講義のノートから

吉　原　邦　夫

名古屋大学工学部応用物理学教室　〒464 名古屋市千種区不老町 1

永年にわたって光学の講義をしていると，ときどき妙なことに気づく．昔からの教科書の内容に基づいて教えていればよいようなものだが，どうも折々腑に落ちないことに出会う．その一つ二つをここにあげてみよう．筆者の不勉強や思い違いもあるかもしれないが，多少とも興味をもっていただければ幸いである．

1.　結晶光学の公式の duality

結晶光学にはずいぶんいろいろな公式が出てくる．いちいち覚えるのは大変である．幸い，duality という性質があって，ある公式の中の量をそれぞれ対応する別の量で置き換えてもやはり正しい公式が得られるというのは有難い話である．以下記号の説明を省くため，ボルン・ウルフの本の記号を借用する．すると，たとえば，つぎの上の行の量を下の行の量にそれぞれ置き換えればよい．

$$\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{B},\ n,\ v_p,\ \varepsilon_x,\ v_x$$
$$\boldsymbol{D},\ \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{H},\ 1/n_r,\ 1/v_r,\ 1/\varepsilon_x,\ 1/v_x$$

このようにして，たとえばフレネルの法線速度の式からただちに光線速度の式が得られる．ところが，困ったことに，教科書によって対応のさせ方が少し違うのである．ボルン・ウルフの本では，波面法線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{s}$ には光線速度方向の単位ベクトルの符号を変えたもの $-\boldsymbol{t}$ を対応させているが，ゾンマーフェルトの理論物理学講座やパウリの物理学講座の中の光学の本では，符号を変えない対応をとっている．どちらが正しいのだろうか？　いろいろな公式をあたってみると，ほとんど $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ の成分が二乗の形で含まれているので，どちらでもよいようにみえる．ボルン・ウルフが符号を変えているのは，$\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ で表わすつぎの式

$$\boldsymbol{s}=\{D^2\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{D}\}/\sqrt{D^2\{E^2D^2-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})^2\}} \qquad (1)$$

において，$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ を入れかえると $-\boldsymbol{t}$ となることに基づいている．すると，ボルン・ウルフが正しくてゾンマーフェルトやパウリが誤っているのだろうか．ところが実はそうでない．結晶光学でマックスウェルの式に平面波の式を代入して得られる，どの本にもあるつぎの式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=-n\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{B}&=n\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}\end{aligned}\quad(\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}) \qquad (2)$$

はおなじみであるが，これに dual なつぎの式はふしぎなことにパウリの本にしか載っていない．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=-(\boldsymbol{t}/n_r)\times\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{H}&=(\boldsymbol{t}/n_r)\times\boldsymbol{D}\end{aligned} \qquad (3)$$

(2)式から(3)式を得るには $\boldsymbol{s}\rightarrow\boldsymbol{t}$ でなくてはならない．(3)式の正しいことはパウリの本にある計算を確かめればわかる．

このボルン・ウルフの本との矛盾は，duality の成り立つ根拠を考えれば理解されると思う．(2)式からは波面法線に関連した式が，(3)式からは光線に関連した式が，まったく対応した計算でつぎつぎに出てくる．もとの式が dual なのだから，これから対応した操作で出てくる式が dual なのは当然である．しかし，これと異なるプロセスで導かれた式が dual であるという保証はない．(1)式がその例であることは途中の計算をみればすぐわかる．また，対応した計算をしても，なぜ符号が逆になるのか理由も確かめることができる．

結論として，(3)式が正しい限り，ボルン・ウルフの本の対応のさせ方は間違っているといってよいのではないか．

2.　レーリー・ゾンマーフェルトの光の回折の公式について

光の回折の計算には，古くから知られたキルヒホッフの公式が用いられ，ボルン・ウルフの本にもこれによる説明が載っている．しかし，近頃はレーリー・ゾンマーフェルトの公式がフーリエ光学やホログラフィーの計算に好んで使われているようである．この公式は昔から応用数学の本には載せられたこともあったが，グッドマンがその「フーリエ光学入門」に用いてから，ポピュラーになったように思われる．

これは，平面に開けた回折孔の場合，回折理論の式に出てくる波動関数 U と対になった関数 U' として，$(\exp iks)/s$ をとらず，回折孔平面について観測点 P と

鏡像となる点 P′ を考え，これから体積積分をする点までの距離を s' として，$U'=(\exp iks)/s-(\exp iks')/s'$ と置くのである．こうすると P 点の波動 $U(P)$ は

$$U(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint U\frac{\exp iks}{s}\cos(n,\ s)\,dS \qquad (4)$$

となり，回折孔の各点から球面波が送り出され，その重なりとして回折像が生ずるという，ホイヘンス・フレネルの原理そのままの形である．これは直観的でわかりやすい結果である．さらに，この導き方は近似でなく実際上正確であり，また回折孔のある面の観測点側で $\partial U/\partial n=0$ とすることにより生ずる数学的困難もない．万事好都合に見えるが，実は物理的に大きな難点がある．それは光源側に戻る波が現われるということである．

もともと，ホイヘンスの原理については，初めから光源のほうへ逆戻りする波があるということが指摘されていた．フレネルは inclination factor を導入してこの難点を避けたが，それははなはだ人為的なものであった．この点を完全に解決したのがキルヒホッフの理論である．回折積分の式の導出からすぐわかるように，観測点Pが積分する表面の外側（すなわち光源側）にあるときは，$(\exp iks)/s$ は体積積分内に特異点をもたず，体積積分，したがって面積分は自動的にゼロとなって逆に進む波は現われない．ところが，レーリー・ゾンマーフェルトの理論では，P点が光源側にあるとき，$(\exp iks)/s$ は特異点をもたないが，$(\exp iks')/s'$ が体積積分内に特異点をもつので積分はゼロにならない．このことは，問題が回折孔のある平面についてまったく対称であることから，どちらの側へも同じ波が生ずるはずとのことから当然である．

レーリー・ゾンマーフェルトの方法の別の欠点は，実際には平面に開けた回折孔以外には応用できず，また適当なグリーン関数があって応用できたとしても，elementary wave が球面波とならないことであろう．

キルヒホッフの回折積分の式から，ホイヘンス・フレネルの形の回折の計算式は，多くの教科書にあるような近似によって導かれる．この場合は近似式で正確な式ではない．

レイリー・ゾンマーフェルトのやり方では，なぜ妙なことになるか，その理由はよくわからない．おそらく，表面積分で法線方向の微分 $\partial U/\partial n$ がなくなるということが，面の裏表の違い，すなわち進行方向という性質を失わせてしまうためであろう．つまり，U' として上に述べたような関数を用いるのは，非常に巧妙なように見えて，実は大変まずいということである．これについては，もともとのキルヒホッフの公式に立ち戻って考えるのが有益であると思われる．この式はヘルムホルツの式 $\Delta U+k^2U=0$ からではなく，波動方程式から出発するもので，その古典的証明はすこぶるわかりにくい．その結果は遅延ポテンシャルの計算と同じく，t の代りに $t-s/c$ を代入した式の積分となり，波の時間的な進行をはっきり表わしている（この証明はたとえばプランクの理論物理学汎論参照．ボルン・ウルフの本では単色光のフーリエ合成として導いている）．この式中の波動関数を $U(x,y,z)\exp(-i\omega t)$ とおくと，通常のキルヒホッフの回折積分の式となるから，やはりキルヒホッフの式のほうが正解のように思われる．

レーリー・ゾンマーフェルトの方法で，U' として上と違って差を和にするやり方があるが，この場合は回折孔上で波動関数の法線方向の微分だけがきいてくるので，状況はいわば回折孔平面に反対称になり，やはり逆戻りする波が現われるであろう．

キルヒホッフの公式を用いるとき，通常光源は点状とするので回折孔での振幅分布は特殊なものになるが，適当な光源分布を仮定し，その回折孔より見た視角が小さいとすれば，孔での振幅分布が任意の場合にも適用され(4)式の cos を $\{1+\cos(n,\ s)\}/2$ で置き換えたものとなる．したがって，レーリー・ゾンマーフェルトの方法のほうが一般的であるわけではない．結局，この方法では数学的矛盾はなくなるが，物理的矛盾が生じ，最後の計算式もキルヒホッフと同じになってしまうので，一時これによって講義をしていたが，最近またキルヒホッフに戻って話をしている．

(1984年1月10日受理)