

光波干渉応用技術 5

サブフリンジ干渉計測基礎論

武田 光夫

電気通信大学 〒182 調布市調布ヶ丘 1-5-1

(1983年10月6日受理)

Subfringe Interferometry Fundamentals

Mitsuo TAKEDA

University of Electrocommunications,

1-5-1, Chofugaoka, Chofu 182

1. はじめに

光波干渉が精密計測の重要な手段として古くから用いられてきた最も大きな理由の一つは、光の波長が $1\mu\text{m}$ よりやや短いところに位置しているため、物の厚みや距離を精密に測るための定規の最小目盛としてそれが最も適していたからである。しかも、光の定規の目盛は干渉縞という形で直接目で見ることができる。このため、光の波長 λ は永い間にわたっていわば「精密」の代名詞の役割を果たしてきた。ところが最近の光エレクトロニクスの各分野で用いられる光学素子のなかには数 10 分の 1 波長から、ときには 100 分の 1 波長程度の面精度や波面収差を要求されるものが増えてきた。そこで、光の定規の最小目盛、すなわち 1 フリンジ以下を読み取る新しい干渉計測法が開発された。それが、サブフリンジ干渉計測法である。いまやサブフリンジは「超精密」の代名詞となりつつある。サブフリンジ干渉計測法にはヘテロダイン干渉法やフリンジ走査法をはじめとする幾つかの方法がある。その具体的な実施例や応用例の詳細につれてはすでに中島の解説¹⁾があるので参考にしていただくことにして、この講義ではこれらの方法のすべての原理に共通し最も本質的であると思われる基本概念は何かという点に主眼を置いて解説する。また、測定精度とノイズとの関係について説明し、これらの方法の測定限界について考えてみる。サブフリンジ干渉計測に関する論文や解説の数はすでにかんがりの数にのぼる。しかし、

その多くは、どのようにサブフリンジ計測を行なうかを述べてはいても、なぜその方法でサブフリンジ計測ができるのかという点については必ずしも十分答えてくれてはいないように思われる。要するに何が問題で、それがどのように解決されているのかといった最も基本的な点には、おそらくどの方法にも共通しているものがあるはずである。干渉計測に限らず、一般に計測の本質は「対象物のもつ情報を他の不要な信号からいかに分離して取り出し取得するか」にある、と筆者は考える。そこでここでは、この点に焦点をあてて、サブフリンジ干渉計測法の基礎について解説する。

2. 問題の所在

サブフリンジ干渉計測法の原理を説明する前に、まず従来の方法で 1λ 以下の干渉測定を行なうとどのような問題が生じるかを考えてみよう。干渉縞による最小目盛は光路差にして 1λ であるが、熟練により最小目盛以下を読み取ることが十分に可能である。事実、光学検査の現場では従来から熟練者により 1 フリンジ以下のニュートリングの読取りが日常的に行なわれてきた。その意味では、サブフリンジ干渉計測は古くから存在していた。しかし、熟練者にとっても $\lambda/50$ や $\lambda/100$ を読み取することは困難である。この難しさの原因はどこにあるのだろうか。それを解明し理解すれば、サブフリンジ干渉計測法の原理はおのずと明らかになるはずである。そこで、まずは図 1 に示すような最も簡単なマイケルソン干

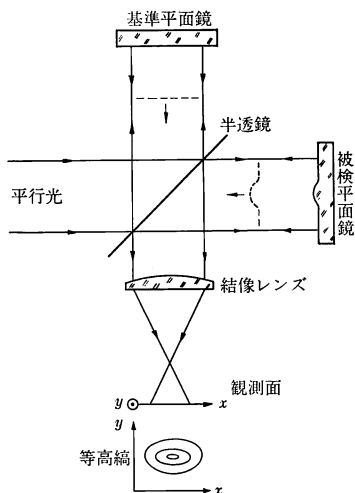


図1 マイケルソン干渉計による平面鏡の検査

渉計による平面鏡の検査について考えてみよう。基準平面鏡からの反射光と被検平面鏡からの反射光の観測面上における複素振幅分布をそれぞれ $\alpha(x, y) \exp(jkl)$ と $\beta(x, y) \exp\{j[kl + \varphi(x, y)]\}$ で表わすと、観測面上に現われる干渉縞の強度分布 $g(x, y)$ は

$$g(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\varphi(x, y)] \quad (1)$$

となる。ここで、

$$a(x, y) = \alpha^2(x, y) + \beta^2(x, y) \quad (2)$$

および、

$$b(x, y) = 2\alpha(x, y)\beta(x, y) \quad (3)$$

は、干渉計への入射光の光量むらや、鏡面での反射率分布の不均一性によって生じる空間的な強度分布である。被検平面鏡の鏡面の高低分布によって生じる光路差の変化が波長 λ より十分に大きく、位相 $\varphi(x, y)$ が 2π 以上の変化をする普通の干渉計測においては、(1)式の $\cos[\varphi(x, y)]$ による明るさの変化に比べて、(2)式や(3)式の $a(x, y)$ 、 $b(x, y)$ の各項による変化は十分小さいので、これらは定数とみなすことができ、(1)式は位相 $\varphi(x, y)$ の 2π ごとの、すなわち鏡面の高低分布の $\lambda/2$ ごとの変化を表わす等高綫を与えることになる。したがって縞の数を数えることにより $\varphi(x, y)$ の分布を直接知ることができる。ところが、鏡面の高低分布の差が $\lambda/2$ より小さくなると、 $\cos[\varphi(x, y)]$ による明るさの変化が小さくなるためにもはや等高綫に現われず、ゆるやかで微弱な明暗分布を含んだ一面ワンカラーの干渉パターンが観測されるだけとなる。もちろん、この状態では $\cos[\varphi(x, y)]$ による明るさの変化と光量むらによる $a(x, y)$ 、 $b(x, y)$ の変化とは互いにまったく区別するこ

とができないため、干渉パターンから直接 $\varphi(x, y)$ の情報を得ることはできない。このような状態になったときが従来の方法による測定限界ということができる。ところで、もし光量むらがまったくなく(2)式、(3)式の値が既知の一定値 a_0 、 b_0 として知られている場合には、ワンカラーの干渉パターンの微弱な明暗分布を測光して得られる $i(x, y)$ をもとに、

$$\varphi(x, y) = \cos^{-1} \{[i(x, y) - a_0]/b_0\} \quad (4)$$

により、 2π 以下の $\varphi(x, y)$ の値を定めることが原理的にはできるはずである。従来の方法で 1λ 以下の測定が困難なのは、(1)式に示されるように、計測対象の情報をもつ $\cos[\varphi(x, y)]$ の項と、未知の光量むらによる他の不要な項 $a(x, y)$ と $b(x, y)$ が分離されず混ざり合った形で干渉縞の強度分布 $i(x, y)$ として観測されるからである。したがって、何らかの方法で位相項 $\varphi(x, y)$ を他の不要な項 $a(x, y)$ や $b(x, y)$ から完全に分離して取り出すということがサブフリンジ干渉計測を行なうための最も本質的で重要な要件となる。このように取得すべき情報をもつ信号を他の不要な信号から分離して取り出すということは、干渉計測に限らず一般のあらゆる計測において最も本質的な事柄であるが、このことは普段はあまり意識されずに経験を通じて自然に体得されていることが多い。たとえば、光学検査の熟練者が1フリンジ以下のニュートンリングを読み取る際には、原器の一方の縁を少し持ち上げることにより原器の基準面と被検面との間に少量のフィルトを与えて細かい縦縞を何本か発生させて、それらの縞の直線からのずれ量が縞間隔の何分の1に相当するまで読み取ろうとするだろう。これは、ワンカラーのゼロフリンジ状態では、変化がゆるやかなために $a(x, y)$ や $b(x, y)$ の光量むらと区別がつかなかった干渉信号 $\cos[\varphi(x, y)]$ を波面にフィルトを与えて干渉させることにより、変化の速い干渉信号すなわち細かい縦縞に換えて、ゆるやかな変化をする $a(x, y)$ や $b(x, y)$ のバックグラウンドと視覚的に分離して観察していることになる。いい換えれば信号の空間周波数の違いを利用した分離法を無意識に実現しているのである。あるいはまた、原器を上から軽く押しながら干渉縞の明暗の変わっていく様子を見るだろう。これはいわば干渉信号の時間変化を利用していることになる。このように従来からよく知られている光学検査の現場の作業を「情報をもつ信号を他の不要な信号から分離して取り出す作業」という意識をもってながめなおすと、そこにはサブフリンジ干渉計測法のすべての原理が含まれている。しかしそれには目視による精度の限界が当然存在する。これをエレ

クトロニクスと信号処理技術により解決したのがサブフリンジ干渉計測法だといえよう。では、これまでに提案されているおもなサブフリンジ干渉計測法の原理を上述べた観点から見てみることにしよう。

3. サブフリンジ干渉計測法の原理

3.1 ヘテロダイン干渉法

前述の「原器を上から軽く押しながら干渉縞の明暗の変わっていく様子を見る」という手法を突き詰めていけば、空間的な信号である $\varphi(x, y)$ を他の同じく空間的な信号である $a(x, y)$ や $b(x, y)$ から分離する手段として新たに時間 t をパラメータとして導入する方法に思い至るであろう。その最も代表的なものが次に述べるヘテロダイン干渉法である。

再び図1のような最も簡単な干渉計を例に説明する。基準鏡面からの反射光と被検鏡面からの反射光の間に微小周波数差 f_0 を与えて干渉させる。その具体的手段としては、たとえば超音波ブラッグセルを用い方法^{2,3)} やゼーマン効果を利用する方法⁴⁾ などいろいろある。それらの違いは実際のシステムを組む際には重要ではあるが、基礎原理を理解するうえでは本質的ではない。前述の「原器を上から押し」という状況に最も近いのは図2のように基準平面鏡を一定速度 v で移動させてドップラー効果により周波数差 f_0 を与える方法である。この場合、基準平面鏡からの反射光の観測面上における複素振幅分布は $a(x, y) \cdot \exp [jk(l-2vt)]$ となるので、(1)

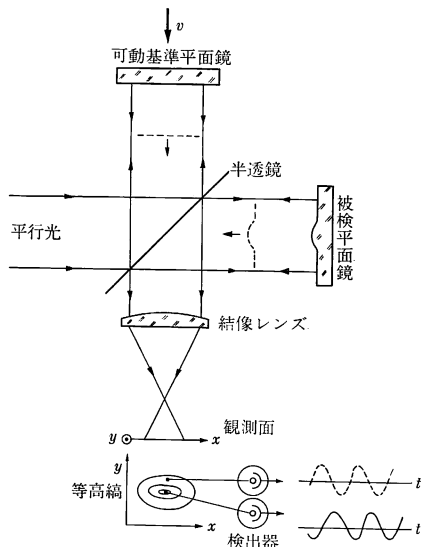


図2 ドップラー効果によるヘテロダイン干渉計

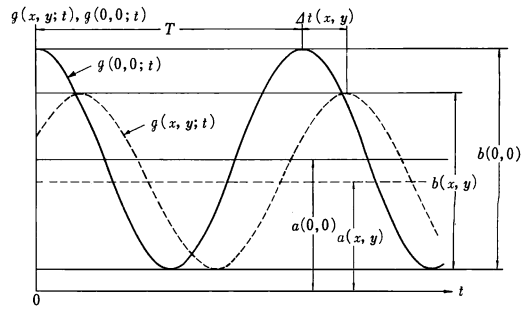


図3 干渉信号の時間変化に基づく位相の決定

式の強度分布は、

$$g(x, y; t) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi f_0 t + \varphi(x, y)] \quad (5)$$

と、新たに時間 t を変数に加えた3次元信号となる。ただし、 $f_0 = 2v/\lambda$ で、これをここでは時間的キャリア周波数と呼ぶことにする。ここで重要なのは、観測点 (x, y) を固定して、光強度を正弦的に振動する時間信号として観測すれば、時間信号の位相が $a(x, y)$ や $b(x, y)$ の値のいかんによらずにその点の計測すべき波面の位相 $\varphi(x, y)$ を与えていることである。つまり、前述の信号の分離が達成されているわけである。この過程を通信の言葉で表現すれば、被検面の高低によって位相変調を受

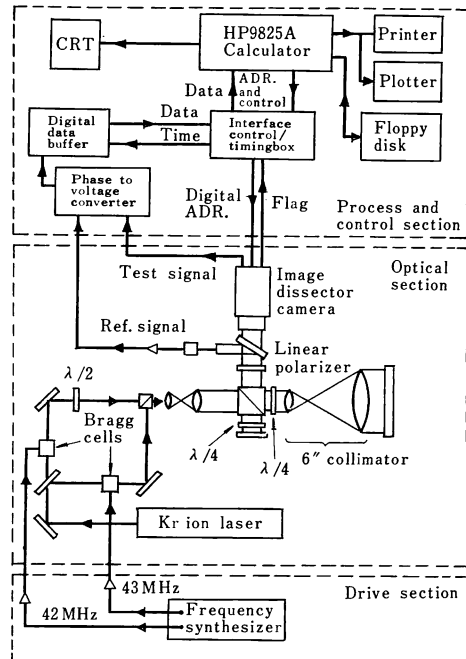


図4 ブラッグセルを用いたヘテロダイン干渉計測システムの構成例⁵⁾

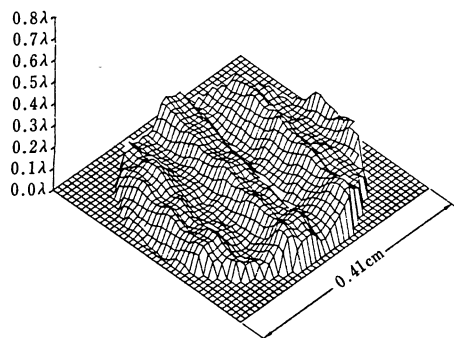


図5 ヘテロダイン干渉法によるダイヤモンド切削表面の測定例⁵⁾

けた光周波数信号にそれと周波数が f_0 だけ異なる基準面からの局発信号を加えてヘテロダイン検波して、直接光電検出が可能な低周波数のビート信号に変換していることになる。このためヘテロダイン干渉法と呼ばれる。

図2のように二つの検出器の一方を一点、たとえば $(0, 0)$ 点、に固定して、その点の信号の位相を基準に他の点の相対的位相を順次決めてゆく。図3はその具体的な方法を説明するためのもので、実線で表わした基準点 $(0, 0)$ における干渉信号 $g(0, 0; t)$ 、と破線で表わした (x, y) 点の干渉信号 $g(x, y; t)$ の位相差を $\Delta\varphi(x, y) = 2\pi\Delta t(x, y)/T$ から求める。エレクトロニクス化によりこの時間測定の分解能が高いことがしばしばヘテロダイン法により高精度な干渉計測ができる理由としてあげられる。確かにそのとおりではあるが、その背景として、前述の不要信号の分離が達成されていることがもう一つの重要な理由なのである。図4と図5は Massie⁵⁾ によるブラック・セルを用いたシステムの構成例と計測例で rms 誤差 $\lambda/70$ の精度が報告されている。

3.2 フリンジ走査法

ヘテロダイン法では位相 $\varphi(x, y)$ の決定を時間領域で行なっていたが、これを(時間)の周波数領域で行なうのがフリンジ走査法である。この周波数スペクトル計算を DFT (離散的フーリエ変換) で行なうことが多いためデジタル干渉法とも呼ばれる。(5)式のヘテロダイン干渉信号の1周期を M (整数) 分割するような時間間隔 $\Delta T = 1/Mf_0$ で標準化する。これは光路差にすると $\Delta l = 2v\Delta T = \lambda/M$ となり、基準平面鏡を光路差にして λ/M ずつステップさせたときの干渉信号に相当する。二光束干渉の場合は干渉信号は正弦波であるので標準化定理より M は2以上あればよいことになるが、後述のノイズの影響の低減と、検出器の非線形特性により発生する高調波を考慮して M はもっと大きな数にしておく

のが普通である。このように標準化された m 番目の時刻における信号は、(5)より

$$g(x, y; m) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi m/M + \varphi(x, y)] \quad (6)$$

で与えられ、これは

$$g(x, y; m) = a(x, y) + (1/2)b(x, y) \times \exp[j\varphi(x, y)] \cdot \exp[2\pi jm/M] + (1/2)b(x, y) \exp[-j\varphi(x, y)] \times \exp[-2\pi jm/M] \quad (7)$$

と書き改められる。一般に信号 $g(x, y; m)$ の l 番目のスペクトル $G(x, y; l)$ は

$$G(x, y; l) = \sum_{m=0}^{M-1} g(x, y; m) \exp(-2\pi jlm/M) \quad (8)$$

で計算されるが、(7)式の信号の正の基本周波数スペクトル ($l=1$) に着目すると、

$$G(x, y; 1) = \sum_{m=0}^{M-1} g(x, y; m) \exp(-2\pi jm/M) = (M/2)b(x, y) \exp[j\varphi(x, y)] \quad (9)$$

となる。ここで離散的複素指数関数の直交関係

$$\sum_{m=0}^{M-1} \exp[-2\pi j(l-l')m/M] = \begin{cases} M & (l=l') \\ 0 & (l \neq l') \end{cases} \quad (10)$$

を用いた。(9)式においてすでに不要信号 $a(x, y)$ は分離除去されている。(9)式のスペクトルから位相 $\varphi(x, y)$ を求めるには

$$\varphi(x, y) = \tan^{-1} \{ \text{Im} [G(x, y; 1)] / \text{Re} [G(x, y; 1)] \} \quad (11)$$

を計算すればよい。ここで $\text{Re} []$ と $\text{Im} []$ はそれぞれ実部と虚部をとる演算を意味する。これらの比をとることによりさらに不要信号 $b(x, y)$ が除去される。あるいは、(9)式の複素対数

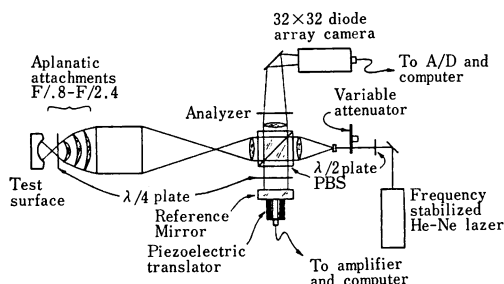


図6 フリンジ走査法による干渉計測システムの構成例⁶⁾

$$\log [G(x, y; 1)] = \log [(M/2)b(x, y)] + j\varphi(x, y) \quad (12)$$

を計算し、実部の不要信号と分離した形で虚部より $\varphi(x, y)$ を求めることもできる。これらが数学的にはまったく等価であることはいうまでもない。図6は Bruning⁶⁾ らによるフリンジ走査法の干渉計測システムの構成例である。

このほかに、鏡を正弦波で振動させるフェーズロック法^{7,8)} があるが、時間を新しいパラメータとして導入して不要信号を除去する点では、上に述べてきた二つの方法と本質的な違いはない。

3.3 フーリエ変換法

前に述べた「原器の一方の縁を少し持ち上げて細かい縦縞を発生させる」ということの本質を突き詰めれば、空間周波数の違いを利用して不要信号を分離・除去するフーリエ変換法⁹⁾ に思い至る。図7は、図1のマイケルソン干渉計の基準平面鏡に微小角 θ のティルトを与たものである。観測面上に形成される干渉縞の強度分布 $g(x, y)$ は

$$g(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi f_0 x + \varphi(x, y)] \quad (13)$$

となり、空間周波数 $f_0 = 2 \tan \theta / \lambda$ のキャリア信号である細かい縦縞が $\varphi(x, y)$ により空間的に位相変調されたものになる。図8は、こうして得られる干渉信号の実測例である。 $a(x, y)$ と $b(x, y)$ の影響で縞強度の平均値とコントラストが場所によって変わっていることがわか

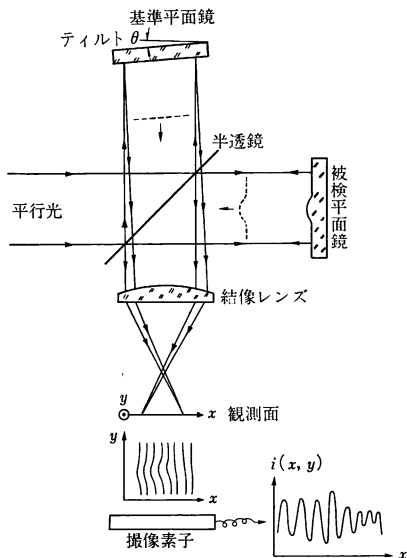


図7 フーリエ変換干渉計測法 (ティルトにより空間的キャリアを導入する)

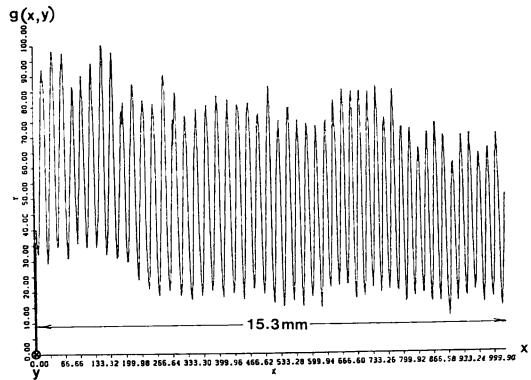


図8 ティルトした波面の干渉により得られる空間的に位相変調されたキャリア信号 (光量むら $a(x, y)$ と $b(x, y)$ により縞強度の平均値とコントラストが変動している⁹⁾)

らであろう。ヘテロダイン干渉法では(5)式のように時間的なキャリア周波数を導入したのに対し、フーリエ変換法では、(13)式のように空間的なキャリア周波数を導入する点が基本的な相違である。所望の信号 $\varphi(x, y)$ と不要な信号 $a(x, y)$, $b(x, y)$ がともに導入したキャリアと同じく空間的な信号であるので、ヘテロダイン干渉法やフリンジ走査法とは異なる信号処理法を必要とする。説明の都合上、(13)式を(7)式に対応した表現に書き改めておく。

$$g(x, y) = a(x, y) + c(x, y) \exp(2\pi j f_0 x) + c^*(x, y) \exp(-2\pi j f_0 x) \quad (14)$$

ここで、

$$c(x, y) = (1/2)b(x, y) \exp[j\varphi(x, y)] \quad (15)$$

であり、 $*$ は複素共役を表す。(14)式の強度分布を y を固定して変数 x のみについて1次元フーリエ変換して、変数 x に関する空間周波数スペクトル $G(f, y)$ を計算すると

$$G(f, y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp(-2\pi j f x) dx = A(f, y) + C(f - f_0, y) + C^*(f + f_0, y) \quad (16)$$

となる。ここで、大文字は変数 x に関する空間周波数スペクトルを表す。図8の例からもわかるように、キャリア空間周波数 f_0 による変化の速さに比べて、 $a(x, y)$, $b(x, y)$ の変化は非常にゆるやかであり、また、サブフリンジ計測においては $\varphi(x, y)$ の変化も同じくゆるやかである。したがって、(16)式の三つのスペクトルはキャリア周波数 f_0 により完全に分離される。図9は図8の干渉信号をフーリエ変換して得られる空間周波数スペクトルの実例で、三つのスペクトルが完全に分離されてい

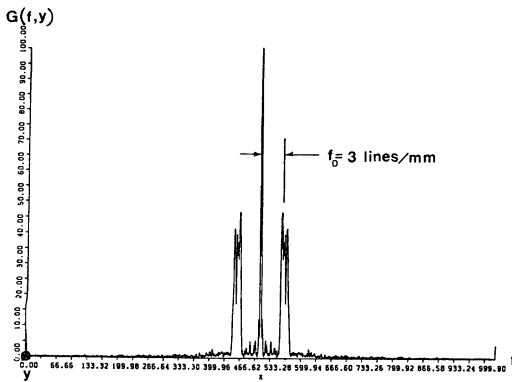


図9 図8の干渉信号の空間周波数スペクトラム

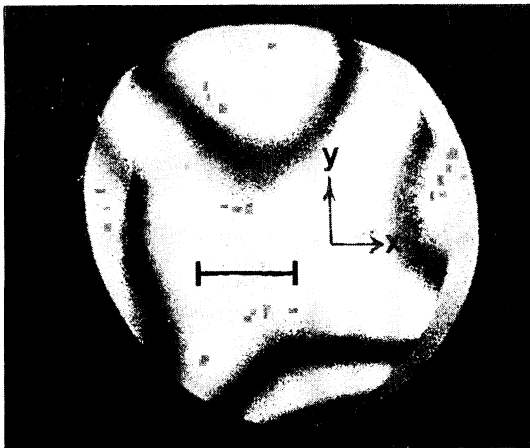


図10 マイケルソン干渉計による等高縞 (|——|の区間の位相変化は読みとれない⁹⁾)

ることがわかる。そこで、正のキャリア周波数 f_0 に乗っている信号のスペクトル $C(f - f_0, y)$ のみと取りだし、それを f_0 だけ原点にむけてシフトして $C(f, y)$ を得る。この空間周波数フィルタリングにより一方の不要信号 $a(x, y)$ が除かれ、また、スペクトルを原点へシフトすることによりキャリア周波数すなわちティルトが除かれることになる。こうして得られた $C(f, y)$ を f を変数として1次元フーリエ逆変換することにより(15)式の $c(x, y)$ が求まる。そこで、(12)式と同様に複素対数 $\log [c(x, y)] = \log [(1/2)b(x, y)] + j\varphi(x, y)$ (17)

を計算することにより、実部の不要項から完全に分離して虚部より位相 $\varphi(x, y)$ を求めることができる。図10は図1のようなマイケルソン干渉計で得られる等高縞の例で図中の|——|で示した区間では λ 以下の変化のためこのような等高縞からは読み取ることができない。図11はこの区間をフーリエ変換法で計測したもので、 $\lambda/30$ 以上の繰返し精度が得られている。

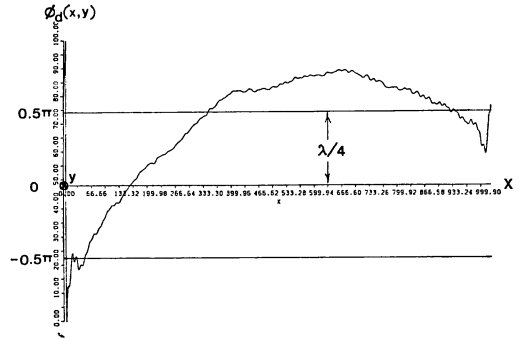


図11 図10の|——|の区間をフーリエ変換法で計測した結果⁹⁾

ここまで読んでこられた読者のなかには、空間的なキャリアを導入して不要信号を分離し除去するという基本原理の点でこれはオフ軸ホログラフィと同じだと気づかれた方も多いかもしい。まさにそのとおりで、(13)式をホログラムの透過率分布に対応させれば、ホログラムの像再生を数値的に行なって所望の光の場を複素数値として得て、その位相のみに着目していると考えてもよい。ホログラムの像再生を数値的に行なうには一般には2次元のフーリエ変換による回折場の計算を必要とするが、ここではたんにx方向の1次元のフーリエ変換で済んでいる点が異なる。これは、図7からわかるように、(13)式の分布に対応するホログラムは鏡面のイメージホログラムとなっているからである。

3.4 走査モアレ法

空間的なキャリア周波数 f_0 を一度導入したうえで、それを時間的なキャリア周波数に変換するのが走査モアレ法である。

$$\tau(x, t) = 1 + \cos [2\pi f_0(x - vt)] \quad (18)$$

のように、(13)式と同じ空間的キャリア周波数 f_0 をもち、速度 v で移動する格子を(13)式の強度分布に重ねたときに生じるモアレ縞の低空間周波数成分は、 $f_0 = f_0 v$ として

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x, y; t) = & a(x, y) \\ & + (1/2)b(x, y) \cdot \cos [2\pi \tilde{f}_0 t + \varphi(x, y)] \end{aligned} \quad (19)$$

となり、(5)式のヘテロダイン干渉とまったく同じ形の信号が得られる。格子をその空間的な周期 $1/f_0$ の $1/M$ ずつステップさせていけば、これはフリッジ走査法の(6)式と一致する。空間的な信号同士のビートとして生じるモアレを格子を移動することにより時間的なビート信号として検出しているの、空間-時間 (spatiotemporal) ヘテロダインとも呼ぶのが適当であろうか。タ

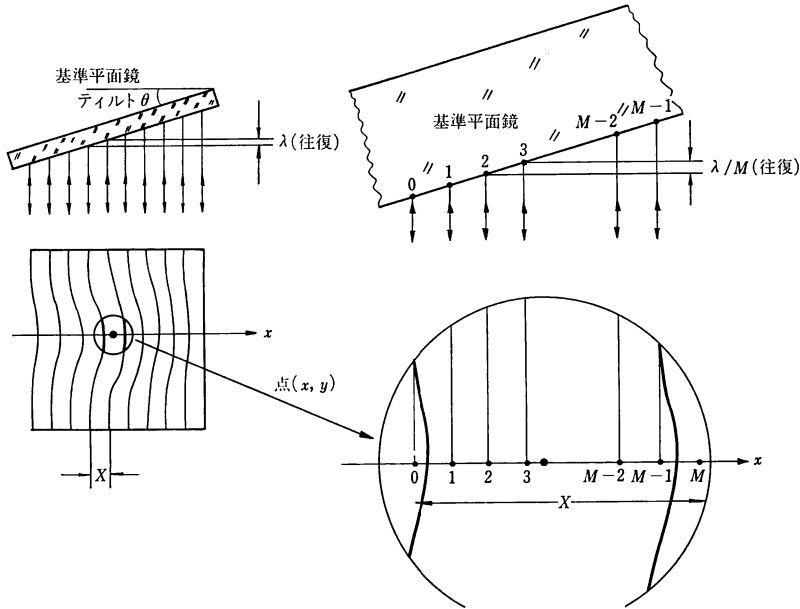


図 12 空間的フリンジ走査法

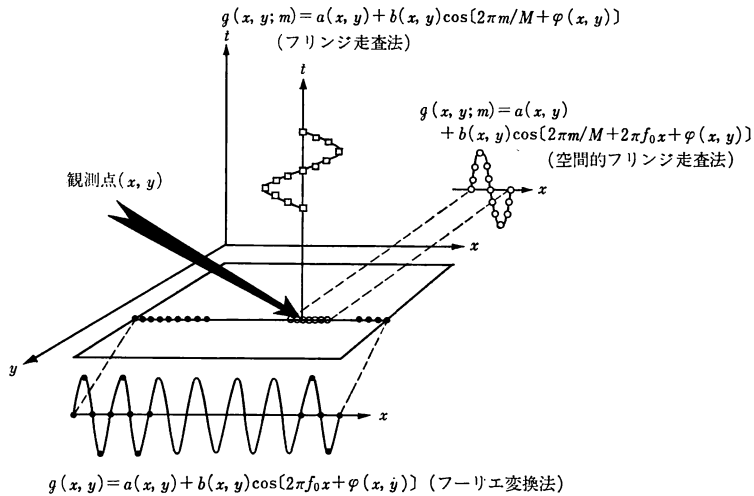


図 13 各計測法で用いられる干渉信号の比較

ルポ干渉計のように得られる干渉縞がもともと空間的なキャリアをもっている場合に便利な方法であり、横関¹⁰⁾や谷田貝¹¹⁾らにより研究されてきた。

3.5 空間的フリンジ走査法

ヘテロダイン法やフリンジ走査法などの時間キャリア法では、空間のある1点の位相の測定を他の点の位相の測定とはまったく独立にその1点で観測される時系列をもとに行なうのに対し、空間キャリアを用いるフーリエ変換法では空間周波数スペクトルを求める(16)式からも

わかるように空間の x 方向の全点を常に同時にとり扱う。そのため両者はまったく異なる方法であるとしてこれまで説明してきたが、ここで両者の詰りつきを理解するために次のような豊岡ら¹²⁾の方法を紹介しよう。

(13)式の干渉縞の1点 (x, y) に着目し、その点を含む近傍の x 方向にキャリア周波数の1周期分の区間 $X = 1/f_0$ を考え、それを M 分割する(図12)。キャリア周波数 f_0 による変化に比べて $a(x, y)$ や $b(x, y)$ および $\varphi(x, y)$ の変化は十分にゆるやかなので、この1周期

の区間内ではほぼ一定とみなせるため、その区間内の1点 (x, y) の値で代表させることができる。そこで、この微小な1周期区間内の各分割点を $0, 1, \dots, m, \dots, M-1$ と付番すると*1、これらの点における干渉強度は(13)式より

$$g(x+mX/M, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi m/M + 2\pi f_0 x + \varphi(x, y)] \quad (20)$$

と書き表わすことができる。これは、フリンジ走査法の(6)式で、 $\varphi(x, y)$ を $2\pi f_0 x + \varphi(x, y)$ と置き換えたものになっている。したがって、フリンジ走査法の処理により位相を求め、そこからティルトによる $2\pi f_0 x$ を引くことによって $\varphi(x, y)$ を決定することができる。つまり、ティルトにより空間キャリアを導入するということは、キャリア周波数の1周期内のマイクロな領域内に着目すればそこでフリンジ走査法を行なっているのと同じである。このことは図12のティルトした基準平面鏡の与える光路差が、 λ/M のステップで増加していることから直観的に理解することができよう。要するに、 $a(x, y)$, $b(x, y)$ と $\varphi(x, y)$ の変化が無視できる微小な区間内では(13)式の空間変数 x は(5)式の時間変数 t と同じ役割を果たしているのである。図13は各方法で用いられる干渉信号の相互関係を視覚的に表わしたものである。

4. ノイズと測定精度

これまでの説明で、なぜサブフリンジ計測ができるのかという点は一応理解が得られたとすると、次の疑問はこれらの方法でいったいどこまで計れるのだろうかということであろう。この問に対して適切な解答を与えるのはむずかしい。実際に計測を行なうには何らかの計測システムを構成する必要があり、そのシステムを構成する各要素で発生する誤差の大きさと、その誤差の計測値への伝播機構を解明しなければならぬからである。つまり具体的なシステム構成に立ち入った議論を必要とする。そこで、ここでは、これらのシステム構成が理想的になされたとして最終的にその計測精度を決定するノイズの影響に焦点をあてて考えてみることにしよう。

ノイズの影響について考える糸口として、まず次のような例を考えてみよう。前節までの説明では、 $\varphi(x, y)$ を不要信号 $a(x, y)$, $b(x, y)$ から分離し取り出せばサブフリンジ干渉計測が達成されるということであった。そのための最も簡単で直接的な方法は、図1のマイケルソン干渉計の両腕の光路の一方を交互に遮断して光強分

布 $\alpha^2(x, y)$ と $\beta^2(x, y)$ をあらかじめ求めておき、(2)、(3)式から $a(x, y)$, $b(x, y)$ を決定し、(1)式より得られる

$$\varphi(x, y) = \cos^{-1} \{ [g(x, y) - a(x, y)] / b(x, y) \} \quad (21)$$

の式より $\varphi(x, y)$ を決定することであろう。この場合、確かに $a(x, y)$, $b(x, y)$ の不要項の影響は補正されていて、原理的にはサブフリンジ干渉計測が達成されるはずであるが、米村¹³⁾やわれわれの実験ではあまりよい結果が得られていない。 $a(x, y)$, $b(x, y)$, $g(x, y)$ を測定する際のノイズがすべてそのまま、(21)式を通じて直接 $\varphi(x, y)$ に影響を与えるからである。「情報をもつ信号を他の不要な信号から分離して取り出す」という計測の本質は当然のことながら $a(x, y)$, $b(x, y)$ という deterministic な不要信号だけでなくノイズというランダムな不要信号に対してもまったく変りがないはずである。そこで、前節に述べた方法ではどのようにしてこのノイズの影響の軽減が図られているかをフリンジ走査法とフーリエ変換法の両者について見てみることにしよう。

簡単のために干渉強度分布検出時に各点で混入するノイズは定常的に互いに独立でかつ平均値がゼロの additive なノイズであるとする。また光量、つまりフォトン数は十分あるものとして、干渉強度自体は deterministic な量として扱う。

4.1 フリンジ走査法

前記の仮定のもとに(6)式の干渉信号の計測値 $\tilde{g}(x, y; m)$ は

$$\tilde{g}(x, y; m) = g(x, y; m) + n(m) \quad (22)$$

と表わされる。ここで、 $\langle \rangle$ でアンサンブル平均を表わすとすると、

$$\langle n(m) \rangle = 0 \quad (23)$$

$$\langle n(m)n(m') \rangle = \begin{cases} \sigma^2 & (m=m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases} \quad (24)$$

が成立する。(9)式に従って基本周波数スペクトル $\tilde{G}(x, y; 1)$ を求めると、

$$\tilde{G}(x, y; 1) = G(x, y; 1) + N(1) \quad (25)$$

となる。ここで、

$$N(1) = \sum_{m=0}^{M-1} n(m) \exp(-2\pi jm/M) \quad (26)$$

である。(25)式の複素スペクトルの位相 $\tilde{\varphi}(x, y)$ はノイズのスペクトル $N(1)$ のために正しい位相 $\varphi(x, y)$ から $\Delta\varphi(x, y)$ だけ誤差をもつことになる。この関係を幾何学的にフェーザベクトルで示したものが図14である。(11)式または(12)式で得られる $\varphi(x, y)$ の平均値や、 $\Delta\varphi(x, y)$ の rms 値を求めるには、 $N(1)$ の確率密度関

*1 点 (x, y) をゼロと付番することにする。

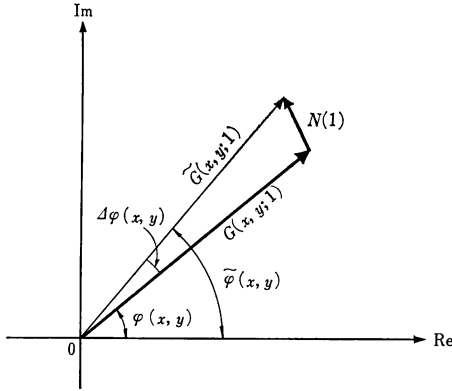


図 14 ノイズスペクトルにより生じる位相誤差

数が必要になる。ノイズ $n(m)$ がガウス分布に従うとすれば、 $N(1)$ の振幅はレーリー分布に従い、位相は一様分布となることが知られているので、それをもとに rms 誤差を求めるとというのが Bruning¹⁴⁾ の行なった手順である。しかし、ここではノイズに比べて信号が十分大きく、 $|G(x, y; 1)| \gg |N(1)|$ が成立する場合なので、もっと簡単な取扱いが可能で、しかも確率密度関数を具体的に与える必要もないということを以下に示そう。(25)式の $\tilde{G}(x, y; 1)$ を(12)式の $G(x, y; 1)$ に代入すると

$$\begin{aligned} \log \{\tilde{G}(x, y; 1)\} &= \log \{G(x, y; 1) \\ &\quad \times [1 + N(1)/G(x, y; 1)]\} \\ &= \log [G(x, y; 1)] \\ &\quad + \log [1 + N(1)/G(x, y; 1)] \\ &\approx \log [(M/2)b(x, y)] + j\varphi(x, y) \\ &\quad + N(1)/G(x, y; 1) \end{aligned} \quad (27)$$

を得る。ここで、 $\log(1+z) \approx z$ ($|z| \ll 1$) の関係を用いた。計測される位相 $\varphi\text{-tilde}(x, y)$ は、(27)式の虚部より

$$\varphi\text{-tilde}(x, y) = \varphi(x, y) + \text{Im} [N(1)/G(x, y; 1)] \quad (28)$$

で与えられる。 $\langle n(m) \rangle = 0$ の仮定と、(26)式より $\langle N(1) \rangle = 0$ であるので、 $\langle \varphi\text{-tilde}(x, y) \rangle = \varphi(x, y)$ となり、(12)式は真の位相の不偏推定値を与えていることがわかる。したがって、計測誤差 $\Delta\varphi(x, y) = \varphi\text{-tilde}(x, y) - \varphi(x, y)$ の分散は

$$\begin{aligned} \langle [\Delta\varphi(x, y)]^2 \rangle &= \langle \{\text{Im} [N(1)/G(x, y; 1)]\}^2 \rangle \\ &= \left\langle \left[\frac{1}{2i} \left[\frac{N(1)}{G(x, y; 1)} - \frac{N^*(1)}{G^*(x, y; 1)} \right] \right]^2 \right\rangle \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{\langle N(1)^2 \rangle}{[G(x, y; 1)]^2} - \frac{2\langle |N(1)|^2 \rangle}{|G(x, y; 1)|^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle N^*(1)^2 \rangle}{G^*(x, y; 1)^2} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

となる。Appendix の (A4), (A5), (A6) 式の関係より、 $\langle N(1)^2 \rangle = \langle N^*(1)^2 \rangle = 0$ 、 $\langle |N(1)|^2 \rangle = M\sigma^2$ であり、また(9)式より $|G(x, y; 1)|^2 = (M/2)^2 b(x, y)^2$ であるので、(29)式は

$$\langle [\Delta\varphi(x, y)]^2 \rangle = 2\sigma^2 / M b(x, y)^2 \quad (30)$$

となる。 $b(x, y)$ は干渉縞の peak-to-peak 値であるので、検出信号の S/N 比 $S(x, y)$ を

$$S(x, y) = b(x, y) / \sqrt{2} \sigma \quad (31)$$

で定義すると、位相の計測誤差の rms 値は

$$\sqrt{\langle [\Delta\varphi(x, y)]^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{MS(x, y)}} \quad (32)$$

の簡単な式で与えられる。これは Bruning¹⁴⁾ がガウスノイズを仮定して導いた結果に一致する。

4.2 フーリエ変換法

フリンジ走査法と対応させて、信号の区間長 L を M 分割して標本間隔 $\Delta x = L/M$ で標本化し離散的な式で(14)式を表現しなおし、ノイズ $n(m)$ を加えると

$$\begin{aligned} g(m, y) &= a(m, y) + c(m, y) \exp(2\pi j l_0 m / M) \\ &\quad + c^*(m, y) \exp(-2\pi j l_0 m / M) + n(m) \end{aligned} \quad (33)$$

となる。ここで、キャリア周波数 f_0 は $f_0 = l_0 / L$ を満足するように、信号区間長 L で決まる基本周波数の整数倍の周波数に選んでおくものとする。(33)式に対し、前述の原理に従い離散的なフーリエ変換を行ない、空間周波数フィルタリング処理とキャリアを除くためのスペクトルシフトの処理をほどこし、離散的なフーリエ逆変換をほどこすと最終的に次の複素信号 $\tilde{g}(m, y)$ を得る。

$$\tilde{g}(m, y) = c(m, y) + \tilde{n}(m) \quad (34)$$

前述の原理に従い(33)式の第1項の $a(m, y)$ と第3項の $c^*(m, y) \exp(-2\pi j l_0 m / M)$ はフィルタのパスバンド外の信号として除かれるが、ノイズを表わす最終項 $n(m)$ は広帯域の白色スペクトルをもつためフィルタのパスバンド内のスペクトル成分は取り除かれず $\tilde{n}(m)$ として残ることになる。中心周波数 l_0 のフィルタのパスバンドの幅を l_B とすると、フィルタを通過するノイズ成分 $\tilde{n}'(m)$ は

$$\tilde{n}'(m) = (1/M) \cdot \sum_{l=l_0-(l_B/2-1)}^{l_0+l_B/2} N(l) \exp(2\pi j l m / M)$$

で与えられ、これがさらにキャリア周波数 f_0 を除くために l_0 だけシフトされた結果

$$\begin{aligned} \tilde{n}(m) &= \tilde{n}'(m) \exp(-2\pi j l_0 m / M) \\ &= (1/M) \cdot \sum_{l=l_0-(l_B/2-1)}^{l_0+l_B/2} N(l) \exp[2\pi j (l-l_0) m / M] \end{aligned} \quad (35)$$

となる。(34)式に対し、(17)式の対数を計算すると、

$$\begin{aligned} \log [\hat{g}(m, y)] &= \log \{c(m, y)[1 + \tilde{n}(m)/c(m, y)]\} \\ &= \log [c(m, y)] + \log [1 + \tilde{n}(m)/c(m, y)] \\ &\approx \log [(1/2)b(m, y) + j\varphi(m, y) \\ &\quad + \tilde{n}(m)/c(m, y)] \end{aligned} \quad (36)$$

となる。ここで、再び $\log(1+z) \approx z$ ($|z| \ll 1$) の近似を用いた。計測される位相 $\hat{\varphi}(x, y)$ は、

$$\hat{\varphi}(m, y) = \varphi(m, y) + \text{Im} [\tilde{n}(m)/c(m, y)] \quad (37)$$

で与えられる。 $\langle n(m) \rangle = 0$ の仮定より $\langle N(l) \rangle = 0$ となるので(35)式より $\langle \tilde{n}(m) \rangle = 0$ となる。したがって $\langle \hat{\varphi}(m, y) \rangle = \varphi(m, y)$ が成立し不偏推定量となっている。(29)式と同様に計測誤差 $\Delta\varphi(m, y) = \hat{\varphi}(m, y) - \varphi(m, y)$ の分散は

$$\begin{aligned} \langle [\Delta\varphi(m, y)]^2 \rangle &= -\frac{1}{4} \left[\frac{\langle \tilde{n}(m)^2 \rangle}{c(m, y)^2} - \frac{2\langle |\tilde{n}(m)|^2 \rangle}{|c(m, y)|^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \tilde{n}^*(m)^2 \rangle}{c^*(m, y)^2} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

で与えられる。(35)式の $\tilde{n}(m)$ に対し Appendix の (A.3)~(A.6) の関係を適用すると、

$$\langle \tilde{n}(m)^2 \rangle = \langle \tilde{n}^*(m)^2 \rangle = 0 \quad (39)$$

$$\langle |\tilde{n}(m)|^2 \rangle = l_B \sigma^2 / M \quad (40)$$

これらと、 $|c(m, y)|^2 = (1/2)^2 b(x, y)^2$ を(38)式に代入して

$$\langle [\Delta\varphi(m, y)]^2 \rangle = 2l_B \sigma^2 / M b(m, y)^2 \quad (41)$$

を得る。(31)式と同じ S/N 比を用いると位相計測誤差の rms 値は最終的に

$$\sqrt{\langle [\Delta\varphi(m, y)]^2 \rangle} = \frac{\sqrt{l_B}}{\sqrt{M} S(m, y)} \quad (42)$$

で与えられる¹⁵⁾。

上に導いた式をもとにノイズと計測精度との関係について何が重要であるかを考えてみよう。まず、(32)式と(42)式に共通していえるのは当然のことながら S/N 比をよくすることである。しかし、これはたんに光量を増しさえすればよいということの意味しているわけではない。(31)式の S/N 比の定義は縞の強度そのものではなく peak-to-peak 値に基づいているので光量が同じなら縞のコントラストが精度を決定することになる。次に計測点数 M の平方根に比例して精度がよくなるのは互いに独立な誤差を含む計測における常識として理解することもできるが、分子の1または l_B と一緒に考えるほうがサブフリッジ計測の本質を理解することができる。いまここで考えているノイズは各計測点で互いに独立であるため Appendix (A.6) に示したように白色ノイズとなり、そのノイズのパワースペクトルは M 個の周波数に

対してすべて均等に振り分けられている。フリッジ走査法の場合は(9)式のように、基本周波数のスペクトル一つのみを取りだして利用しているので、計測に影響を与えるノイズのパワーは全体の $1/M$ となる。一方、フーリエ変換法の場合、空間的に位相変調された信号の帯域幅の l_B 個のスペクトルを取り出して利用しているので全体の l_B/M のパワーのノイズが計測に影響を与えることになる。平方根はたんにパワーという2乗量を振幅または位相というリニアディメンジョンに変換する rms の定義から生じるだけのものである。

以上の説明でフリッジ走査法やフーリエ変換法の最も本質的な点は何かを理解されたと思う。要するに、複素指数関数の直交性を利用して計測情報をもつ信号のスペクトル帯以外の全ノイズ成分を除去しているわけである。これに対して(21)式の方法では、その点における計測ノイズの全成分が $\varphi(x, y)$ の決定に影響を与えているので精度が悪いのである。ヘテロダイン法の場合はどうか。(5)式が時間 t に関して f_0 の単一周波数信号であることが本質的な点である。このため十分に狭帯域なフィルタを使用することによりノイズの影響を除くことができる。たんに時間測定の分解能が高いことがヘテロダイン法の高精度の理由ではないのである。

ところで、(32)式と(42)式を単純に比較すると、フィルタの帯域幅 $\sqrt{l_B}$ の分だけフーリエ変換法のほうが不利であるように思われる。しかし、フリッジ走査法の場合は1点の計測値を決定するのにその点で M 回の測定を(光路差を M 段階に変えながら)行なっているのに対し、フーリエ変換法では M 回の測定で M 点の計測値を決定している。つまり1点の計測値あたり1回の測定で済んでいるわけである。計測精度は同じ測定回数のもとで比較する必要がある。その意味ではフーリエ変換法のほうが逆に $\sqrt{M/l_B}$ 倍だけ有利となる。しかし、さらに実際的な側面を考えると、フリッジ走査法は空間的キャリアが不要なので実際の計測間隔は大きくてよいので計測間隔を k 個おきに間引いてその分だけ各点の測定回数を増せば計測精度はさらに \sqrt{k} だけ改善できる。この点を考慮すると、 $\sqrt{M/l_B k}$ が1より大きければフーリエ変換法が有利、小さければフリッジ走査法が有利となる。

具体例を示そう。文献9)のフーリエ変換法では $M = 1,024$ であり、 $l_B = 32$ である。同じ $1,024$ 回の測定回数のもとでこれと同等なフリッジ走査法は $k = 32$ 、すなわち計測点を32点に減らして各点を鏡を32ステップずつ動かす方法になる。これらの条件下で S/N 比を

$S(x, y)=10$ とすれば $\text{rms } \Delta\varphi=\lambda/350$ が得られる。文献 5) のフリンジ走査法では 32 点の計測点の各点で鏡を 1,024 ステップ移動しているので $\text{rms } \Delta\varphi=\lambda/2,000$ という計算になる。報告されている実験値がいずれもこれらの原理的限界に到達していないのは、まだ多くのシステム構成上の問題が残されていることを意味する。

5. む す び

サブフリンジ干渉計測の基礎原理について解説した。本文中でふれなかった他の重要な利点として、位相の符号が一意に決定できる、つまり波面の凹凸判別が自動的になされる点をあげておこう。なぜこれが可能かは、ニュートリングの読取り現場を再び思い浮べればすぐわかるであろう。原器をそっと押して縞が湧き出すか吸い込まれるかで凹凸を判別する、これをしているのがヘテロダイン法やフリンジ走査法にはかならない。あるいは、フィルトを与えて生じさせた細い縦縞の曲りの方向から凹凸を判別するのがフーリエ変換法だともいえる。このように新しい技術のヒントの多くは日常の現場の作業の中に見いだすことができる。問題はそれをどのような観点と意識をもって見るかという点にあるといえよう。

はじめに述べたように干渉計測に限らず一般に計測の本質は「対象物のもつ情報を他の不要な信号からいかに分離して取り出すか」にある、と筆者は考える。本講義では、それがサブフリンジ干渉計測でどのように実現されているかを示すことを目指した。この目的のために、必ずしも原論文に記されている説明方法にとらわれず、筆者自身の主観的な解釈を自由に加えて説明した。そのため、内容に偏りや誤りがあるかもしれない。ご批判を望む次第である。

Appendix

[定常で独立なノイズのスペクトルの性質]

$$\langle n(m)n(m') \rangle = \begin{cases} \sigma^2 & (m=m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases} \quad (\text{A1})$$

の性質をもつ定常で独立なノイズの離散的フーリエスペクトルを

$$N(l) = \sum_{m=0}^{M-1} n(m) \exp(-2\pi j l m / M) \quad (0 \leq l \leq M-1) \quad (\text{A2})$$

で定義すると、指数関数の直交性

$$\sum_{m=0}^{M-1} \exp[-2\pi j(l-l')m/M] = \begin{cases} M & (l=l') \\ 0 & (l \neq l') \end{cases} \quad (\text{A3})$$

より、以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \langle N(l)N(l') \rangle &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \langle n(m)n(m') \rangle \exp[-2\pi j(lm+l'm')/M] \\ &= \sigma^2 \sum_{m=0}^{M-1} \exp[-2\pi j m(l+l')/M] \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

$$= \begin{cases} M\sigma^2 & (l+l'=M) \\ 0 & (l+l' \neq M) \end{cases} \quad (\text{A4})$$

$$\begin{aligned} \langle N^*(l)N(l')^* \rangle &= [\langle N(l)N(l') \rangle]^* \\ &= \begin{cases} M\sigma^2 & (l+l'=M) \\ 0 & (l+l' \neq M) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

$$\begin{aligned} \langle N(l)N^*(l') \rangle &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \langle n(m)n(m') \rangle \exp[-2\pi j(lm-l'm')/M] \\ &= \sigma^2 \sum_{m=0}^{M-1} \exp[-2\pi j m(l-l')/M] \\ &= \begin{cases} M\sigma^2 & (l=l') \\ 0 & (l \neq l') \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

(A6)式は、異なる周波数のスペクトルが互いに無相関で、また、ノイズのパワースペクトルが l によらずホワイトであることを意味している。

文 献

- 1) 中島俊典：光学，9 (1980) 266.
- 2) N. A. Massie, R. D. Nelson and S. Holly: Appl. Opt., 18 (1979) 1797.
- 3) B. Culshaw and I. P. Giles: IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-30 (1982) 536.
- 4) H. Takasaki, N. Umeda and M. Tsukiji: Appl. Opt., 19 (1980) 435.
- 5) N. A. Massie: Appl. Opt., 19 (1980) 154.
- 6) J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White and J. Brangaccio: Appl. Opt., 13 (1974) 2693.
- 7) G. W. Johnson, D. C. Leinur and D. T. Moore: Opt. Eng., 18 (1979) 46.
- 8) D. T. Moore, R. Murray and F. B. Neves: Appl. Opt., 17 (1978) 3959.
- 9) M. Takeda, H. Ina and S. Kobayashi: J. Opt. Soc. Am., 72 (1982) 156.
- 10) S. Yokozeki, K. Patorski and K. Ohnishi: Opt. Commun., 14 (1975) 401.
- 11) 谷田貝豊彦, 栗田裕之, 出澤正徳, 齊藤弘義: 光学, 10 (1981) 470.
- 12) 豊岡 了, 富永 学: 光学 (投稿中).
- 13) 米村元喜, 川人 敬: 第 43 回応用物理学会予稿集(1982) p. 59.
- 14) J. H. Bruning: Optical Shop Testing, ed. D. Malacara (Wiley-Interscience, New York, 1978) p. 414.
- 15) 小林誠司: 電気通信大学修士論文 (1983) 第 4 章, p. 67.