研　究

# ガウスビームとその変換

丸　山　修　治

日本自動制御(株)　〒223 横浜市港北区綱島東 4-10-4

(1983年8月26日受理)

# Gaussian Beams and Their Transformation

Shuji MARUYAMA

NJS Corp., 4-10-4, Tsunashimahigashi, Kohoku-ku, Yokohama 223

A new formula to describe the behavior of a Gaussian beam transformed by a lens is presented. In this case, rectangular coordinate systems are taken before and behind the lens such that respective origins are placed at the front and back focal points of the lens. As a result, an expression similar to the Newton's formula in geometrical optics is obtained between complex beam parameters on both sides of the lens. Several relations between quantities before and after the transformation can be derived from the formula and those are useful tools for considering mode matching of a laser beam.

## 1. まえがき

ガウスビームの形態とレンズによる変換についてはすでに多くの文献があり，waist の位置と半径の二つの量を組み合わせた複素数ビームパラメータを導入すると式の誘導が容易となり形が簡素化されることが知られている．従来はレンズによる変換前後の空間の座標原点を共通にしてレンズの位置においていた．筆者は両空間の座標原点をレンズの前方・後方焦点において変換の式を書き換えることを試みた．その結果，レンズによる変換前後の複素数パラメータに関して幾何光学のニュートンの結像式に似た形の公式が得られた．またこの新しい公式によればレーザービームを実際に応用する上での多くの有益な関係が導かれることがわかった．以下その詳細を報告する．

## 2. ガウスビームの関係式

まず一般に用いられている関係式をまとめておく[1-3]．ガウスビームの資料は電気関係の刊行物に発表されたものが多く，座標の符号については幾何光学で広く用いられているものと異なる．ここでは光学のものを採用し，ビームが左から右へ進むとして光軸を $z$ 軸にとり，基準点の右にある点の符号を＋，左にあるものを－にとる．球面の半径 $R$ の符号は，中心が球面の右にあれば＋，左にあればーにとる．したがって幾何光学のレンズによる結像についてのニュートンの式は，レンズの前方・後方焦点から物点・像点までの距離を $z, z'$ としレンズの焦点距離を $f$ とするとき

$$z\cdot z'=-f^2 \tag{1}$$

またガウスの結像式はレンズを基準にとり物点・像点までの距離を $R$, $R'$ としたとき

$$-(1/R)+(1/R')=1/f \tag{2}$$

である．この(2)式はガウスビームをレンズで変換するとき，レンズを通る直前・直後の波面の曲率半径を $R$, $R'$ としたときの関係式である．

回転対称なレーザービームの軸を $z$ 軸にとり，座標原点を waist の位置におき waist の半径を $w_0$，軸上の点 $z$ におけるビーム半径を $w(z)$，波面の曲率半径を $R(z)$ とすれば

$$w^2(z)=w_0^2[1+(\lambda z/\pi w_0^2)^2] \tag{3}$$

$$R(z)=-z[1+(\pi w_0^2/\lambda z)^2] \tag{4}$$

が成り立つ．

$z$ の位置におけるビームを表わすのには複素数ビームパラメータ

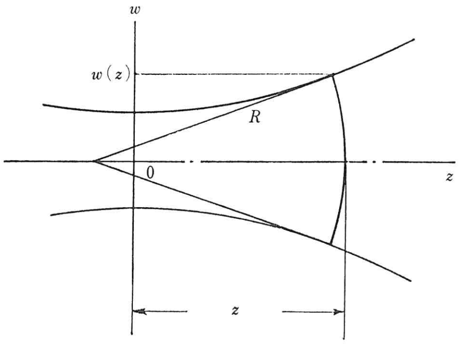


**Fig. 1** Contour of a Gaussian beam.

$$q(z)=z+i(\pi w_0^2/\lambda) \tag{5}$$

あるいはその逆数

$$1/q(z)=-[1/R(z)+i\{\lambda/\pi w^2(z)\}] \tag{6}$$

が用いられている.

焦点距離$f$のレンズによってガウスビームを変換するとき，レンズの前方焦点から入射ビームの waist までの距離を $z_0$, 後方焦点から射出ビームの waist までの距離を $z_0'$ として従来使われている変換式を書き換えると

$$z_0'=-z_0[f^2/\{z_0^2+(\pi w_0^2/\lambda)^2\}], \tag{7}$$

$$w_0'^2=w_0^2[f^2/\{z_0^2+(\pi w_0^2/\lambda)^2\}] \tag{8}$$

となる.

## 3.　変換式の新しい表現

(3)～(8)式を見ると$w$は2乗の形，しかも $\pi w^2/\lambda$ という形で含まれているのが目につく. $\pi w^2/\lambda$ はビームの断面積に等しく1辺の長さが$\lambda$である矩形の他の辺の長さであり，ビームを特徴づけるもので次のように$b$とおく.

$$b_0=\pi w_0^2/\lambda,\quad b(z)=\pi w^2(z)/\lambda \tag{9}$$

これを waist サイズ，ビームサイズと名づけておく.

(3)式の両辺に $\pi/\lambda$ をかけると

$$b(z)=(z^2+b_0^2)/b_0 \tag{10}$$

$$R(z)=-(z^2+b_0^2)/z \tag{11}$$

となり，$b_0$ と $b(z)$ を用いると

$$q(z)=z+ib_0 \tag{12}$$

$$1/q(z)=-[1/R(z)+i\{1/b(z)\}] \tag{13}$$

となる. ここまでの$z$は waist からの距離である.

次に座標原点をそれぞれのレンズの前方焦点Fと後方焦点 F′ においた変換式を導く. waist の座標を $z_0$, $z_0'$ また任意の点 $z$, $z'$ における波面の曲率半径を $R(z)$, $R'(z')$ とおけば

$$\begin{cases} b(z)=\{(z-z_0)^2+b_0^2\}/b_0, \\ \quad R(z)=-\{(z-z_0)^2+b_0^2\}/(z-z_0) \\ q(z)=(z-z_0)+ib_0, \\ \quad 1/q(z)=-[1/R(z)+i\{1/b(z)\}] \end{cases} \tag{14}$$

となる. 変換後の量についても同じ形の式が成り立つ.

$z=z'=0$ とおき F, F′ における量に添字 F を加えて $b_F$, $R_F$, $q_F$ で表わすと

$$\begin{cases} b_F=(z_0^2+b_0^2)/b_0, \quad R_F=(z_0^2+b_0^2)/z_0 \\ q_F=-z_0+ib_0, \quad 1/q_F=-\{1/R_F+i(1/b_F)\} \end{cases} \tag{15}$$

となる. 変換後のものには ′ がつく.

とくに入射ビームの waist が F にあるときは $z_0=0$ で

$$\begin{cases} b_F=b_0, \quad R_F=\infty \\ q_F=ib_0, \quad 1/q_F=-i(1/b_0) \end{cases} \tag{16}$$

となる.

次にガウスビームがレンズを通過する直前・直後の波

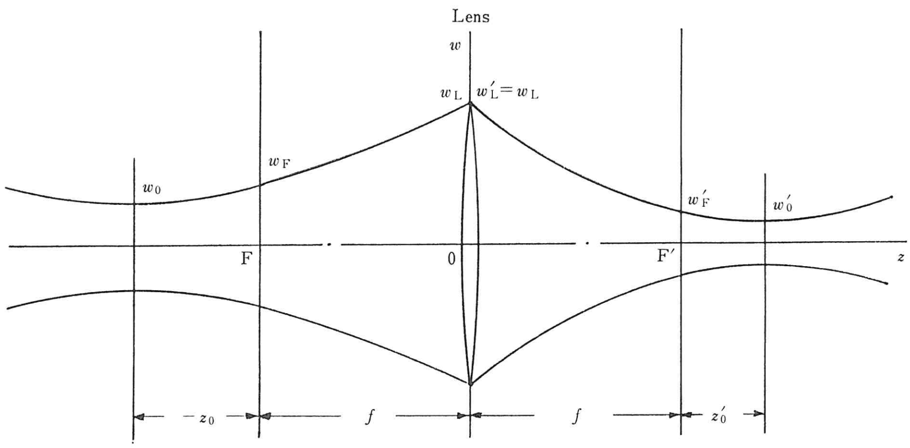


**Fig. 2** Beam transformation by a thin lens.

面の曲率半径の間に(2)式が成り立ち，またビーム径が等しいということをもとにして複素数ビームパラメータを使う新しい変換式を求め，その式から waist に関する変換式(7)，(8)式が得られることを示す．

レンズの位置における量は $z=f$, $z'=-f$ とおくことによって求められ，それらには添字 L を加えて表わすと (14)式から次のようになる．

$$\begin{cases} q_L=(f-z_0)+ib_0, \quad 1/q_L=-\{1/R_L+i(1/b_L)\} \\ q_L'=(-f-z_0')+ib_0', \\ \quad 1/q_L'=-\{1/R_L'+i(1/b_L')\} \end{cases} \tag{17}$$

レンズを通過する直前・直後の波面の曲率半径 $R_L$, $R_L'$ の間には次の幾何光学のガウスの式(2)が成り立つ．

$$-(1/R_L)+(1/R_L')=1/f \tag{18}$$

また直前・直後のビーム半径は等しく

$$b_L=b_L' \tag{19}$$

である．上の3式から次が導かれる．

$$1/q_L-(1/q_L')=1/f \tag{20}$$

(15)，(17)式から

$$q_L=q_F+f, \quad q_L'=q_F'-f$$

であるからこれを(20)式に代入すれば

$$q_F \cdot q_F'=-f^2 \tag{21}$$

となる．これは F, F′ におけるビームパラメータの間の変換式で，形としてはニュートンの式(1)に似ている．複素数ビームパラメータ $q_F$ と $q_F'$ は互いに反転写像の関係にある．

(21)式から

$$q_F'=-(f^2/q_F) \tag{22}$$

さらに(15)式と ′ をつけた変換後のものから

$$\begin{aligned} q_F' &= -z_0'+ib_0' \\ &= -(f^2/q_F)=-\{f^2/(-z_0+ib_0)\} \\ &= \{z_0f^2/(z_0^2+b_0^2)\}+i\{b_0f^2/(z_0^2+b_0^2)\} \end{aligned}$$

となり，(7)，(8)式と同等な

$$z_0'=-z_0\{f^2/(z_0^2+b_0^2)\}, \quad b_0'=b_0\{f^2/(z_0^2+b_0^2)\} \tag{23}$$

が得られる．

(20)式はレンズの位置におけるビームパラメータの変換式で幾何光学のガウスの式(2)と同じ形である．座標原点をともにレンズの位置においたときの $z_0'$, $b_0'$ を求める式は(23)式より複雑になる．

## 4. 変換の特性

(21)式から得られるレンズによるガウスビームの変換の特性を検討する．これはレーザーを使用する装置の設計あるいは組立・調整に役立つものである．式から容易にわかることは焦平面に関する対称性である．前方焦点 F を通り $z$ 軸に垂直な焦平面に関して $q_F$ に対称なビームは $-\bar{q}_F$ で表わされ，これの変換されたビームは

$$q_F'=(f^2/\bar{q}_F) \tag{24}$$

となる．これは F′ を通る焦平面に関して元のビーム $-f^2/q_F$ と対称である．

焦平面に関する対称性に基づいて次のことが理解できる．入射・射出ビームのレンズ通過直前・直後のビームサイズは等しく

$$b_L=b(f)=b_L'=b'(-f)$$

の関係がある．次にこのビームに対してそれぞれ焦平面に関して対称なビームを考えると，レンズの位置にあったビームサイズは $z=-f$ と $z'=f$ に移る．すなわち入射ビームの $-f$ におけるビームサイズと射出ビームの $f$ におけるビームサイズとは等しく

$$b(-f)=b'(f) \tag{25}$$

が成立する．

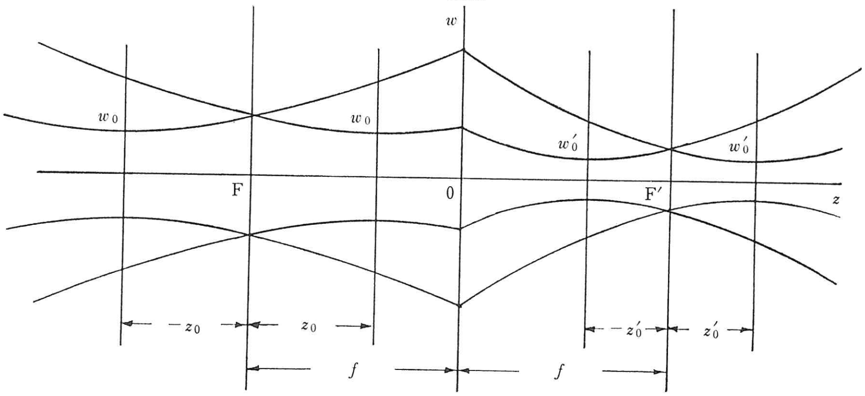


**Fig. 3** A symmetry characteristic of beams to the focal plane.

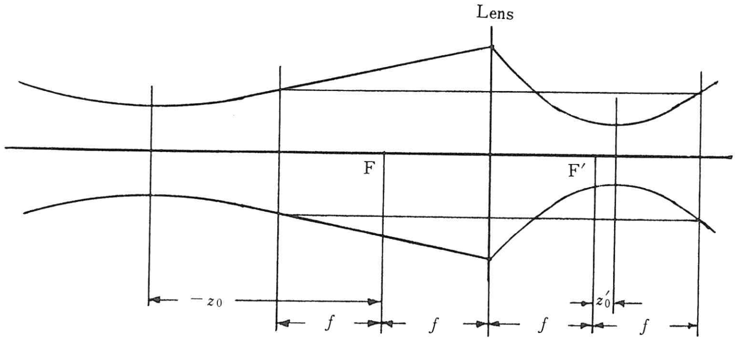


**Fig. 4** The relation between the beam radii of incident and transformed Gaussian beams.

この関係は $z_0$, $b_0$ を与えて(14)式から求めた $b(-f)$ と，(23)式で求めた $z_0'$, $b_0'$ からさらに(14)式に $'$ をつけた関係式を使って求めた $b'(f)$ とが等しいことでも確かめられる．上記の関係は幾何光学で $z=-f$ にある物体の像が $z'=f$ に倍率 $-1$ で結ばれることに対応している．

次に $z$, $b$, $R$ の関係を検討する．(21)式から

$$1/q_F'=-(q_F/f^2) \tag{26}$$

これと(15)式から

$$1/R_F'=-(z_0/f^2),\quad 1/b_F'=b_0/f^2$$

あるいは

$$z_0\cdot R_F'=-f^2,\quad b_0\cdot b_F'=f^2 \tag{27}$$

同様にして

$$R_F\cdot z_0'=-f^2,\quad b_F\cdot b_0'=f^2 \tag{28}$$

これらをまとめると

$$z_0\cdot R_F'=R_F\cdot z_0'=-b_0\cdot b_F'=-b_F\cdot b_0'=-f^2 \tag{29}$$

計算に便利な形としては次のように書ける

$$\begin{cases} z_0'=-(f^2/R_F), & R_F'=-(f^2/z_0) \\ w_0'=\lambda f/\pi w_F, & w_F'=\lambda f/\pi w_0 \end{cases} \tag{30}$$

特別の場合として入射ビームの waist が F にあるときは(16), (30)式によって

$$z_0=z_0'=0,\quad R_F=R_F'=\infty,\quad w_0'=\lambda f/\pi w_0 \tag{31}$$

となり，入射ビームの waist が F にあるとき射出ビームの waist は F′ にあることがわかる．これは幾何光学の結像関係とはまったく異なることである．また射出ビームの waist 半径 $w_0'$ は入射ビームの waist 半径 $w_0$ に逆比例し，これも幾何光学で像の大きさが物体の大きさに比例することとは対称的な特徴である．

(27)式から次のことがいえる．入射ビームの waist サイズ $b_0$ を一定にして位置 $z_0$ を変えても $b_F'$ は変化しない，すなわち入射ビームを $z$ 軸上を移動させても後方焦点におけるビームサイズ従ってビーム半径 $w_F'$ は変化しない．また入射ビームの位置 $z_0$ を一定にして waist サイズ $b_0$ を変えても $R_F'$ は変化しない，すなわち後方焦点における波面の曲率半径は変化しない．$z_0=0$ の場合については(31)式に述べてある．

## 5. スポット深度

ガウスビームを $z$ 軸上のある範囲内で使用しビーム半径を最大 $W$ 以下に抑えたいことがある．たとえばレーザープリンターである．これは幾何光学における焦点深度に対応するものでスポット深度と名づけておく．

レーザービームのビーム半径 $w(z)$ が最大値 $W$ に対して

$$w(z)\leq W \tag{32}$$

という条件を満たす $\pm z$ の範囲 $2z$ がスポット深度である．この条件を満たして深度 $2z$ が最大となる $w_0$ を求めるために

$$b_W=\pi W^2/\lambda,\quad b_0=\pi w_0^2/\lambda \tag{33}$$

とおき，(10)式の左辺 $b(z)=b_W$ とおいて $b_0$ について微分する．極値のところでは $dz/db_0=0$ であるから

**Table 1** Depth of spot.

| $w$ (μm) | $\pi w^2/\lambda$ (mm) |
|---|---|
| 10 | 0.496 |
| 20 | 1.986 |
| 30 | 4.468 |
| 40 | 7.943 |
| 50 | 12.411 |
| 60 | 17.873 |
| 70 | 24.326 |
| 80 | 31.773 |
| 90 | 40.213 |
| 100 | 49.646 |

$\lambda=0.6328$ μm.

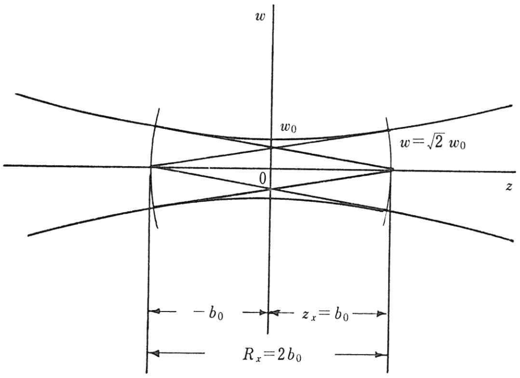


**Fig. 5** Characteristic quantities of a Gaussian beam.

$$b_0 = b_w/2\,;\quad w_0 = W/\sqrt{2} \tag{34}$$

となり，このときの $z$ は

$$z = \pm b_w/2\,;\quad 2z = \pi W^2/\lambda \tag{35}$$

となる．スポット半径の最大値を定めれば最大の深度を与えるビームの waist 半径は (34) 式で定まり，深度は (35) 式で与えられる．

最大の深度を与える waist 半径に関連してガウスビームの次の性質を述べておく．waist 半径 $w_0$ のビームの波面の曲率半径が極値 $R_x$ をもつ位置 $z_x$ を求めると (11) 式から

$$z_x = \pm b_0 \tag{36}$$

またこのときの $R$ は

$$R_x = \mp 2 b_0 \tag{37}$$

である．ビーム半径は (10) 式から次のようになる

$$b_x = 2 b_0,\quad w = \sqrt{2}\, w_0 \tag{38}$$

(34) 式と比較すればビームの波面の曲率半径が極値となる位置のビーム半径が $W$ となるものが最大のスポット深度を与える．

(30), (37) 式から $z_0$ が $-\infty$ から $+\infty$ まで変化するとき，$z_0'$ は $\pm f^2/(2b_0)$ の範囲を変化する．この点も幾何光学の結像関係とはまったく異なる．

## 6. エキスパンダー

二つのレンズの焦点を一致させた望遠系はエキスパンダーとしてビームの waist 半径を変えるときに使用する．それぞれのレンズに関する量を添字 1，2 で区別すると

$$z_{01}' = z_{02},\quad b_{01}' = b_{02},\quad q_{F1}' = q_{F2} \tag{39}$$

一方 (21) 式から

$$q_{F1}\cdot q_{F1}' = -f_1^2,\quad q_{F2}\cdot q_{F2}' = -f_2^2$$

したがって次が成り立つ．

$$q_{F2}'/q_{F1} = f_2^2/f_1^2 \tag{40}$$

これから次の関係が得られる

$$z_{02}'/z_{01} = b_{02}'/b_{01} = f_2^2/f_1^2,\quad w_{02}'/w_{01} = f_2/f_1 \tag{41}$$

$f_2/f_1$ は望遠系の倍率である．この式からわかることは射出ビームの waist 半径 $w_{02}'$ は入射ビームの waist の位置 $z_{01}$ に関係しない．しかし両空間の waist の位置の関係は幾何光学的に考えた物点・像点の関係に等しい．$z_{01}=0$ には $z_{02}'=0$ が対応するが，$z_{01}$ が変化すると $z_{02}'$ は望遠系の倍率の 2 乗に比例して大きく変化する．$f_1, f_2$ がともに正である場合には，各レンズの焦点は実でありそこに waist を置くこと，あるいはできていることを確かめることができる．しかし一方のレンズが負のガリレオ式望遠系では焦点は虚となって捉えにくいが全長が短くなる利点がある．

ガウスビームをレンズで変換するとき，入射ビームの waist を前方焦点におき射出ビームの waist を後方焦点に作るのが一つの基本の型であり，これを繰り返すものがエキスパンダーである．

## 7. あ と が き

ガウスビームのレンズによる変換の性質を見るために入射空間と射出空間の座標原点をレンズの前方・後方焦点におき複素数ビームパラメータを用いると変換式が簡単となる．それを基にして変換前後のビームのいろいろな関係を導いた．レーザー光源と，最終的にそれを利用するときの waist の位置と大きさを定め，その間をいかなるレンズ系で変換させるかを “mode matching” と呼んでいる．レンズによるビーム変換の性質に基づいて，waist をレンズの焦点から焦点への変換とその組合せにすれば，系の構造が理解しやすく組立ても容易となる．

## 文　　献


1) H. Kogelnik: Bell Syst. Tech. J., **44** (1965) 455.
2) H. Kogelnik and T. Li: Appl. Opt., **5** (1966) 1550.
3) D. Dickson: Appl. Opt., **9** (1970) 1854.