, \phi_{i+1}, \dots, -e'_{j-1}, \phi_j]$$

$$= \begin{cases} {}^i A_j \phi_j + {}^i C_{j-1}, & i \leq j \\ 0, & i = j+1 \end{cases}$$

$${}^i D_j = [-e'_i, \phi_{i+1}, \dots, -e'_{j-1}, \phi_j]$$

$$= \begin{cases} {}^i B_j \phi_j + {}^i D_{j-1}, & i < j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (7)$$

これら四つの一般化ガウス定数 ${}^i A_j, {}^i B_j, {}^i C_j$ および

${}^i D_j$ を介して光学系の共役関係, 主要点, 倍率および Lagrange-Helmholtz 不変量などの近軸諸量が表記される^{38, 39)}.

たとえば, 全系 k 光学要素から成る光学系の第 i から第 j 光学要素までの部分系の屈折力 Φ およびバックフォーカス s'_F はそれぞれ

$$\Phi = {}^i C_j = \sum_{n=i}^j \phi_n {}^n D_j = \sum_{n=i}^j \phi_n {}^i A_n \quad (8)$$

$$s'_F = \frac{{}^i A_j}{{}^i C_j} = \frac{{}^i A_j}{\Phi} \quad (9)$$

また, 前側および後側主点はそれぞれ第 i ないし第 j 光学要素から測って

$$s_p = \frac{1 - {}^i D_j}{{}^i C_j} \quad (10)$$

$$s'_p = \frac{{}^i A_j - 1}{{}^i C_j} \quad (11)$$

そして, 横倍率は

$$\beta_{i,j} = \frac{{}^0 D_{i-1}}{{}^0 D_j} = \frac{{}^i A_{k+1}}{{}^{j+1} A_{k+1}} \quad (12)$$

で与えられる.

一般化ガウス定数で記述された近軸諸量に対して, 種の一般化ガウス括弧の公式を適用することにより, 複雑な光学系の系統だった解析的な近軸検討が可能となる.

なお, 一般化ガウス括弧および一般化ガウス定数は単純な漸化式で与えられるため, 数値計算にも適していることはいうまでもない.

また, 一般化ガウス定数による近軸理論は光学系の構成要素 (屈折力および間隔) のみで近軸諸量が記述される. そのため, 近軸追跡値 (光線高および光線傾角) を用いて近軸諸量を求める理論体系において, 近軸量を与える数式の分母の近軸追跡値がゼロとなる場合, 数式の適用に破綻をきたすが*3, 一般化ガウス定数による近軸理論では, そのようなことはない.

4. 内蔵イクステンダーを有するズームレンズの近軸解析²⁷⁾

前章で与えた一般化ガウス括弧および一般化ガウス定数を用いて, 内蔵イクステンダーを有するズームレンズの近軸構造を明らかにする.

4.1 薄肉系

まず, 図4に示すフォーカス部, ズーム部, リレー部そして内蔵イクステンダー部から構成される薄肉系を考

*2 南³⁷⁾は連分数論を用いることなく, 独自に(7)式と類似したガウス定数を定義している. ここで(7)式との差異は初期値にある.

*3 たとえば, Berek⁴⁰⁾の(29a)式で与えられる δ は光線高がゼロとなる面を含む光学系での使用は不適切である.

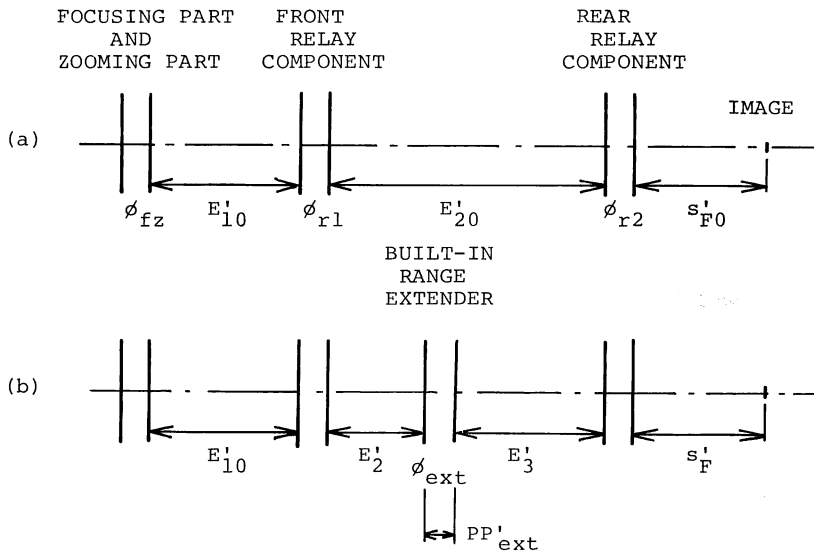


図4 内蔵イクステンダーを有するズームレンズの薄肉レンズ構成モデル
 (a) 内蔵イクステンダー未装着系
 (b) 内蔵イクステンダー装着系

表1 図1に示す内蔵イクステンダーを有するズームレンズの設計例の薄肉レンズ系屈折力配置 (フォーカス部およびズーム部から成る部分系の屈折力は無限遠に合焦し、最短焦点距離にズームした状態の値)

	System without Built-in range extender		System with Built-in range extender	
	Power	Distance	Power	Distance
Sub-system	-1/11.6490	34.2694	-1/11.6490	34.2694
Front relay component	1/64.1245	61.2920	1/64.1245	-104.2362
Built-in range extender	—	—	1/96.9182	81.6224
Rear relay component	1/60.3102	—	1/60.3102	—

える。

内蔵イクステンダー部とそれより物界側に設けられる部分とは近軸的に独立している。そのため、ここでは無限遠に合焦したフォーカス部と任意ズーム状態のズーム部とを一体とした部分系としてリレー部より物界側のレンズ群を取り扱う。各部の屈折力および間隔を意味する記号は図中に示すものとする。

内蔵イクステンダーのリレー部内への挿入に際して、この光学系が満足すべき条件は、まず、全系焦点距離が f'_0 から mf'_0 へ遷移すること

$$1 = [\phi_{fz}, -E'_{10}, \phi_{r1}, -E'_2, \phi_{ext}, -E'_3, \phi_{r2}]mf'_0 \quad (13)$$

バックフォーカスが不変であること

$$\therefore s'_{F0} = s'_F = [\phi_{fz}, -E'_{10}, \phi_{r1}, -E'_2, \phi_{ext}, -E'_3]mf'_0 \quad (14)$$

そして、全長が不変であること

$$\therefore E'_2 + PP'_{ext} + E'_3 = E'_{20} \quad (15)$$

の三つである。ここで内蔵イクステンダー未装着の系、(図4(a))はすでに決定され、かつ、内蔵イクステンダー部の前側と後側主点との間隔 PP'_{ext} を既知として、内蔵イクステンダー一部の屈折力、 ϕ_{ext} 、およびその設置位置、 E'_2 および E'_3 について(13)、(14)および(15)式を解くと次式を得る。

$$\phi_{ext} = \beta / [\phi_{fz}, -E'_{10}, \phi_{r1}, -E'_2] \times [-E'_3, \phi_{r2}]mf'_0 \quad (16)$$

$$E_2 = E'_{20} - PP'_{ext} - \alpha / (\alpha\phi_{r2} - \beta) \quad (17)$$

$$E_3 = \alpha / (\alpha\phi_{r2} - \beta) \quad (18)$$

ただし

$$\alpha = s'_{F0} - [\phi_{fz}, -E'_{10}, \phi_{r1}, (PP'_{ext} - E'_{20})]mf'_0 \quad (19)$$

$$\beta = 1 - [\phi_{fz}, -E'_{10}, \phi_{r1}, (PP'_{ext} - E'_{20}), \phi_{r2}]mf'_0 \quad (20)$$

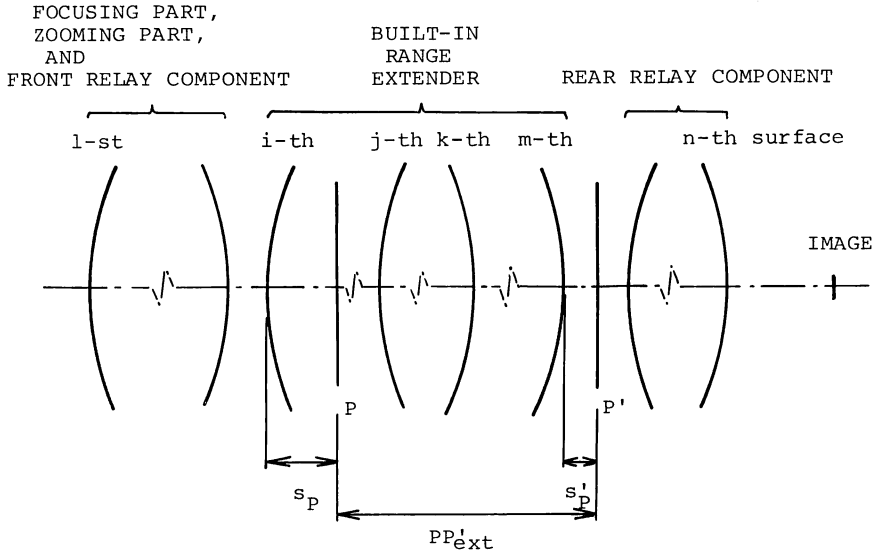


図 5 内蔵イクステンダーを有するズームレンズの厚肉レンズ構成モデル

すなわち、屈折力 ϕ_{ext} 、主点間隔 PP'_{ext} なる内蔵イクステンダーをリレー部内の E'_2 および E'_3 を満たす位置に挿入すると、像面位置不動かつ全長不変のまま、焦点距離が f'_0 から mf'_0 へと遷移する。換言すると、内蔵イクステンダー部がブラベ系となる。

ここで数値例として、図 1 に示した光学系の薄肉系屈折力配置を表 1 に与える。

4.2 厚肉系

次に、図 5 に示す全系 n 面で構成され、そのうちの第 i から第 m 面までの部分系が内蔵イクステンダーである厚肉光学系を取り扱う。

薄肉系の解析で求めた条件は、屈折力が ϕ_{ext} 、そして前後側主点間隔が PP'_{ext} なる値を内蔵イクステンダー部が満足することである。これらを一般化ガウス定数で記すと、それぞれ

$$\phi_{ext} = {}^i C_m \quad (21)$$

$$PP'_{ext} = \sum_{q=i}^{m-1} d'_q + ({}^i A_m + {}^i D_m - 2) / {}^i C_m \quad (22)$$

となる。ただし、 d'_q は面間隔を表す。ここで任意の第 j および第 k 面のベンディングのみ行ない、他の光学系構成要素を変化させることなしに上記条件を達成すると、両面の屈折力は

$$X\phi_k^2 + Y\phi_k + Z = 0 \quad (23)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} X &= I^2, \\ Y &= 2IJ + \phi_{ext} {}^i B_j K - \Psi {}^i A_j I, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Z &= J^2 + \phi_{ext} {}^i A_j L + \phi_{ext} {}^i B_j J - \Psi {}^i A_j \\ &\quad + \{ {}^i A_j \}^2 \\ I &= {}^j B_k {}^k D_m, \\ J &= {}^j D_{k-1} {}^k D_m + {}^j B_k {}^{k+1} C_m, \\ K &= {}^i A_j {}^k B_m + {}^i B_j {}^k D_m, \\ L &= {}^j D_{k-1} {}^k B_m + {}^j B_k {}^{k+1} A_m, \\ \Psi &= (PP'_{ext} - \sum_{q=i}^{m-1} d'_q) \phi_{ext} + 2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

そして

$$\phi_j = (\phi_{ext} - {}^i C_{j-1} {}^j D_m - {}^i A_j {}^{j+1} C_m) / ({}^i A_j {}^j D_m) \quad (25)$$

で与えられる。したがって、 ϕ_j および ϕ_k は一般に 2 根ずつ存在するため、適宜にどちらかを選択する必要がある。なお、一般化ガウス定数の物理的意味を考察することで、第 j と第 k 面とが互いに共役な場合、ないし第 k 面が第 $(k+1)$ 面から第 m 面までの部分系の前側焦点に一致する場合、(23) 式が 1 次式となることがわかる。

このベンディング条件を満足しつつ厚肉設計を行なうことにより、内蔵イクステンダー部の屈折力および主点間隔が所望の値を保ち、その結果、全長不変として像面位置不動のまま、焦点距離範囲の遷移が具現される。

以上の解析に基づく設計例が図 1 に示したものである。

5. 結 言

内蔵イクステンダーを有するズームレンズの基本原理解を述べるとともに、連分数論に基づいて定義した一般化ガウス括弧による近軸理論を紹介した。また、内蔵イク

スタンダーの近軸構造の一般化ガウス括弧による解析を示した。

内蔵イクステンダーに関するより詳細な解析は文献27, 41-44)を通読されたい。

なお、ガウス括弧およびそれによる近軸理論は文献12-15, 34, 35, 38, 39)に詳述されている。また、一般化ガウス定数による光学系の解析は文献27, 32, 41-54)に、南³⁷⁾の与えたガウス定数の光学設計への適用は文献55)に、Herzberger流¹²⁻¹⁵⁾のガウス括弧による光学系の検討は文献56)に、そして Bergstein³⁶⁾の定義した modified Gaussian brackets の光学系への適用は文献57-59)に記載されている。これらも合わせて参照されたい。

内蔵イクステンダー方式という新しい光学系を知っていただくとともに、内蔵イクステンダーを有するズームレンズの解析を一例として、繁雑な光学系の解析的かつ数値的な近軸検討に一般化ガウス括弧が有力な手段であることを理解していただければ幸いである。

また、さらに一般化ガウス括弧による解析方法が広汎な分野に用いられることを期待する。

文 献

- 1) たとえば、辻 定彦：特開昭 55-32046 (1980).
- 2) たとえば、K. Ikemori：US Patent No. 4340279 (1982).
- 3) 山路敬三：キヤノン研究報告，No. 3 (キヤノン，東京，1964) p. 112.
- 4) K. Macher：SMPTE J., **83** (1974) 39.
- 5) K. Macher：Fernseh-Kino-Tech., **28** (1974) 3.
- 6) K. Macher：Fernseh-Kino-Tech., **28** (1974) 52.
- 7) 高島喜一：写真工業，**36**, 13 (1978) 106.
- 8) E. Delano：Appl. Opt., **2** (1963) 1251.
- 9) W. Brouwer：*Matrix Methods in Optical Instrument Design* (Benjamin, New York, 1964) p. 20.
- 10) A. Gerrard and J. M. Burch：*Introduction to Matrix Methods in Optics* (John Wiley, London, 1975) p. 24.
- 11) M. Takeda：J. Opt. Soc. Am., **70** (1980) 236.
- 12) M. Herzberger：J. Opt. Soc. Am., **33** (1943) 651.
- 13) M. Herzberger：J. Opt. Soc. Am., **42** (1952) 637.
- 14) M. Herzberger：*Modern Geometrical Optics* (Interscience, New York, 1958) p. 457.
- 15) H.-G. Zimmer：*Geometrische Optik* (Springer, Berlin, 1967) S. 45.
- 16) M. J. Bastiaans：Opt. Commun., **25** (1978) 26.
- 17) M. J. Bastiaans：Opt. Commun., **30** (1979) 321.
- 18) M. J. Bastiaans：J. Opt. Soc. Am., **69** (1979) 1710.
- 19) M. Nazarathy and J. Shamir：J. Opt. Soc. Am., **72** (1982) 356.
- 20) M. Nazarathy and J. Shamir：J. Opt. Soc. Am., **72** (1982) 1398.
- 21) M. Nazarathy, A. Hardy and J. Shamir：J. Opt. Soc. Am., **72** (1982) 1409.
- 22) A. J. Dragt：J. Opt. Soc. Am., **72** (1982) 372.
- 23) O. N. Stavroudis：*The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics* (Academic, New York, 1972) p. 294.
- 24) O. Perron：*Die Lehre von den Kettenbrüchen* (Teubner, Leipzig, 1913).
- 25) 紫田 寛：連分数論 (岩波書店，東京，1933).
- 26) K. Tanaka：US Patent, No. 4318592 (1982).
- 27) K. Tanaka：Optik, **60** (1982) 209.
- 28) R. Hirose：US Patent, No. 4015895 (1977).
- 29) M. A. Bravais：Ann. Chim. Phys., **33** (1851) 494.
- 30) R. S. Longhurst：*Geometrical and Physical Optics* (Longmans, London, 1962) p. 38.
- 31) R. Kingslake：*Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. 1 (Academic, New York, 1965) p. 226.
- 32) K. Tanaka：Optik, **60** (1981) 73.
- 33) 田中一夫，池森敬二：特開昭 56-111825 (1981).
- 34) K. Tanaka：Optik, **62** (1982) 211.
- 35) K. Tanaka：Optik, **64** (1983) 13.
- 36) L. Bergstein：J. Opt. Soc. Am., **48** (1958) 154.
- 37) 南 節雄：エレクトロオプティクスの基礎 (応用物理学会，東京，1982) p. 12.
- 38) K. Tanaka：Optik, **58** (1981) 351.
- 39) K. Tanaka：Optik, **64** (1983) 89.
- 40) M. Berek：*Grundlagen der praktischen Optik* (Walter de Gruyter, Berlin, 1930) S. 26.
- 41) K. Tanaka：Optik, **61** (1982) 79.
- 42) K. Tanaka：Optik, **61** (1982) 163.
- 43) K. Tanaka and K. Takeshi：Optik, **61** (1982) 365.
- 44) K. Tanaka：Optik, **62** (1982) 15.
- 45) 田中一夫：光学，**6** (1977) 155.
- 46) 田中一夫：光学，**10** (1981) 356.
- 47) 田中一夫：応物，**48** (1979) 950.
- 48) 田中一夫：応物，**49** (1980) 1102.
- 49) K. Tanaka：Opt. Commun., **29** (1979) 138.
- 50) K. Tanaka：Opt. Commun., **43** (1982) 315.
- 51) K. Tanaka：Opt. Commun., **45** (1983) 231.
- 52) K. Tanaka：Appl. Opt., **21** (1982) 2174.
- 53) K. Tanaka：Appl. Opt., **21** (1982) 4045.
- 54) K. Tanaka：Appl. Opt., **22** (1983) 541.
- 55) 南 節雄：光学，**1** (1972) 329.
- 56) R. J. Pegis and W. G. Peck：J. Opt. Soc. Am., **52** (1962) 905.
- 57) L. Bergstein and L. Motz：J. Opt. Soc. Am., **52** (1962) 353.
- 58) L. Bergstein and L. Motz：J. Opt. Soc. Am., **52** (1962) 363.
- 59) L. Bergstein and L. Motz：J. Opt. Soc. Am., **52** (1962) 376.