

研究

トロイダル凹面格子の角特性関数

後藤 克也

信州大学工学部精密工学科 〒380 長野市若里 500

(1984年4月2日受理)

The Angle Characteristic Function of the General Concave Grating on Toroidal Blanks

Katsuya GOTO

Department of Precision Engineering, Faculty of Engineering, Shinshu University,
500, Wakasato, Nagano 380

The angle characteristic function of the general grating produced on toroidal blanks is determined to the fourth order of direction cosines of incident and diffracted light rays. In this function, the grating is specified by two radii of curvature of the blank and expansion coefficients of the generation function whose intersections with the blank are the grating grooves. The generation function is assumed to have one common symmetry plane with the blank. The optic axes in object and image spaces are taken to have the directions of the principal incident and the principal diffracted rays, respectively.

1. ま え が き

凹面回折格子は約100年前に Rowland によって考案され¹⁾, 結像の機能をもあわせつつ分光素子として広く用いられてきた。近年になって凹面格子はそのブランクとして球面だけでなくトロイダル面のような非球面上にも製作されるようになったり, また刻線方法もレーザー光の干渉縞を記録するいわゆるホログラフィック格子や機械刻線についても数値制御によって格子溝間隔を変化させたものなど多様になってきた。このため凹面格子の設計も重要な問題となってきた。

凹面格子の幾何光学については多くの研究があるが, ハミルトンの特性関数を用いたものは見当たらない。有名な Beutler²⁾ の論文において彼は自らの光路関数をハミルトンの意味の特性関数であると述べている。しかし, 彼の光路関数は光源点と像点の座標だけでなく格子上の点の座標を含んだままになっていて, 後述の力学における正準方程式に相当する(1)式を与えない。

特性関数を用いて光学系を解析することは幾何光学における理論的に最も整った古典的方法の一つである。本論文ではトロイダル面上に製作した一般凹面格子の角特性関数を導出する。

2. 特 性 関 数

特性関数には点特性関数, 角特性関数, 混合特性関数などがあり³⁻⁶⁾, 力学との類推からいうと点特性関数はハミルトン法に, 角特性関数はラグランジュ法に対応している。ある光学系において, 物空間の1点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ と像空間の1点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ とを結ぶ可能な曲線のうちフェルマーの原理を満足する光線となりうるものが一つだけあるとする。この光線の光路長を P_0 と P_1 の座標の関数として表わしたものを $V(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1)$ が点特性関数である。物空間と像空間において光線方向余弦とその光線のある点の屈折率との積を光学的方向余弦といい, それぞれ, p_0, q_0, m_0 と p_1, q_1, m_1 とすれば点特性関数 V は P_0 と P_1 において

$$p_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0} \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad (1)$$

および q_0, q_1, m_0, m_1 についても同様の式が成立する。角特性関数 T は V から次の式によって定義される。

$$T = V + \sum p_0 x_0 - \sum p_1 x_1 \quad (2)$$

すなわち $-T$ と V とは互いにルジャンドル変換の関係にある。 P_0 と P_1 のある領域が一様であれば T は p_0, q_0, p_1, q_1 の関数となり, 次の関係が成立する。

$$x_0 = \frac{\partial T}{\partial p_0}, \quad y_0 = \frac{\partial T}{\partial q_0}, \quad x_1 = -\frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad y_1 = -\frac{\partial T}{\partial q_1} \quad (3)$$

また角特性関数は物空間と像空間にとった定点 O_0 と O_1 から光線の最初と最後の部分に下した垂線の足を Q_0 , Q_1 としたとき Q_0 から Q_1 までの光線の光路長となる。

3. 凹面格子の表現

トロイダル面上に作る一般的な回折格子を考えよう。ここで一般的というのは格子溝が直線でもなくとも、また格子溝間隔が等間隔でもなくともよいということである。すなわち、不等溝間隔機械刻線格子やホログラフィック格子を総括的に取り扱う。ただし、格子溝はトロイダル面のもつ二つの対称面のうちの一つに対して対称であると仮定する。

曲率半径 R_1, R_2 をもつトロイダル面はその頂点が xy 面に原点において接するように xyz 系をとれば、次のように表わせる。

$$z = R_1 - \sqrt{[(R_1 - R_2) + \sqrt{R_2^2 - y^2}]^2 - x^2} \\ = x^2/2R_1 + y^2/2R_2 + x^4/8R_1^3 + y^4/8R_2^3 + x^2y^2/4R_1^2R_2 \quad (4)$$

格子溝は正負の整数 n をパラメータとする曲面族とブランク面(4)との交線であると考え、 xz 面に対して対称であるとする。この曲面族を

$$n = n(x, y, z) \quad (5)$$

とし、 x, y, z のべき級数に展開できるものとする。すなわち

$$n = \sum n_{ijk} x^i y^j z^k \quad (6)$$

ここで y の奇数べきは現われない。格子ブランクの式(4)の展開を(6)式に代入し、4次までとれば次のように書ける。

$$n = \sigma_0 x + (\sigma_1/2R_1)x^2 + (\sigma_2/2R_2)y^2 + (\sigma_3/6R_1^2)x^3 \\ + (\sigma_4/2R_1R_2)xy^2 + (\sigma_5/8R_1^3)x^4 + (\sigma_6/8R_2^3)y^4 \\ + (\sigma_7/4R_1^2R_2)x^2y^2 \quad (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= n_{100} \\ \sigma_1 &= n_{200} + n_{001}/2R_1 \\ \sigma_2 &= n_{202} + n_{001}/2R_2 \\ \sigma_3 &= n_{300} + n_{101}/2R_1 \\ \sigma_4 &= n_{120} + n_{101}/2R_2 \\ \sigma_5 &= n_{400} + n_{021}/2R_1 + n_{002}/4R_1^2 + n_{001}/8R_1^3 \\ \sigma_6 &= n_{040} + n_{021}/2R_2 + n_{002}/4R_2^2 + n_{001}/8R_2^3 \\ \sigma_7 &= n_{220} + n_{021}/2R_1 + n_{201}/2R_2 + n_{002}/2R_1R_2 + n_{001}/4R_1^2R_2 \end{aligned} \quad (8)$$

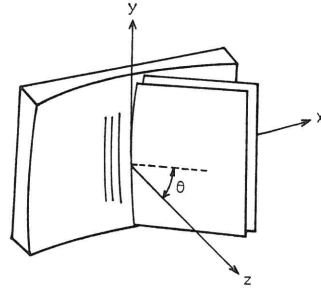


Fig. 1 Ruling of a variable spaced mechanical ruled grating.

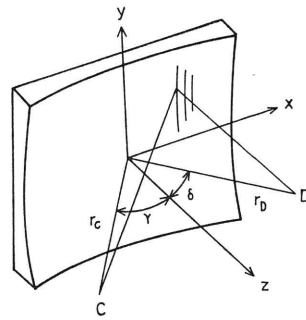


Fig. 2 Recording of a holographic grating.

普通の等間隔直線溝をもつ球面格子では $R_1 = R_2, \sigma_0 \neq 0, \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_7 = 0$ である。

yz 面に一定の傾角 θ をもつ平面にカッターが拘束されているような不等溝間隔格子⁷⁾ では曲面族は平面族となり (Fig. 1)

$$z = \{x - (nd_0 + n^2d_1 + n^3d_2 + n^4d_3)\} (1/\tan \theta) \quad (9)$$

このとき(6)式の n の展開係数は

$$\begin{aligned} n_{100} &= 1/d_0 & n_{001} &= -\tan \theta/d_0 \\ n_{200} &= -d_1/d_0^3 & n_{101} &= 2d_1 \tan \theta/d_0^3 \\ n_{002} &= -d_1 \tan^2 \theta/d_0^3 & n_{300} &= 2d_1^2/d_0^5 - d_2/d_0^4 \\ n_{201} &= -6d_1^2 \tan \theta/d_0^5 + 3d_2 \tan \theta/d_0^4 \\ n_{400} &= -5d_1^3/d_0^7 + 5d_1d_2/d_0^6 - d_3/d_0^5 \end{aligned} \quad (10)$$

その他の係数は 0。

xz 面に波長 λ_0 の記録光源 C ($r_c \sin \gamma, r_c \cos \gamma$), D ($r_D \sin \delta, r_D \cos \delta$) をおいて作るホログラフィック格子 (Fig. 2) では、曲面族は回転双曲面

$$n = (1/\lambda_0) \{[(x - r_c \sin \gamma)^2 + y^2 + (z - r_c \cos \gamma)^2]^{1/2} \\ - [(x - r_D \sin \delta)^2 + y^2 + (z - r_D \cos \delta)^2]^{1/2} - (r_c - r_D)\} \quad (11)$$

となり、その展開係数は、

$$\begin{aligned}
 n_{100} &= (1/\lambda_0)(-\sin \gamma + \sin \delta) \\
 n_{001} &= (1/\lambda_0)(-\cos \gamma + \cos \delta) \\
 n_{200} &= (1/2\lambda_0)(\cos^2 \gamma / r_c - \cos^2 \delta / r_D) \\
 n_{020} &= (1/2\lambda_0)(1/r_c - 1/r_D) \\
 n_{101} &= -(1/\lambda_0)(\sin \gamma \cos \gamma / r_c - \sin \delta \cos \delta / r_D) \\
 n_{002} &= (1/2\lambda_0)(\sin^2 \gamma / r_c - \sin^2 \delta / r_D) \\
 n_{300} &= (1/2\lambda_0)(\sin \gamma \cos^2 \gamma / r_c^2 - \sin \delta \cos^2 \delta / r_D^2) \\
 n_{120} &= (1/2\lambda_0)(\sin \gamma / r_c^2 - \sin \delta / r_D^2) \\
 n_{201} &= (1/2\lambda_0) \{ (\cos \gamma / r_c^2 - \cos \delta / r_D^2) \\
 &\quad - 3(\sin^2 \gamma \cos \gamma / r_c^2 - \sin^2 \delta \cos \delta / r_D^2) \} \\
 n_{021} &= (1/2\lambda_0)(\cos \gamma / r_c^2 - \cos \delta / r_D^2) \\
 n_{400} &= (1/\lambda_0) \{ -(1/8)(1/r_c^3 - 1/r_D^3) \\
 &\quad + (3/4)(\sin^2 \gamma / r_c^3 - \sin^2 \delta / r_D^3) \\
 &\quad - (5/8)(\sin^4 \gamma / r_c^3 - \sin^4 \delta / r_D^3) \} \\
 n_{220} &= (1/4\lambda_0) \{ 3(\sin^2 \gamma / r_c^3 - \sin^2 \delta / r_D^3) - (1/r_c^3 - 1/r_D^3) \} \\
 n_{040} &= -(1/8\lambda_0)(1/r_c^3 - 1/r_D^3) \tag{12}
 \end{aligned}$$

4. 一般トロイダル格子の角特性関数

$R_1, R_2, \sigma_0 \sim \sigma_7$ によって特徴づけられる一般凹面格子についての角特性関数を導こう。ここで物空間と像空間の屈折率は1とする。まず、物空間と像空間における座標系として次のような $x_0 y_0 z_0$ 系と $x_1 y_1 z_1$ 系を設定する。すなわち、それぞれの原点と y_0 軸と y_1 軸は(4)式と(5)式を表わすときに用いられた xyz 系の原点と y 軸に一致し、 z_0 軸と z_1 軸はそれぞれ xz 平面内にある入射主光線と回折主光線の方角をもつものである (Fig. 3)。

z_0 軸と z_1 軸をそれぞれ物空間と像空間の光軸として、 z_0 軸上と z_1 軸上にそれぞれ定点 O_0 と O_1 を設定し、 $x_0 y_0 z_0$ 系に対して方向余弦 p_0, q_0, m_0 をもつ入射光線へ O_0 から下した垂線の足を Q_0 とし、 $x_1 y_1 z_1$ 系に対して方向余弦 p_1, q_1, m_1 をもつ回折光線へ O_1 から下した垂線の足を Q_1 とし、さらに格子上の入射点を P

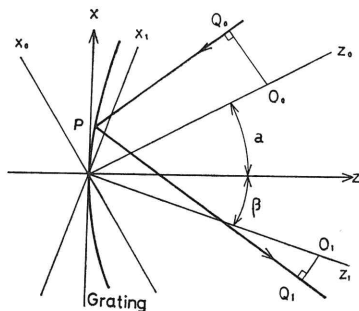


Fig. 3 Coordinate systems for the angle characteristic function.

とすれば、角特性関数は Q_0 から Q_1 までの光線に沿った光路長に格子であるための $mn\lambda$ を加えて³⁻⁶⁾

$$\begin{aligned}
 T &= [Q_0 P] + [P Q_1] + mn\lambda \\
 &= [x_0 p_0 + y_0 q_0 + (z_0 - r_0) m_0] \\
 &\quad - [x_1 p_1 + y_1 q_1 + (z_1 - r_1) m_1] + mn\lambda \tag{13}
 \end{aligned}$$

ここで、 (x_0, y_0, z_0) と (x_1, y_1, z_1) は入射点 P の $x_0 y_0 z_0$ 系と $x_1 y_1 z_1$ 系における座標であり、 $[O_0 O_1] = r_0$, $[O_1 O_1] = r_1$, また m は回折次数、 λ は波長である。

ここで、

$$\begin{aligned}
 m_0 &= -1 + (p_0^2 + q_0^2)/2 + (p_0^2 + q_0^2)^2/8 \\
 m_1 &= +1 - (p_1^2 + q_1^2)/2 - (p_1^2 + q_1^2)^2/8 \tag{14}
 \end{aligned}$$

また、主光線の入射角と回折角をそれぞれ α と β とすれば、

$$\sin \alpha + \sin \beta = m\lambda\sigma_0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x \cos \alpha - z \sin \alpha \\
 z_0 &= x \sin \alpha + z \cos \alpha \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x \cos \beta - z \sin \beta \\
 z_1 &= x \sin \beta + z \cos \beta \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$y_0 = y_1 = y \tag{18}$$

ここで入射点の座標 x, y を p_0, q_0, p_1, q_1 によって表わさなければならない。それには凹面格子を小平面格子の集まりと見なして格子方程式を適用する。

格子上の各点において格子溝に垂直と平行な単位ベクトルを \mathbf{A} と \mathbf{G} とし、その点における格子定数を d とすれば、格子方程式は⁸⁾

$$\begin{cases}
 A_x(L_0 - L_1) + A_y(M_0 - M_1) + A_z(N_0 - N_1) + m\lambda/d = 0 \\
 G_x(L_0 - L_1) + G_y(M_0 - M_1) + G_z(N_0 - N_1) = 0
 \end{cases} \tag{19}$$

ここで L_0, M_0, N_0 と L_1, M_1, N_1 はもとの xyz 系に関しての入射と回折の光線の方角余弦であり、 p_0, q_0, p_1, q_1 とは次式のように関係している。

$$\left. \begin{aligned}
 L_0 - L_1 &= (\sin \alpha + \sin \beta) + (p_0 \cos \alpha - p_1 \cos \beta) \\
 &\quad - (1/2)[\sin \alpha(p_0^2 + q_0^2) + \sin \beta(p_1^2 + q_1^2)] \\
 M_0 - M_1 &= q_0 - q_1 \\
 N_0 - N_1 &= -(\cos \alpha + \cos \beta) + (p_0 \sin \alpha - p_1 \sin \beta) \\
 &\quad + (1/2)[\cos \alpha(p_0^2 + q_0^2) + \cos \beta(p_1^2 + q_1^2)]
 \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

\mathbf{A} と \mathbf{G} の成分は、格子面の単位法線ベクトルを \mathbf{S} として、 $\mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{S}$ が直交系をなすこと、格子溝が xz 面に対称であることから、次のような形に展開できる。

$$\left. \begin{aligned}
 A_x &= 1 - (1/2R_1^2)x^2 - (g_1^2/2R_2^2)y^2 - (g_1g_2/R_1R_2^2)xy^2 \\
 A_y &= -(g_1/R_2)y - \{(1+g_2)/R_1R_2\}xy \\
 &\quad - \{(g_1+2g_3)/(2R_1^2R_2)\}x^2y + \{(g_1-g_4)/2R_2^3\}y^3 \\
 A_z &= (1/R_1)x - (g_1/R_2^2)y^2 \\
 &\quad - \{[R_1(2+g_1^2+2g_2)-R_2]/2R_1^2R_2^2\}xy^2
 \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

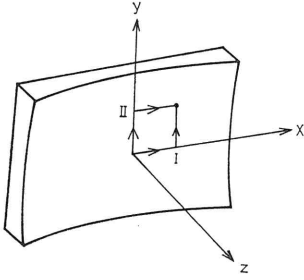


Fig. 4 Two paths for groove number enumeration.

$$\left. \begin{aligned} G_x &= (g_1/R_2)y + (g_2/R_1R_2)xy + (g_3/R_1^2R_2)x^2y \\ &\quad + (g_4/2R_2^3)y^3 \\ G_y &= 1 - \{(1+g_1^2)/2R_2^2\}y^2 - \{g_1(1+g_2)/R_1R_2^2\}xy^2 \\ G_z &= (1/R_2)y + (g_1/R_1R_2)xy + \{(1+2g_2)/2R_1^2R_2\}x^2y \\ &\quad - (g_1^2/2R_2^3)y^3 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

なお、 S の成分は

$$\left. \begin{aligned} S_x &= -(1/R_1)x + \{(R_1-R_2)/2R_1^2R_2^2\}xy^2 \\ S_y &= -(1/R_2)y \\ S_z &= 1 - (1/2R_1^2)x^2 - (1/2R_2^2)y^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

格子定数 d の逆数は格子溝の対称性から次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} 1/d &= \sigma_0 + (\sigma_x/R_1)x + (\sigma_{xx}/2R_1^2)x^2 \\ &\quad + (\sigma_{yy}/2R_2^2)y^2 + (\sigma_{xx}/R_1^3)x^3 \\ &\quad + (\sigma_{xy}/R_1R_2^2)xy^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

次に(21), (22), (24)式の諸式に現われる $g_1 \sim g_4, \sigma_x \sim \sigma_{xy}$ と格子を特徴づけるパラメータ $R_1, R_2, \sigma_0 \sim \sigma_7$ との関係を求める。

格子上の任意の1点の格子溝番号 n は、格子の中心、すなわち座標原点からその点まで進むときによぎる格子溝を数えていけばよい。Fig. 4 の I の径路で進めば、

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{1}{d} \left(A_x + A_z \frac{x}{R_1} \right) dx + \int \frac{1}{d} \left(A_y + A_z \frac{y}{R_2} \right) dy \\ &= \sigma_0 x + (\sigma_x/2R_1)x^2 + \{(\sigma_0 + \sigma_{xx})/6R_1^2\}x^3 \\ &\quad + \{(\sigma_x + 2\sigma_{xx})/8R_1^3\}x^4 - (\sigma_0 g_1/2R_2)y^2 \\ &\quad - \{(\sigma_x g_1 + \sigma_0 g_2)/2R_1R_2\}xy^2 \\ &\quad - [\{g_1\sigma_{xx} + 2\sigma_x g_2 + \sigma_0(g_1 + 2g_3)\} / 4R_1^2R_2] x^2 y^2 \\ &\quad - [\{g_1 g_{yy} + \sigma_0(g_1 + g_4)\} / 8R_2^3] y^4 \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、第1の積分では被積分関数は $y=0$ とおき、第2の積分では x を一定として積分する。IIの径路を進めば、

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{1}{d} \left(A_y + A_z \frac{y}{R_2} \right) dy + \int \frac{1}{d} \left(A_x + A_z \frac{x}{R_1} \right) dx \\ &= \sigma_0 x + (\sigma_x/2R_1)x^2 + \{(\sigma_0 + \sigma_{xx})/6R_1^2\}x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \{(\sigma_x + 2\sigma_{xx})/8R_1^3\}x^4 - (\sigma_0 g_1/2R_2)y^2 \\ &+ \{(\sigma_{yy} - g_1^2 \sigma_0)/2R_2^2\}xy^2 \\ &+ [\{2\sigma_{xy} - g_1^2 \sigma_x - 2g_1 \sigma_0(1+g_2)\} / 4R_1R_2^2] x^2 y^2 \\ &- [\{g_1 \sigma_{yy} + \sigma_0(g_1 + g_4)\} / 8R_2^3] y^4 \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、第1の積分では被積分関数は $x=0$ とおき、第2の積分では y を一定として積分する。(25)式と(26)式は同じ n を与えるから、(25)式と(26)式を(7)式と比べることにより、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x \\ \sigma_2 &= -g_1 \sigma_0 \\ \sigma_3 &= \sigma_0 + \sigma_{xx} \\ \sigma_4 &= -(g_1 \sigma_x + g_2 \sigma_0) = (R_1/R_2)(\sigma_{yy} - g_1^2 \sigma_0) \\ \sigma_5 &= \sigma_x + 2\sigma_{xx} \\ \sigma_6 &= -[g_1 \sigma_{yy} + (g_1 + g_4) \sigma_0] \\ \sigma_7 &= -[g_1 \sigma_{xx} + 2g_2 \sigma_x + (g_1 + 2g_3) \sigma_0] \\ &= (R_1/R_2)[2\sigma_{xy} - g_1^2 \sigma_x - 2g_1(1+g_2)\sigma_0] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

格子方程式(19)式に(14), (20)~(24)の諸式を代入し、 x, y が p_0, q_0, p_1, q_1 のべき級数で展開できると仮定すれば、 p_0, q_0, p_1, q_1 の2次までの展開は(27)式を用いれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x &= (R_1/A)u_1 + m\lambda\sigma_3(R_1/2A^3)u_1^2 - (R_1/A^2)u_1u_2 \\ &\quad + m\lambda\sigma_4(R_2/2AB^2)v^2 \\ &\quad + (R_1/2A)[\sin\alpha(p_0^2 + q_0^2) + \sin\beta(p_1^2 + q_1^2)] \\ y &= (R_2/B)v + m\lambda\sigma_4(R_2/AB^2)u_1v - (R_2/B^2)u_2v \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= p_0 \cos\alpha - p_1 \cos\beta, \quad u_2 = p_0 \sin\alpha - p_1 \sin\beta, \\ v &= q_0 - q_1, \\ A &= \cos\alpha + \cos\beta - m\lambda\sigma_1, \\ B &= \cos\alpha + \cos\beta - m\lambda\sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

角特性関数 T の p_0, q_0, p_1, q_1 の4次までの展開を求めるためには、 x, y の p_0, q_0, p_1, q_1 の3次の項は(13)式において打ち消されるので不要である。(4), (15)~(18)式と(28)式を(13)式に代入すれば角特性関数 T が求まる。 T を p_0, q_0, p_1, q_1 の次数によって

$$T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + T^{(4)} \quad (30)$$

とおけば、(29)式を用いて

$$T^{(0)} = r_0 + r_1 \quad (30a)$$

$$T^{(1)} = 0 \quad (30b)$$

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= (1/2)\{(R_1/A)u_1^2 + (R_2/B)v^2\} \\ &\quad - (1/2)\{r_0(p_0^2 + q_0^2) + r_1(p_1^2 + q_1^2)\} \end{aligned} \quad (30c)$$

$$\begin{aligned} T^{(3)} &= -(1/2)[(R_1/A^2)u_1^2 + (R_2/B^2)v^2]u_2 \\ &\quad + (R_1m\lambda\sigma_3/6A^3)u_1^3 + (R_2m\lambda\sigma_4/2AB^2)u_1v^2 \end{aligned}$$

$$+(R_1/2A)\omega_1^2 u_1 \quad (30 d)$$

$$\begin{aligned} T^{(4)} = & [-(\cos \alpha + \cos \beta) + (m\lambda\sigma_3)^2/A \\ & + m\lambda\sigma_5](R_1/8A^4)u_1^4 + [-(\cos \alpha + \cos \beta) \\ & + (R_2/R_1)\{(m\lambda\sigma_4)^2/A\} + m\lambda\sigma_6](R_2/8B^4)v^4 \\ & + [-(\cos \alpha + \cos \beta) + (m\lambda)^2\sigma_3\sigma_4/A + 2(m\lambda\sigma_4)^2/B \\ & + m\lambda\sigma_7](R_2/4A^2B^2)u_1^2v^2 + (1/2)[(R_1/A^3)u_1^2 \\ & + (R_2/B^3)v^2]u_2^2 - [(R_1m\lambda\sigma_3/A^3)u_1^2 \\ & + (R_2m\lambda\sigma_4/B^2)(1/A + 2/B)v^2](u_1u_2/A) \\ & + [(R_1m\lambda\sigma_3/A^2)u_1^2 - 2(R_1/A)u_1u_2 \\ & + (R_2m\lambda\sigma_4/B^2)v^2](\omega_1^2/4A) + (R_1/8A)\omega_1^4 \\ & + (1/4)[(R_1/A^2)u_1^2 + (R_2/B^2)v^2]\omega_2^2 \\ & - (r_0/8)(p_0^2 + q_0^2)^2 - (r_1/8)(p_1^2 + q_1^2)^2 \quad (30 e) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \sin \alpha (p_0^2 + q_0^2) + \sin \beta (p_1^2 + q_1^2) \\ \omega_2^2 = \cos \alpha (p_0^2 + q_0^2) + \cos \beta (p_1^2 + q_1^2) \end{cases} \quad (31)$$

回転対称軸をもたない系であるから $T^{(3)}$ は 0 にならない。

5. focal curves

$T^{(2)}$ まで考えると focal curve の式が得られることを示す⁴⁾。(30)式と(3)式とから

$$\begin{aligned} x_0 = \partial T^{(2)}/\partial p_0 & = \{(R_1/A)\cos^2\alpha - r_0\} p_0 \\ & - (R_1/A)\cos \alpha \cos \beta p_1 \\ x_1 = -\partial T^{(2)}/\partial p_1 & = -\{(R_1/A)\cos^2\beta - r_1\} p_1 \\ & + (R_1/A)\cos \alpha \cos \beta p_0 \end{aligned}$$

前式から p_1 を求め、後式に代入すれば、

$$\begin{aligned} x_1 = & \frac{1}{(R_1/A)\cos \alpha \cos \beta} \left[\left\{ \left(\frac{R_1}{A} \cos^2 \alpha - r_0 \right) \left(\frac{R_1}{A} \cos^2 \beta - r_1 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{R_1}{A} \cos \alpha \cos \beta \right)^2 \right\} p_0 - x_0 \left(\frac{R_1}{A} \cos^2 \beta - r_1 \right) \right] \end{aligned}$$

x_0 にある物体の像が x_1 にできるためには、この式の p_0 の係数が 0 でなければならぬ。すなわち、

$$\begin{aligned} \{(R_1/A)\cos^2 \alpha - r_0\} \{(R_1/A)\cos^2 \beta - r_1\} \\ - \{(R_1/A)\cos \alpha \cos \beta\}^2 = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\cos^2 \alpha / r_0 + \cos^2 \beta / r_1 - A/R_1 = 0 \quad (32)$$

が得られる。また、

$$y_0 = \partial T^{(2)}/\partial q_0, \quad y_1 = -\partial T^{(2)}/\partial q_1$$

から同様に

$$1/r_0 + 1/r_1 - B/R_2 = 0 \quad (33)$$

(32), (33)の両式はよく知られた凹面格子の focal curve の式の一般化となっている⁹⁾。

6. む す び

トロイダル面上に製作した一般凹面格子をトロイダル面の二つの曲率半径とトロイダル面との交線が格子溝となるような曲面族によって特徴づけ、その角特性関数を4次まで導いた。

ここで導いた角特性関数は特別な場合として単一反射球面の角特性関数を含んでいることは当然であるが、さらにフレネルゾンプレート¹⁰⁾の角特性関数をも与える。このためにはホログラフィック格子において、 $\gamma = \delta$, $rc \neq rd$, $\alpha = \beta$, $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow \infty$ とすればよい。このとき(30)式に現われている R_1 と R_2 は他の因子のなかに含まれている R_1 と R_2 によって打ち消される。

この角特性関数は凹面格子による結像の解析と凹面格子や凹面格子分光器の設計に対して一つの有力な方法を提供するものである。

著者は2凹面格子系の解析と設計に対してこの角特性関数を用いたが、このことについては別に発表したい。

本研究に対して文部省の科学研究費補助金(昭和56年度総合研究 A「回折格子の光学的物理的特性の研究とその応用」(5635002))を受けた。ここに記して感謝の意を表する。

文 献

- 1) H. A. Rowland: *Philos. Mag.*, **13** (1882) 469.
- 2) H. G. Beutler: *J. Opt. Soc. Am.*, **35** (1945) 311.
- 3) M. Born and E. Wolf: *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1964) Chap. IV, § 1.
- 4) R. K. Luneburg: *Mathematical Theory of Optics* (University of California Press, Berkeley, 1966) §§ 19-22.
- 5) H. A. Buchdahl: *An Introduction of Hamiltonian Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1970).
- 6) R. J. Pegis: *Progress in Optics*, Vol. I, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1961) p. 3.
- 7) T. Harada, S. Moriyama and T. Kita: *Jpn. J. Appl. Phys.*, **14**, Suppl. 14-1 (1975) 175.
- 8) K. Goto, Y. Kato and K. Togawa: *Opt. Acta*, **26** (1979) 841.
- 9) H. Noda, T. Namioka and M. Seya: *J. Opt. Soc. Am.*, **64** (1974) 1031.