

## 臨界角近傍でのフレネル反射係数\*

早水 良定

オリンパス光学工業(株) 〒192 八王子市石川町 2951

(1983年8月10日受理)

### On the Fresnel Reflection Formulae in the Proximity of the Critical Angle

Yoshisada HAYAMIZU

Olympus Optical Co., Ltd., 2951, Ishikawa-cho, Hachioji 192

A new calculation formula of the Fresnel reflection coefficients is presented. From this formula, a simplified Fresnel formula in the proximity of the critical angle is easily derived. The simplified formula shows good agreement with the exact Fresnel reflection coefficient.

#### 1. 前 お き

二つの透明かつ均質な媒質の境界面における光の屈折、反射において、透過光の透過率、反射光の反射率については、有名なフレネル (Fresnel) の係数があり、よく用いられている<sup>1)</sup>。この係数は、周知のように、入射角と屈折角のみによって記述され、これらの角の間には、屈折の法則 (スネルの法則) が成り立つので、両媒質の屈折率があたえられれば、入射角のみの関数としてフレネル係数が求められる。Fig. 1 は入射角と、境界面での反射光の強度のグラフであるが、臨界角の近くでは反射率が急げきに増大し、臨界角を越える入射角では100%の反射率となる (当然この場合は屈折率大なる媒質から小なる媒質に入射する場合である)。

上記の臨界角の近傍での反射率の急げきな変化を利用することが考えられているが、たとえば Fig. 2 のように、光ディスク用の光ピックアップに臨界角方式による焦点検出法が提案されている<sup>2)</sup>。この方式の概略は、レーザー光がビームスプリッターで反射され、対物レンズでディスク面にスポットとなって結像し、ディスク面で反射された後、ビームスプリッターを通り、全反射プリズムで反射され、2分割の光検出器に入射する。全反射プリズムの反射面へは平行光線として入射し、かつ入射角がちょうど臨界角になるように設定してある。この状態から、ディスク面が  $d$  だけビーム入射方向に移動する

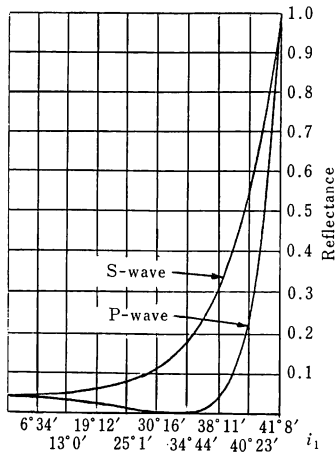
と、ビームスポットの反射像は  $2d$  だけ移動し、焦点はずれとなり、図の状態では対物レンズに近づいたこととなる。このため、対物レンズで屈折された後は、発散光となり、図の上部の光線束では、全反射プリズムの反射面での入射角は臨界角より小となり、反射光の強度は100%より急激に小さくなる。逆に、図における下側の光線束では全反射プリズムの反射面での入射角は臨界角を越えるので、反射率は100%である。したがって、光検出器においては、左側の部分の検出光は暗く、右側では明るくなり、その差を検出すれば、焦点外れの量が測定でき、適当なフィードバックを行ない、対物レンズの焦点をディスク面に設定することができ、いわゆるオートフォーカスが可能となる。もし、ディスク面が対物レンズより遠くなり、 $d$  が  $-d$  となれば、上の状況は逆転し、光検出器の明暗も逆になるので、合焦の正負も検出され、フィードバックの場合の方向を誤ることはない。

以上は、臨界角方式焦点検出の概略である。この場合重要なのは、全反射プリズムへの入射角の変化による反射光強度の変化の関係であるが、フレネルの反射の係数の式そのままでは、見通しが得にくいので、入射角が臨界角に近い場合の反射率の式を導き、かつ、近似式を求めた。

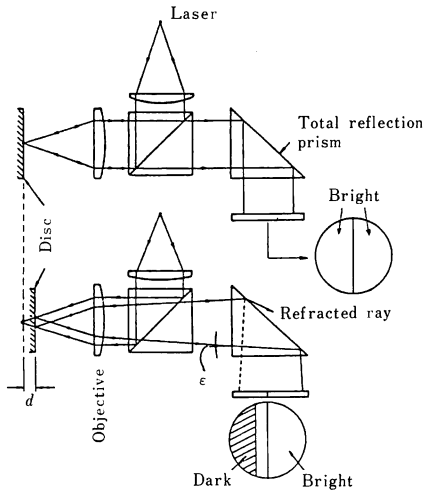
#### 2. $\theta, \delta$ を用いた屈折の法則

入射側と屈折側の屈折率を  $n_1, n_2$  としたとき、入射角、屈折角を  $i_1, i_2$  とすれば、屈折の法則は、

\* 第8回光学シンポジウム (1983年6月20日, 東京) において講演



**Fig. 1** Intensity reflection coefficients.  
 $n_1=1.52, n_2=1.0, i_1$ : Incident angle.



**Fig. 2** Focus detection system by the critical angle method.

$$\sin i_1 = \frac{1}{n} \sin i_2; \quad n = \frac{n_1}{n_2} \quad (1)$$

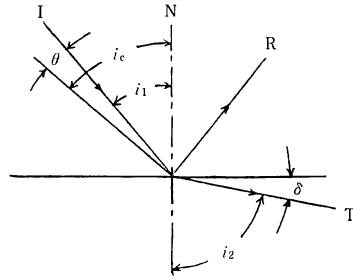
となる。またフレネルの反射係数は、反射光の  $P$  成分および  $S$  成分の振幅を  $r_P, r_S$  とすれば、以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} r_P &= \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} = \frac{\cos i_1 - n \cos i_2}{\cos i_1 + n \cos i_2} \\ r_S &= -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} = \frac{n \cos i_1 - \cos i_2}{n \cos i_1 + \cos i_2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。

$n > 1$  とすれば、臨界角  $i_c$  は

$$\sin i_c = \frac{1}{n} \quad (3)$$



**Fig. 3** Illustration of  $\theta$  and  $\delta$ .  
 $I$ : Incident ray,  $T$ : Refracted ray,  $R$ : Reflected ray,  $N$ : Normal.  
 $i_1$ : Angle of incidence,  $i_2$ : Angle of refraction,  $i_c$ : Critical angle.

$i_1 \geq i_c$  で、 $r_P^2, r_S^2$  とともに 1.0 となり、全反射となるが、 $i_1 < i_c$  でかつ、 $i_1 \approx i_c$  の場合の  $r_P^2, r_S^2$  を求めるには、(2)式をそのまま用いるよりも、 $i_1 = i_c$  で  $i_2 = \pi/2$  となる点に着目し、次のような新しい角を用いて、(1), (2)式を書き改めた方がよい。すなわち **Fig. 3** のように、 $I, T, R$  を入射光線、屈折光線、反射光線とし、入射角  $i_1$ 、屈折角  $i_2$  の代わりに、以下のような、新しい角  $\theta, \delta$  を定義し、これを用いて(1), (2)式を求めるわけである。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= i_c - i_1; \quad i_1 = i_c - \theta \\ \delta &= \frac{\pi}{2} - i_2; \quad i_2 = \frac{\pi}{2} - \delta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(1)式に(4)式を代入すると

$$\sin(i_c - \theta) = \frac{1}{n} \cos \delta \quad (5)$$

$$\therefore i_c - \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n} \cos \delta\right)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin\left\{i_c - \sin^{-1}\left(\frac{1}{n} \cos \delta\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} &= \sin i_c \cos\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{n} \cos \delta\right)\right\} \\ &\quad - \cos i_c \sin\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{n} \cos \delta\right)\right\} \\ &= \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \delta}{n^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \cos \delta \\ &= \frac{1}{n^2} (\sqrt{n^2 - \cos^2 \delta} - \sqrt{n^2 - 1} \cos \delta) \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n^2 - \cos^2 \delta) - (n^2 - 1) \cos^2 \delta}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \delta} + \sqrt{n^2 - 1} \cos \delta} \end{aligned}$$

ゆえに屈折の法則は

$$\sin \theta = \frac{\sin^2 \delta}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \delta} + \sqrt{n^2 - 1} \cos \delta} \quad (6)$$

以上とは逆に、 $\delta$  を  $\theta$  で表わした形にすると、(5)式より

$$\frac{1}{n} \cos \delta = \frac{1}{n} \cos \theta - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \theta}$$

$$\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}; \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

したがって、屈折の法則は

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - 1} \sin \theta \quad (7)$$

と表わすこともできる。(7)式で、 $\delta^3, \theta \sqrt{\theta}$  以上の項を省略して、 $\delta$  の近似式を求めると、

$$\delta \doteq \sqrt{2} (n^2 - 1)^{1/4} \sqrt{\theta} \quad (8)$$

となる。(6)式から  $\theta \sqrt{\theta}$  以上の項を省略しても、(8)式の近似式が得られる。(8)式においては、 $\delta$  を  $\sqrt{\theta}$  のべき級数と考えたとき、 $(\sqrt{\theta})^2 = \theta$  に相当する項がないわけである。

### 3. $\theta, \delta$ を用いたフレネルの反射係数

#### (1) 振幅反射率

屈折の法則と同様に、 $i_1, i_2$  の代りに  $\theta, \delta$  を用いて、フレネルの反射係数として、振幅反射率  $r_P, r_S$  を求める。(1)式より

$$\sin i_1 = \frac{1}{n} \sin i_2 = \frac{1}{n} \cos \delta$$

$$\therefore \cos i_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \cos^2 \delta}$$

$$\sin i_2 = \cos \delta$$

$$\therefore \cos i_2 = \sin \delta$$

となり、これを(2)式の最右辺に代入して

$$r_P = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \delta} - n^2 \sin \delta}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \delta} + n^2 \sin \delta} \quad (9)$$

$$r_S = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \delta} - \sin \delta}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \delta} + \sin \delta} \quad (10)$$

となる。

#### (2) 反射光強度

反射光の強度は、振幅の2乗であり、 $r_P^2, r_S^2$  となるが、たとえば光ディスクの臨界角方式では、2回以上反射させる場合があるので、 $m$  回反射の場合の反射光強度を  $R_P^m, R_S^m$  とすると

$$P \text{成分: } R_P^m = (r_P^2)^m = (r_P)^{2m}$$

$$S \text{成分: } R_S^m = (r_S^2)^m = (r_S)^{2m}$$

となる。 $R_P^m, R_S^m$  は臨界角近傍では1に近い値であり、かつ、 $i_1$  あるいは  $\theta$  に対し急激に変化するから、 $R_P^m, R_S^m$  を直接に求めず、1よりの差として表わしたほうが

よい。すなわち

$$P_m = 1 - R_P^m \quad \therefore R_P^m = 1 - P_m \quad (11)$$

$$S_m = 1 - R_S^m \quad \therefore R_S^m = 1 - S_m \quad (12)$$

として、 $P_m, S_m$  を求め、これから  $R_P^m, R_S^m$  を求める。

$P_m, S_m$  は、(9), (10)式より  $2m = k$  として、次の形の式となる。

$$a = 1 - \frac{(x-y)^k}{(x+y)^k} \quad (13)$$

また、 $\delta \ll 1$  であるので、 $x \gg y$  であり、(13)式を  $y/x$  で展開し、 $(y/x)^3$  以上の項を無視して、近似式を求めると。

#### (3) 反射光強度の近似式

(13)式の近似式は

$$(x+y)^k \doteq x^k \left\{ 1 + k \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{k(k-1)}{2} \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right\}$$

$$(x-y)^k \doteq x^k \left\{ 1 - k \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{k(k-1)}{2} \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right\}$$

$$(x+y)^{-k} \doteq x^{-k} \left\{ 1 - k \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{k(k+1)}{2} \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right\}$$

となることを考慮すれば

$$a = \{(x+y)^k - (x-y)^k\} (x+y)^{-k}$$

$$\doteq 2k \left( \frac{y}{x} \right) \left\{ 1 - k \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{k(k+1)}{2} \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right\}$$

$$\therefore a \doteq 2k \left( \frac{y}{x} \right) - 2k^2 \left( \frac{y}{x} \right)^2$$

(9), (10)式より

$$P \text{成分: } x = \sqrt{n^2 - \cos^2 \delta} \doteq \sqrt{n^2 - 1};$$

$$y = n^2 \sin \delta \doteq n^2 \delta$$

$$S \text{成分: } x \doteq \sqrt{n^2 - 1}; y = \sin \delta \doteq \delta$$

さらに、(8)式の近似式を用いて、 $k = 2m$  として、 $P_m, S_m$  に対して、次の近似式を得る。

$$P_m = 4\sqrt{2} n^2 (n^2 - 1)^{-1/4} m \sqrt{\theta} - 16n^4 (n^2 - 1)^{-1/2} m^2 \theta \quad (14)$$

$$S_m = 4\sqrt{2} (n^2 - 1)^{-1/4} m \sqrt{\theta} - 16(n^2 - 1)^{-1/2} m^2 \theta \quad (15)$$

$$\left. \begin{array}{l} P \text{成分: } R_P^m = 1 - P_m \\ S \text{成分: } R_S^m = 1 - S_m \end{array} \right\} m \text{回反射後の強度}$$

以上の  $R_P^m, R_S^m, P_m, S_m$  の関係を図示すると、Fig. 4 のようになる。

### 4. 近似式の検討結果と考察

以上のフレネルの反射係数の近似式と、原式とを比較計算したのが Table 1 である。 $n_1 = 1.51032, n_2 = 1$  として1回反射 ( $m = 1$ ) の場合で、原式の  $P, S$  成分反射強度率を  $R_{P0}, R_{S0}$  とし、近似式による値を  $R_P, R_S$  と

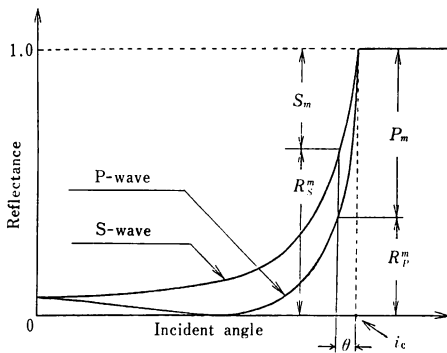


Fig. 4 Illustration of  $R_S^m$ ,  $S_m$ ,  $R_P^m$ ,  $P_m$ .

Table 1 Comparison of the Fresnel reflection coefficient calculated from Fresnel formula with that from simplified formula.

$\theta$ (min)	$R_{S_0}^1$	$R_S^1$	$R_{P_0}^1$	$R_P^1$
1.2	0.906	0.905	0.799	0.797
2.4	0.869	0.869	0.731	0.725
3.6	0.843	0.842	0.685	0.675
4.8	0.821	0.820	0.649	0.635
6.0	0.803	0.801	0.622	0.601
7.2	0.786	0.784	0.599	0.573
8.4	0.772	0.769	0.580	0.547
9.6	0.758	0.755	0.564	0.525
10.8	0.746	0.743	0.551	0.504
12.0	0.735	0.731	0.540	0.486

している。表からわかるように、近似式の計算精度は  $S$  成分はよいが  $P$  成分ではやや悪い。これは  $P$  成分が急激な変化を示すためであり、 $P, S$  とともにほぼ同じ値を示す場合には、誤差もほぼ同じである。たとえば  $\theta=12$  分では  $R_{S_0}^1=0.735$ ,  $R_S^1=0.731$  であり、 $\theta=2.4$  分では  $R_{P_0}^1=0.731$ ,  $R_P^1=0.725$  であり、ほぼ同じ計算の精度となっている。 $\theta=120$  秒では  $P$  成分は  $R_P^1$  で 0.54 となり、約半分の反射強度になってしまうので、 $\theta$  の実用的な値としては、6 分以下で用いるのが望ましいといえよう。この場合には誤差も 3% 以下となり、近似式も多く

の場合実用的に十分な精度であると考えてよい。

以上のような  $P$  成分と  $S$  成分の反射率の差異は、(14), (15) 式が示すように、材質の屈折率  $n$  の 2 乗が  $P$  成分で係数となっているからである。したがって、臨界角方式を用いるとすれば、 $P$  成分を用い、かつ、臨界角プリズムの屈折率を高めると感度がよくなる。また、反射回数  $m$  に比例して感度が向上する。

(14), (15) 式は屈折率  $n$  によってきまるので、1 回反射とし、 $n_2=1$  とし、 $n_1=1.5$  および  $n_1=1.7$  としたときの近似式を求めると以下ようになる。

i)  $n_1=1.5$  の場合

$$P_1 = 12.04\sqrt{\theta} - 72.45\theta$$

$$S_1 = 5.35\sqrt{\theta} - 14.31\theta$$

ii)  $n_1=1.7$  の場合

$$P_1 = 13.94\sqrt{\theta} - 97.20\theta$$

$$S_1 = 4.825\sqrt{\theta} - 11.64\theta$$

上式より、たとえば  $\theta=20$  秒  $\approx 0.0001$  では  $\sqrt{\theta}=0.01$  となり、 $n_1=1.7$  の  $P_1$  の値は約 0.13、また、第 2 項を無視したときの  $P_1$  は約 0.14 となり、誤差は小さい。したがって、 $\theta$  がこの程度に小さければ、 $\sqrt{\theta}$  の項のみで近似値を求めても、大きな誤りはない。

### 5. 結 言

臨界角に近い入射角の場合のフレネルの反射係数を、臨界角と入射角の差の角によって表示する式を求め、さらに、これの近似式を求め、かつ、近似式の精度を検討した。臨界角と入射角との差の角が小さければ (数十秒以内) ならば、十分に精度が得られる。

なお、本稿に対し、有意義な助言をいただいたオリンパス光学の平昭夫課長に感謝の意を表する。

### 文 献

- 1) M. Born and E. Wolf: *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1970) p. 40.
- 2) 武者 徹, 伊藤憲一, 芝田 勉: 光学, 11(1982) 634.