

## 不遊条件と OTF の計算

渋谷 真人

日本光学工業(株)光学部 〒140 東京都品川区西大井 1-6-3

(1983年8月20日受理)

### The Aplanatic Condition and OTF Calculation

Masato SHIBUYA

Optical Designing Department, Nippon Kogaku K. K.,  
1-6-3, Nishi-Ohi, Shinagawa-ku, Tokyo 140

The aplanatic condition for an off-axis object point is already deduced, but it is applicable only when the optical system has no distortion and the angle which the entrance principal ray makes with the optical axis is equal to the angle between the exit principal ray and the optical axis. So, first of all, it has been done to improve the condition to be more general. Next, in order to make clear the meaning of the aplanatic condition in OTF calculation, the wave optical implication of the condition has been considered. After that, the general equation for OTF, ATF and TCC (Transmission Cross Coefficient) calculations has been derived by using the above result. Consequently, it has been found that OTF, ATF and TCC calculations for an on-axis object point and those for an off-axis object point can be unified fundamentally. At last, some considerations related to the above discussion have been given.

#### 1. はじめに

軸外物点の不遊条件についてはすでに求められているが<sup>1)</sup>, 近軸倍率を軸外においても適用している点, および主光線として入射傾角と射出傾角の等しい光線を選んでいる点において, 実際の光学系に適用するには不十分である。それゆえ, これらの点の改良を試み, より一般化された, 実際の光学系に適用しやすい不遊条件式を導いた。

また, 線形フィルタとしての OTF が意味をもつのは, 結像がアイソプラナチックな場合に限られる。アイソプラナチックな条件を OTF の計算において考慮することは, Hopkins<sup>2)</sup> や松居らの方法<sup>3)</sup> のように, 座標のとり方に注意を払うことにより達成することができる。収差のよく補正された光学系では, 上で求めた不遊条件がほぼ成立していると思われる。そこで, 本論文では不遊条件の波動光学的意味を考慮し, OTF 計算における不遊条件の意義を明確にして, 結像および OTF 計算の一般式を導いた。そして, インコヒーレント照明における OTF, コヒーレント照明における ATF, および部

分的コヒーレント照明における相互透過係数 (transmission cross coefficient) について検討した結果, 従来の多くの計算方法と異なり, 像点が光学系の光軸上にある場合と, 光軸外にある場合とで, 基本的には区別することなく計算できることが示された。これは, 軸外物点の場合は, 軸上物点で瞳 (絞り) が偏心した場合に対応すると考えられる。

Hopkins<sup>2)</sup> は入射瞳と射出瞳に着目しているが, 本方法の軸外物点の不遊条件式では, 主表面<sup>1)</sup> に着目している。そして, Hopkins は瞳と光軸の交点を通る主光線と, そのメリディオナル方向の近接光線とサジッタル方向の近接光線を考えているが, 本方法では物体と像との結像関係だけを考えればよく, また主光線のとり方に制限がなく, より実用的と思われる。また, 松居らの方法<sup>3)</sup> は有限物体についても適用可能であるが, 入射接平面を瞳座標にとれるという有利性のため, 無限遠物点についておもに検討している。本論文では, 物体の輝度特性に注意を払う必要はあるが, 有限物点と無限物点との区別なく検討した。

ところで, 回折場の相反定理を光学系に適用すると,

OTF の位相部分の符号が反転するが、物体から像への OTF と、像から物体への OTF とは一致しなくてはならない。従来、その観点から OTF 計算を吟味することはありませんでした。従来、その観点から OTF 計算を吟味することはありませんでした。本方法によるインコヒーレント OTF について、輝度特性に注意して検討したところよく一致した。

アイソプラチックな条件を OTF の計算において考慮することは座標のとり方によって達成されるが、このことは像面のとり方も制限する。従来の OTF 計算方法のうち、像面を主光線に垂直にとる方法について検討したが、光軸と垂直な平面について収差補正がなされている光学系ではこのような方法は矛盾を含むと考えられる。

最後に、軸上と軸外とで解像限界(カットオフ周波数)が等しい歪曲収差のない光学系において、解像限界の等しさから要請される瞳の収差は、一般的な瞳の収差の関係式<sup>5)</sup>、および 3 次収差論と矛盾しないことがわかった。

## 2. 軸外物点に対する不遊条件式

Fig. 1 のような光学系を考える。物平面、像平面は光軸に垂直とする。入射光線および射出光線の X 方向余弦を  $\mu_x$  および  $\mu'_x$  とする。B が B' に無収差に結像しているとき、B の近傍の点  $\bar{B}$  も鮮鋭に結像するためには、B から出でるすべての光線(スキュー光線を含む)について、cosine-law<sup>6)</sup> より次式が成立することが必要である(必要十分条件である)。

$$n'\mu'_x\delta X' - n\mu_x\delta X = \text{constant} \quad (1)$$

ここで  $n$  は物界側屈折率、 $n'$  は像界側屈折率、 $\delta X$  は B から  $\bar{B}$  への微小距離、 $\delta X'$  は B' から  $\bar{B}'$  への微小距離である。いま、メリディオナル面内の一つの光線を主光線とし、入射傾角(光軸と入射光線のなす角)  $\omega$ 、射出傾角(光軸と射出光線のなす角)  $\omega'$  とする。主光線の X 方向余弦は、

$$\mu_x = \sin \omega, \quad \mu'_x = \sin \omega'$$

となり、これを(1)式に代入すると、

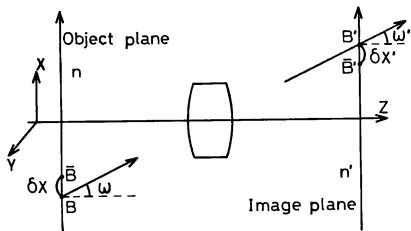


Fig. 1 Optical system.

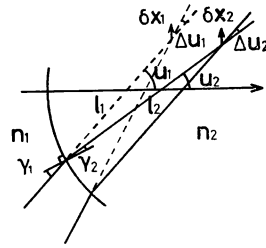


Fig. 2 Refraction through a surface.

$$n' \sin \omega' \delta X' - n \sin \omega \delta X = \text{constant} \quad (2)$$

となる。(1)式、(2)式より

$$n'(\mu'_x - \sin \omega') \delta X' = n(\mu_x - \sin \omega) \delta X$$

となる。主光線近傍の X 方向の倍率を  $\beta_M$  とすると

$$\beta_M = \frac{\delta X'}{\delta X}$$

となり、

$$\frac{n'}{n} \beta_M = \frac{\mu_x - \sin \omega}{\mu'_x - \sin \omega'} \quad (3)$$

となる。これが不遊条件式である。

ここで、主光線がメリディオナル面内にある場合、 $\beta_M$  は M 像点(子午的焦点)の追跡の過程に Helmholtz-Lagrange の不変量を考えて、以下のように計算することができる。Fig. 2 で示されるような一つの面での屈折を考えると、Helmholtz-Lagrange の不変量より、 $n_1$  を屈折面の前側の屈折率、 $n_2$  を後側の屈折率、 $u_1$  を入射主光線の傾角、 $u_2$  を屈折主光線の傾角、 $\Delta u_1$  を入射主光線と、子午的焦点で交わる近接光線との微小開き角、 $\Delta u_2$  を射出主光線と近接光線の微小開き角、 $\delta X_1$  を屈折前の微小像高、 $\delta X_2$  を屈折後の微小像高として、

$$n_1 \cos u_1 \Delta u_1 \delta X_1 = n_2 \cos u_2 \Delta u_2 \delta X_2 \quad (4)$$

となり、Fig. 2 より  $\gamma_1, \gamma_2$  を入射主光線および射出主光線が屈折面の法線となす角、 $l_1, l_2$  を子午的焦点と屈折点との距離として、

$$\frac{l_1 \Delta u_1}{\cos \gamma_1} = \frac{l_2 \Delta u_2}{\cos \gamma_2} \quad (5)$$

となるので、(4)式と(5)式より各面での屈折における  $\beta_M$  は、

$$\beta_M = \frac{n_1 \cos u_1}{n_2 \cos u_2} \cdot \frac{l_2 \cos \gamma_1}{l_1 \cos \gamma_2} \quad (6)$$

として求まる。

(3)式は小穴<sup>1)</sup>による結果に一致するが、そこでは近軸倍率を軸外物点の結像にまで適用し、また主光線として  $\omega = \omega'$  なるものをとくに選んでいる。そのため、歪

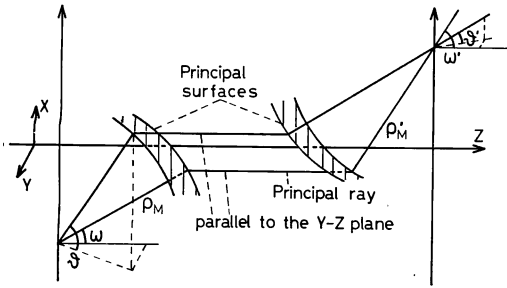


Fig. 3 Geometrical relation between principal surfaces and rays.

曲収差のある場合および  $\omega' = \omega$  なる光線の存在しない場合には適用できない。その点、本論文の不遊条件式では制限がなく、より一般性をもつ。

(3)式をみると、両側テレセントリックの場合を除けば、Fig. 3で示される幾何学的関係を満たしていることがわかる。図の球面は、主表面 (principal surface) と呼ばれる<sup>1)</sup>。  $\rho_M, \rho'_M$  は主表面の半径であり、球面が中心の左側にあるとき正とする。ここで、

$$\rho'_M = \frac{n'}{n} \beta_M \rho_M \quad (\text{Fig. 3 では } \rho'_M > 0, \rho_M < 0)$$

$$\mu_x = \sin \theta$$

$$\mu'_x = \sin \theta'$$

$$X'_0 - X_0 = \rho'_M \sin \omega' - \rho_M \sin \omega$$

であり、 $\rho_M, \rho'_M$  を用いると、(3)式は、

$$\frac{\rho'_M}{\rho_M} = \frac{\mu_x - \sin \omega}{\mu'_x - \sin \omega'} \quad (7)$$

となる。Fig. 3 および (3) 式、(7) 式の関係は、メリディオナル面内の光線に限らず、一般のスキュー光線について成立する。両側テレセントリックの場合には、 $\rho'_M, \rho_M$  は一意的には決まらないので、 $\rho_M = 1$  と与えることにする。両側テレセントリックの場合の様子を Fig. 4 に示す。

以上は、点Bからメリディオナル方向に微小変位した点B'について考えた。サジッタル方向に微小変位した場合には、光学系が回転対称である限りアイソプラナチックであり、軸外物点の不遊条件としてはメリディオナ

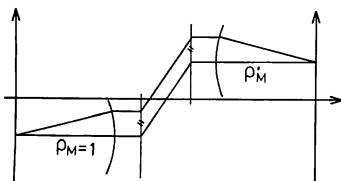


Fig. 4 Principal surfaces for the telecentric system in the meridional plane.

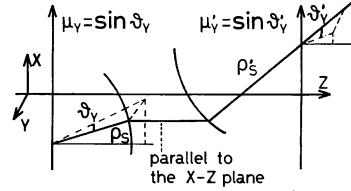


Fig. 5 Relations between  $\rho_s, \rho'_s, \mu_y,$  and  $\mu'_y$ . Principal surfaces for the sagittal image shift.

ル方向の微小変位について考えれば十分である。しかし、入射光線および射出光線の Y 方向余弦について、cosine-law より関係を導くことができる。主光線はメリディオナル面内にあるとし、入射光線の Y 方向余弦を  $\mu_y$ 、射出光線の Y 方向余弦を  $\mu'_y$ 、サジッタル方向の倍率を  $\beta_s$  とおくと、

$$\frac{n'}{n} \beta_s = \frac{\mu_y}{\mu'_y} \quad (8)$$

となる。ここで  $\beta_s$  は、物体の高さを  $X_0$ 、像の高さを  $X'_0$  とすれば、

$$\beta_s = \frac{X'_0}{X_0}$$

と表わされる。この場合も、主表面を考えることができるが、主表面半径を一意的に決めることはできない。そこで、物体側の主表面の半径  $\rho_s$  について、

$$\rho_s = \rho_M$$

と決めることにする。像側の主表面の半径  $\rho'_s$  は、

$$\rho'_s = \frac{n'}{n} \cdot \beta_s \cdot \rho_s$$

であり、

$$\rho'_s \mu'_y = \rho_s \mu_y$$

となる。 $\rho_s, \rho'_s, \mu_y, \mu'_y$  の関係を Fig. 5 に示す。

整理しておく、一般には主表面は物体側、像側とも二つ存在し、それらは物点および像点を中心とする球面である。しかし、 $\rho_s$  については任意性が残っているので、 $\rho_s = \rho_M$  とし、物体側での主表面は一つになるように決める。Fig. 3 および Fig. 5 よりわかるように、主表面間では、光線は、光軸に平行なものとして考えることができる。

### 3. 不遊条件式の波動光学的意味

物体による回折波 (これは物体の複素振幅透過率のフーリエ成分に関係する) によって不遊条件式を導出する。

簡単のため、メリディオナル面内で考える。格子物体を入射角  $\omega$  の平行光線で照明し、1 次の回折光の射出

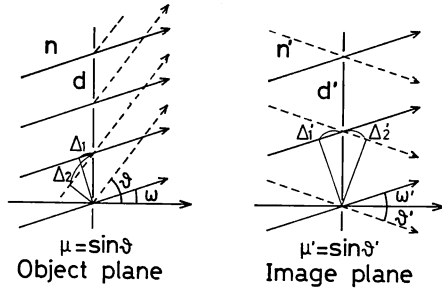


Fig. 6 Diffracted light from the object to the image.

角を  $\theta$  とする。0 次光と 1 次光による結像を考え、像平面における角度を  $\omega'$ ,  $\theta'$  とする。像側では一般に球面波となるが、微小部分に関しては平面波と近似できる。

Fig. 6 からわかるように、 $\lambda$  を波長、 $d$ ,  $d'$  を格子間隔とすると、 $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta'_1$ ,  $\Delta'_2$  を図のようにとれば、

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 - \Delta_1 &= d \cdot \mu - d \sin \omega = \frac{\lambda}{n} \\ \Delta'_2 - \Delta'_1 &= d' \cdot \mu' - d' \sin \omega' = \frac{\lambda}{n'} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

0 次光と 1 次光による結像倍率が主光線近傍の倍率  $\beta_M$  に等しいとすれば、(9)式より

$$\beta_M = \frac{d'}{d} = \frac{n(\mu - \sin \omega)}{n'(\mu' - \sin \omega)}$$

$$\frac{n'}{n} \beta_M = \frac{\mu - \sin \omega}{\mu' - \sin \omega'}$$

となる。これは 1 節(3)式の結果と一致する。

(9)式より物体の振幅透過率の空間周波数は、回折光の射出角の正弦と 0 次光の射出角の正弦の差、に比例するのであって 0 次光と回折光のなす角の正弦に比例するわけではない。1 次の回折波と 2 次の回折波による結像、0 次の回折波と 2 次の回折波による結像なども同様である。

ここでは、コヒーレントに照明された場合について考えたが、部分的コヒーレント、インコヒーレントに照明された場合には、光源の各部分からの照明について、回折光が(3)式の関係を満たすことになる。メリディオナル面内で考えたが、一般のスキュー光線についても同様のことがいえる。ここでの考え方は、基本的には、Abbe の再回折光学の理論と同じと思われる。

#### 4. 結像および OTF 計算の一般式

OTF が意味をもつのは、結像がアイソプラナチックな場合に限る。3 節で述べた、物体による光の回折と不遊条件の関係をもとに、結像の一般式を整理する。簡単

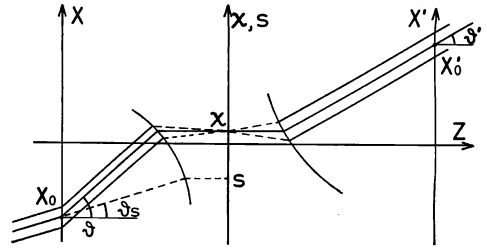


Fig. 7 Illuminating light and diffracted light.

のためメリディオナル面内で考え、照明光、回折光の様子を Fig. 7 に図示する。X を物体の座標、X' を像の座標とする。X<sub>0</sub> を物体の高さ、X'<sub>0</sub> を像の高さとする。θ<sub>s</sub> を照明光が光軸となす角度、θ を回折光が光軸となす角度、θ' を回折光が光学系を通過した後に光軸となす角度とする。ρ<sub>M</sub>, ρ'<sub>M</sub> は Fig. 3 で示される量であり、x, s は次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} x &= -\rho_M \sin \theta + X_0 \\ s &= -\rho_M \sin \theta_s + X_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、x, s の座標軸の位置を擬似瞳面とよぶことにする。簡単のため、物体側、像側とも屈折率を 1 とし、光の波長を λ とする。物体の複素振幅透過率を O(X) とすると、周期 d のフーリエ成分は  $\nu = 1/d$  と定義して、

$$\tilde{O}(\nu) = \tilde{O}\left(\frac{1}{d}\right) = \int \exp\left[+i2\pi \frac{1}{d} X\right] O(X) dX \quad (11)$$

と表わすことができる。3 節の議論からわかるように、照明光と回折光の光軸となす角度について次式が成立する。

$$\sin \theta - \sin \theta_s = \frac{\lambda}{d} = \lambda \nu \quad (12)$$

不遊条件式(7)式より、

$$\rho_M (\sin \theta - \sin \omega) = \rho'_M (\sin \theta' - \sin \omega')$$

となり

$$\sin \theta' = \frac{\rho_M}{\rho'_M} \{ \sin \theta - \sin \omega \} + \sin \omega' \quad (13)$$

が成立する。

いま、新しい量  $\bar{X}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{s}$  を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &\equiv -X/\rho_M \cdot \lambda \\ \bar{x} &\equiv -x/\rho_M \cdot \lambda = \frac{\sin \theta}{\lambda} - \bar{X}_0 \\ \bar{s} &\equiv -s/\rho_M \cdot \lambda = \frac{\sin \theta_s}{\lambda} - \bar{X}_0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(12)式、(13)式、(14)式より、

$$\bar{x} - \bar{s} = \nu \quad (15)$$

$$\sin \theta' = \frac{\rho_M}{\rho'_M} \lambda (\nu + \bar{s} + \bar{X}_0) - \frac{\rho_M}{\rho'_M} \sin \omega + \sin \omega' \quad (16)$$

が得られる. 空間周波数  $1/d=\nu$  の回折波による像面上の振幅の大きさが  $\tilde{O}(\nu)$  に比例するならば, 像面上の振幅  $P$  は, **Fig. 7** からわかるように比例定数を  $C_1$  として,

$$\begin{aligned} P(X', \nu, \bar{s}) &= C_1 \exp \left[ i2\pi \frac{\sin \theta'}{\lambda} (X' - X'_0) \right] \tilde{O}(\nu) G(\bar{x}) \\ &= C_1 \exp \left[ i2\pi \left\{ \frac{1}{\beta_M} (\nu + \bar{s} + \bar{X}_0) - \frac{1}{\beta_M} \frac{\sin \omega}{\lambda} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin \omega'}{\lambda} \right\} (X - X'_0) \right] \cdot \tilde{O}(\nu) \cdot G(\nu + \bar{s}) \end{aligned} \quad (17)$$

となる.

ここで,  $G(\bar{x})$  は瞳関数であり, 絞りによって回折光が遮断されるとき  $G(\bar{x})=0$  となる. インコヒーレントな準単色等価光源  $S_E(\bar{s})$  を考えると, 像の強度  $I$  は比例定数を  $C_2$  として,

$$\begin{aligned} I(X') &= \int d\bar{s} \iint d\nu_1 d\nu_2 S_E(\bar{s}) P(X', \nu_1, \bar{s}) P^*(X', \nu_2, \bar{s}) \\ &= C_2 \int d\bar{s} \iint d\nu_1 d\nu_2 S_E(\bar{s}) \tilde{O}(\nu_1) \tilde{O}^*(\nu_2) \\ &\quad \times G(\nu_1 + \bar{s}) G^*(\nu_2 + \bar{s}) \exp \left[ i2\pi \frac{1}{\beta_M} (\nu_1 - \nu_2)(X' - X'_0) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

となる. ここで\*は複素共役を意味する. 相互透過係数  $R(\nu_1, \nu_2)$  を

$$R(\nu_1, \nu_2) = \int S_E(\bar{s}) G(\nu_1 + \bar{s}) G^*(\nu_2 + \bar{s}) d\bar{s} \quad (19)$$

とおけば

$$\begin{aligned} I(X') &= C_2 \iint \tilde{O}(\nu_1) \tilde{O}^*(\nu_2) R(\nu_1, \nu_2) \\ &\quad \times \exp \left[ i \frac{2\pi}{\beta_M} (\nu_1 - \nu_2)(X' - X'_0) \right] d\nu_1 d\nu_2 \end{aligned}$$

となる. インコヒーレントな物体は, 等価光源が一様で無限に広がっている場合に対応するので<sup>8,9)</sup>, インコヒーレントの OTF は,

$$\begin{aligned} \text{OTF}(\nu) &= \frac{R(\nu, 0)}{R(0, 0)} \\ R(\nu, 0) &= \int G(\bar{s}) G^*(\nu + \bar{s}) d\bar{s} \end{aligned} \quad (20)$$

となり, 瞳の自己相関によって求めることができる<sup>9)</sup>. 厳密な意味で, インコヒーレントな照明というのは存在しない. それは  $\sin \theta$  が有限 ( $|\sin \theta| < 1$ ) であることによる. しかし,  $-\infty \leq \sin \theta \leq +\infty$  とすることにより, インコヒーレントな状態を考えることができる<sup>8)</sup>.

(18)式を導出する際に不遊条件を満足する場合に成立する(13)式を使用していることが重要である. (18)式を見ると, 軸上と軸外との差はまったくない. これは, (17)式から(18)式を導く際に物体の高さおよび主光線の傾きに関する項が消えてしまうからであり, (14)式で考えれば物体側での光軸を  $X_0$  だけ平行移動していることに対応する. いいかえると, 軸外における(18)式は, 軸上の場合の瞳(絞り)を偏心(シフト)させた場合に対応する.

(18)式, (19)式などは, すでにフーリエ結像論の範囲で求まっている関係式であるが<sup>9)</sup>, 一般の光学系においてはフーリエ変換面は存在しないので, 本方法では(13)式をとくに留意して式を導いた. フーリエ変換面が存在するならば, 不遊条件式が成立しているのであるが, 従来その点についてはあまり強調されていなかったように思われる.

コヒーレントの ATF は  $G(\nu + \bar{s})$  として求めることができる. ここでは, メリディオナル面内に議論を限ったが, 2次元に拡張することは容易であると思われるので, ここでは述べない.

ここで得られた OTF は, 物体面上での空間周波数の関係として表わされる. 像面上で考える場合には, 倍率を考えなくてはならない. とくにメリディオナル方向と, サジッタル方向での倍率が異なる場合には注意が必要である.

インコヒーレント OTF については, Hopkins も<sup>2)</sup>, 軸上と軸外とで基本的には区別することなく求めている. しかし, Hopkins は瞳座標の意義を必ずしもわかりやすく説明していないと思われるが, 本方法では, 不遊条件の波動光学的意味を考えることにより, (擬似)瞳座標の意味が明白になっている. さらに, Hopkins の方法では, 像側での OTF への換算は瞳と光軸との交点を通る主光線と, そのメリディオナル方向の近接光線と, サジッタル方向の近接光線から計算されるが, 本方法においては2節で述べたように, 物体と像の結像関係からメリディオナル方向およびサジッタル方向の倍率が求まり, 像側での OTF に換算することは容易である.

松居ら<sup>3)</sup> は, 小穴<sup>1)</sup>の不遊条件を基礎として考察し, その結果, 「点像振幅分布が厳密に瞳関数のフーリエ変換として与えられるための条件は, 観測点を横に移動させた場合の波面収差の変動が入射瞳座標とリニア関数で結ばれるような定数  $K_y, K_x$  が存在することである」と結論している. これは, 瞳座標として入射光線の傾角の正弦をとり, 像点の近傍では回折波を平面波と見な

し、さらに不遊条件が成立すると仮定している本方法の考え方と同様と思われる。すなわち、定数  $K_1, K_2$  が存在するのは不遊条件の成立している場合と考えられる。

### 5. インコヒーレント OTF の計算例

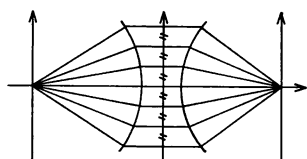
(20)式に基づいて、インコヒーレント OTF を計算した。実際の OTF の計算においては、瞳関数  $G(\bar{x})$  を  $\bar{x}$  について等間隔に求める必要がある。(10)式、(14)式より、

$$\bar{x} = \frac{1}{\lambda} \sin \theta - \frac{1}{\rho_M \lambda} X_0$$

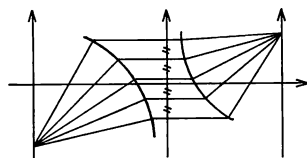
となるが、 $\bar{x}$  について等間隔ということは、対応する光線の入射角の正弦について等間隔に求めることになる。

これは、3節における不遊条件の解釈からわかるように、重要な意味をもっていると考えられる。実際に光線追跡によって瞳関数を求めるが、それらの光線はメリディオナル面内で、図示すると軸上および軸外でそれぞれ **Fig. 8**, **Fig. 9** のようになる。

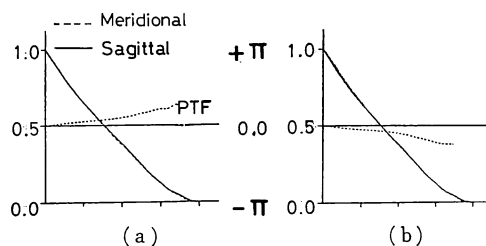
このように、瞳を分割して瞳関数を求めると、物体から像への光線追跡をした場合と像から物体へ光線追跡をした場合とで、分割数を等しくするならば、OTF の計算結果に位相部分の符号が反転することを除けば相違は生じない。このことは、**Fig. 8**, **Fig. 9** からわかるように、各サンプリング光線が両方の場合で一致することから容易に理解できると思われる。これは回折場の相反定理を光学系に適用することにより要求される<sup>4)</sup> ことであり、その意味において本方法は妥当であると考えられる。ただし、6節で述べるように物体の輝度特性が完全



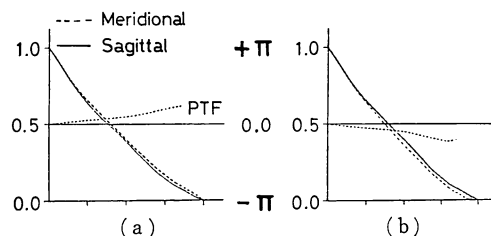
**Fig. 8** Sampling rays for an on-axis object point for OTF calculation in the meridional plane.



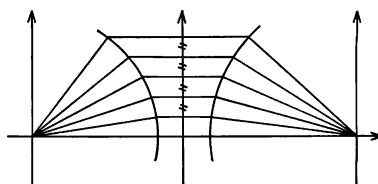
**Fig. 9** Sampling rays for an off-axis object point for OTF calculation in the meridional plane.



**Fig. 10** OTF calculated by the sampling method which is illustrated in **Fig. 8** and **Fig. 9**. (a) from object to image, (b) from image to object.



**Fig. 11** OTF calculated by the sampling method which is equally divided at the entrance tangential plane.



**Fig. 12** Sampling rays for an on-axis object point for OTF calculation in the meridional plane when the stop is decentered.

拡散面的であることが暗に仮定されている。

実際に、歪曲収差のないよく補正された光学系の物体から像への OTF と、像から物体への OTF を計算したところ差は生じなかった。**Fig. 10 (a)** は、物体から像への OTF であり、(b) は像から物体への OTF である。比較のため、サンプリングを入射接平面上で等分割したときの OTF の計算結果を **Fig. 11** に示す。(a), (b) の意味は **Fig. 10** のそれと同じである。

なお、スキュー光線の追跡では、サジittal方向についても、入射光線の Y 方向余弦について等間隔に瞳を分割しなくてはならない。

軸外の計算は、軸上の場合の絞りの偏心(シフト)した場合に対応するが、軸上で絞りが偏心した場合のサンプリングの様子を **Fig. 12** に示す。

### 6. インコヒーレント OTF と物体の輝度特性

4節での議論において、複素振幅透過率の空間周波数成分を  $\tilde{O}(\nu)$  とするとき、回折波の結像に対する寄与を  $\tilde{O}(\nu)d\nu$  として扱っている。これは、回折光の強さがその照明光の入射角、および回折光の射出角には依存しないと考えていることによる。また積分変数として、空間周波数（擬似瞳座標に対応）をとることは微小立体角に回折する光の寄与が、

$$d\nu \propto d(\sin \theta) = \cos \theta d\theta$$

として扱われていることを意味する。これらの仮定は回折積分の基本にかかわる重要な問題であり、NA（開口数）の大きい場合はとくに問題であるが、これは今後の課題とする。

これらの仮定のもとに計算をすすめたが、インコヒーレントな物体に適用する場合には、以下に示すように物体の輝度特性が完全拡散面的であることが要求される。インコヒーレントなので点物体について考えればよい。点物体とは振幅透過率が  $\delta$  関数で表わされるものとする。 $\delta$  関数の性質として、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(X) \exp[i\nu X] dX = 1$$

である。これは（擬似）瞳面上の振幅が一樣であることを示している。（擬似）瞳面上でのエネルギー分布も一樣であることを示し、 $d\nu \propto \cos \theta d\theta$  であることから、物平面の輝度特性として完全拡散面的であることを要求している。ここでは簡単のため1次元で考えたが、2次元で考えても同様である。

軸外の OTF は、軸上の OTF で、擬似瞳（絞）を偏心（シフト）させた場合に対応する。偏心量が大きい場合は NA が大きいことに対応するので、その意味において軸外の OTF に未解決の問題が残る。

### 7. 従来の OTF の計算方法について

不遊条件に注意した OTF の計算方法があるが<sup>2,3)</sup>、ここでは、像面を主光線に垂直な平面にとる方法<sup>9)</sup>について考えてみる。簡単のため結像系の倍率は等倍 ( $\beta = -1$ ) とし、主光線の入射傾角、射出傾角とも  $\omega$  とする。主光線と同じ角度でコヒーレントに照明し、0次光と1次光を考える。入射側での0次光と1次光のなす角を  $\alpha$  とし、像側での0次光と1次光のなす角を  $\alpha'$  とする。概略を Fig. 13 に示す。光軸に垂直な物平面と像平面について収差補正がなされており、軸外物点の不遊

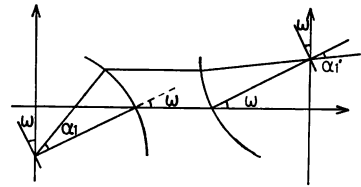


Fig. 13 Rotated object plane and rotated image plane.

条件式、(3)式を満足しているとき、 $n' = n$  のとき、 $\sin(\omega + \alpha) - \sin \omega = -\{\sin(\omega + \alpha') - \sin \omega\}$  となり、それゆえ

$$\frac{1}{2} \{\sin(\omega + \alpha) + \sin(\omega + \alpha')\} = \sin \omega$$

となり、 $\omega \neq 0$  のとき  $\alpha \neq -\alpha'$  となる。これは、0次光と1次光による主光線に垂直な面の結像倍率が、 $\beta = -1$  と異なることを意味し、幾何光学的関係と矛盾する。これはそもそも物空間、像空間とも主光線に垂直な面を考えることが幾何光学のシャインプルーフの法則<sup>10)</sup>（おりの原理）に矛盾し、また cosine-law<sup>6)</sup> に矛盾し、不遊条件を満足した結像関係にはならないからである。本論文の方法では幾何光学的矛盾も含まない。

### 8. 解像限界と瞳の収差および $\cos^4 \theta$ 則

不遊条件の波動光学的意味からわかるように、物面全体にわたり同じ解像限界（カットオフ周波数）をもつためには、入射傾角の正弦について、入射光束が同じ幅をもつことが必要である。NA（開口数）の小さな場合に簡単に示すと、メリディオナル面内では Fig. 14 のようになる。Fig. 15 は、軸外光束を平行移動して瞳の大きさを比較できるようにした。Fig. 15 より、 $\theta$  を入射主光線の傾角として、

$$\Delta(\sin \theta) = \cos \theta \cdot \Delta\theta = \text{constant} \propto a$$

それゆえ

$$\Delta(\tan \theta) \propto \frac{a}{\cos^3 \theta}$$

となり、軸外物点に対しては、入射接平面上での瞳の大

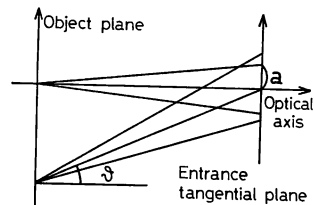


Fig. 14 Object plane and entrance tangential plane.

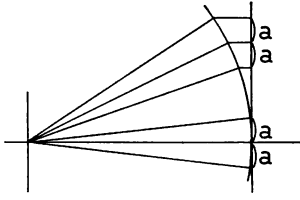


Fig. 15 An off-axis object point is shifted to coincide with the on-axis object point in Fig. 14.

大きさが  $1/\cos^3 \theta$  倍となる。サジッタル方向についても同様の考察をすると  $1/\cos \theta$  倍となる。このことは解像限界が軸上、軸外で同じであるためには、入射瞳の接平面上での大きさが軸外では  $1/\cos^4 \theta$  倍となることを示している。物体が完全拡散面、軸外に対しても入射瞳の大きさが一定で、さらに歪曲収差がないときに、いわゆる  $\cos^4 \theta$  則が成立する<sup>11)</sup>。しかし、解像限界が軸上、軸外で同じときは、入射瞳の大きさが  $1/\cos^4 \theta$  倍となるので像の照度は一定となる。

物面上で解像限界が一樣で歪曲収差のないとき、像面上でも解像限界が一樣となる。像面上で解像限界が一樣ならば、物界側と同様の議論により、 $\theta'$  を射出主光線の傾角として射出瞳の大きさは  $1/\cos^4 \theta'$  倍となる。このことは、入射瞳と射出瞳の大きさについて特定の関係を要請しているが、以下に示すように一般に知られている関係<sup>5)</sup> と矛盾しない。

厳密な意味における  $\cos^4 \theta$  則は、入射側でも射出側でも成立している<sup>11)</sup>。その基本となっている入射瞳と射出瞳の大きさの関係は次のように一般に示される<sup>5)</sup>。入射瞳の大きさを  $S(\theta)$ 、射出瞳の大きさを  $S'(\theta')$  とすると、歪曲収差がないとき、 $S(\theta)$ 、 $S'(\theta')$  が微小面積として、

$$\frac{S'(\theta')}{S(\theta)} \propto \frac{\cos^4 \theta}{\cos^4 \theta'}$$

となる。いま、入射瞳の大きさが、 $1/\cos^4 \theta$  に比例するとし、上式に

$$S(\theta) = S(0)/\cos^4 \theta$$

を代入すると、

$$S'(\theta') = S'(0)/\cos^4 \theta'$$

となり、射出瞳の大きさは  $1/\cos^4 \theta'$  に比例することになる。これは、解像限界から要請された、入射瞳と射出瞳の大きさの関係が一般の関係と矛盾していないことを示しており、本論文による OTF の計算方法が妥当であることを意味していると考えられる。実際、像側でテレセントリック、像側の NA が軸上と軸外とで等しく、

歪曲収差のない、よく補正された光学系の物体側の入射瞳の大きさは、 $1/\cos^4 \theta$  倍となっている。

レンズ設計において、収差論は重要な役割を果たしている。それゆえ、収差論の結論が瞳の収差について矛盾していないかを確認した。上記実例の条件を満たした光学系では、軸外物点に対する入射瞳は軸上物点に対する入射瞳よりも大きくなっているが、射出瞳は一定の大きさである。すなわち、瞳の結像に関してコマ収差が発生していることになる。メリディオナル面内での入射瞳の大きさは  $1/\cos^3 \theta$  倍となるが、

$$\frac{1}{\cos^3 \theta} \div 1 + \frac{3}{2} \tan^2 \theta \quad (21)$$

であり、瞳の 3 次コマ収差が発生している。物体の収差係数と瞳の収差係数との間には関係式が存在し、3 次の物体の歪曲収差係数を  $V$  とし、3 次の瞳のコマ収差係数を  $II^S$  とすると、

$$II^S - V = \left(\frac{\bar{\alpha}'}{n'}\right)^2 - \left(\frac{\bar{\alpha}}{n}\right)^2$$

の関係がある<sup>7)</sup>。ここで、 $n$  は物界側屈折率、 $n'$  は像界側屈折率、 $\bar{\alpha}$  は瞳近軸光線の入射傾角、 $\bar{\alpha}'$  は瞳近軸光線の射出傾角である。いま、 $V=0$ 、 $\bar{\alpha}=0$  (像側テレセントリック) とすると、

$$II^S = -\left(\frac{\bar{\alpha}}{n}\right)^2 \quad (22)$$

となり、瞳の結像についてコマ収差が発生することになる。

収差論より、物体の理想像高を  $y$ 、コマ収差を  $\Delta y$ 、コマ収差係数を  $II$ 、瞳座標を  $R$  とすると、メリディオナル面内の光線について、

$$\frac{\Delta y}{y} = -\frac{3}{2} II R^2 \quad (23)$$

となる<sup>7)</sup>。(22)式を(23)式に代入し、主平面から物体までの距離を  $\hat{q}_1$ 、入射瞳から物体までの距離を  $q_1$  とすると、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{y} &= \frac{3}{2} \left(\frac{\bar{\alpha}}{n}\right)^2 R^2 \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{n^2} \left(\frac{-\hat{q}_1}{q_1}\right)^2 \{(\hat{q}_1 - q_1) \tan \theta\}^2 \end{aligned}$$

となるが、瞳の収差係数についての近軸光線追跡の定義より<sup>7)</sup>、(23)式を瞳の結像について適用する際には、

$$-\left\{\frac{q_1}{\hat{q}_1} \frac{n}{\hat{q}_1 - q_1}\right\}^2$$

を乗じなくてはならない。よって

$$\frac{\Delta y}{y} = -\frac{3}{2} (\tan \theta)^2$$



となり、入射瞳から射出瞳の結像について負の3次コマ収差が発生する。係数  $3/2$  は(21)式の結果と一致し、3次収差論の範囲では矛盾していないことがわかる。

## 9. 結 語

従来の軸外物点の不遊条件式は、実際の光学系に適用するには不備な点があったので、まず、その点を改良した軸外物点の不遊条件式を導いた。

次に、OTFの計算過程において、多くの場合に見過ごされていると思われる不遊条件について、その波動光学的意味を考慮し、軸上と軸外とで基本的には区別する必要のない一般的なOTFの計算方法を求めた。また、従来は物体から像へのOTFと像から物体へのOTFとの比較検討があまりなされていなかったと思われるので、本方法によるインコヒーレントOTFについて検討

したところ、よく一致した。

最後に、解像限界から要請される瞳の収差が一般的な関係式および3次収差論と矛盾しないことを示した。

## 文 献

- 1) 小穴 純：応用物理, **38** (1969) 850.
- 2) H. H. Hopkins: Opt. Acta, **13** (1966) 343.
- 3) 松居吉哉, 南 節雄, 山口 伸, 小川良太, 中村泰三: 光学, **4** (1975) 124.
- 4) 鶴田匡夫: O plus E, No. 14 (1981) 64.
- 5) M. Reiss: J. Opt. Soc. Am., **35** (1945) 283.
- 6) M. Hertzberger: *Modern Geometrical Optics* (Interscience Publishers, Inc., New York, 1958) Chapt. 15.
- 7) 松居吉哉: レンズ設計法 (共立出版, 1972).
- 8) H. H. Hopkins: Proc. R. Soc. London. Ser. A, **217** (1953) 408.
- 9) 小瀬輝次: フーリエ結像論 (共立出版, 1979).
- 10) L. Strohel: *View Camera Technique* (Focal Press, London, 1976) p. 28.
- 11) 一色真幸: 光学技術コンタクト, **5**, 11 (1967) 10.