研　究

レンズ設計における特異値分解の応用

大　木　裕　史

日本光学工業(株)光学部　〒140 東京都品川区西大井 1-6-3

(1984年7月24日受理)

An Application of Singular Value Decomposition to Optical Design

Hiroshi OHKI

Optical Designing Department, Nippon Kogaku K. K., 1-6-3, Nishi-Ohi, Shinagawa-ku, Tokyo 140

An application of singular value decomposition to optical design with computers is described. As examples of application, three new techniques rank—down method for optimization, linear estimation of residual aberration, and manual design in the orthogonalized space—are given. The application of singular value decomposition enables the designer to reflect his own concepts in optimizing as well as to learn the fundamental property of the optical system.

1. はじめに

計算機の発達とともにレンズ設計が大きく変貌を遂げてきたことは衆知の事実であるが，近年は大型計算機の端末を使い，プログラムを会話的に利用しながら設計を行なうことが主流となりつつある．そこでわれわれは，とくにこのような会話型レンズ設計プログラムに適した自動設計法として行列の特異値分解を応用した方法を考案し，具体化してみたのでその結果を報告する．

2. 行列の特異値分解

行列の特異値分解はまだそれほど一般的ではないが，行列を含む問題の有効な計算手段として知られているものである．すなわちそれは，与えられた任意の $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ を，$m\times m$ 直交行列 $\boldsymbol{H}$, $n\times n$ 直交行列 $\boldsymbol{K}$, $m\times n$ 対角行列 $\boldsymbol{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{HRK} \tag{1}$$

なる形に分解することである．ここで対角行列 $\boldsymbol{R}$ の対角成分の値は行列 $\boldsymbol{A}$ の特異値と呼ばれ，この値が即，行列 $\boldsymbol{A}$ を構成する列ベクトル間（行ベクトル間でもよいが）の独立性を表わすことには感覚的にも容易に理解できよう．つまり(1)式は，与えられた行列 $\boldsymbol{A}$ を表現行列とする線形写像 A を

$$A : \boldsymbol{a}\rightarrow\boldsymbol{b} \tag{2}$$

としたとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の属する空間を $\boldsymbol{K}$, ベクトル $\boldsymbol{b}$ の属する空間を $\boldsymbol{H}^{-1}$ なる行列で座標変換すれば，変換した座標系での写像の表現行列が $\boldsymbol{R}$ となることを示しており，$\boldsymbol{H}$ および $\boldsymbol{K}$ が直交行列であることから写像の従属性はすべて $\boldsymbol{R}$ に繰り込まれることになるからである．

ここで，物理学の問題でよく出会うように，与えられた行列がエルミートであることがわかっている場合は，その固有ベクトルが直交するから特異値分解はたんなる固有値・固有ベクトル変換に帰着し，特異値と固有値は同一になるが，任意の行列では事情はやや複雑になる．すなわちハウスホルダー変換行列を用いて与えられた行列を三角化し，得られた三角行列をその転置行列と掛け合わせていったん対称行列を作り，これを固有値・固有ベクトル変換した後，さらに適当な方法で(1)式の形に帰着させるのである．

行列の特異値分解は，通常，計算機による行列処理の際の桁落ち防止，信頼度向上等の目的で使われており，事実最小二乗問題や線形方程式の解の判定においては特異値分解以上に信頼できる方法はないといわれている．

しかし，われわれが本報告のなかで考案した特異値分解の応用法はこうした従来の使用法とは本質的に異なっており，それを簡単に表現すれば，与えられた線形数学の問題に人間が意図的に介入し，人為的な工作をするための手段として用いるというものである．

なお，特異値分解のアルゴリズムについて詳細な説明をすることは本報告の目的ではないので，興味ある方は参考書[1]を参照されたい．

3. レンズ設計における特異値分解

レンズ系において，それを構成する n 個のレンズパラメータ $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ を選び，それに対し m 個の残存収差 $\boldsymbol{f}(f_1, f_2, \cdots, f_m)^{\mathrm{T}}$ を評価量とする．いま，パラメータベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\Delta\boldsymbol{x}$ だけ変化したとすると，$\Delta\boldsymbol{x}$ が微小量なら次の線形近似

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_0 \tag{3}$$

が成り立つ．ここで $\boldsymbol{f}_0$ はパラメータが変化する直前の残存収差であり，$\boldsymbol{A}$ は各残存収差の各パラメータに対する偏微分係数から成る $m\times n$ 行列で，

$$\boldsymbol{A}=\{\partial f_i/\partial x_j\} \quad i=1,\cdots,m\,;\ j=1,\cdots,n \tag{4}$$

である．(3)式は，$\Delta\boldsymbol{x}$ が微小な範囲において，レンズ系が線形写像として考えられることを示しており，$\boldsymbol{A}$ はこの写像の表現行列になる．このとき写像の基底は当然各パラメータ，および各残存収差である．以下 $\boldsymbol{A}$ を偏微分係数行列と呼ぶことにする．

いま重要となるのはいかにして残存収差を除去するかという問題であるから，(3)式において $\boldsymbol{f}$ をゼロベクトルとするか，または $\boldsymbol{f}$ のノルムを最小にすることがわれわれの目標となる．すなわち，最終残存収差ベクトルを $\boldsymbol{f}_s$ として，

$$\|\boldsymbol{f}_s\|=\|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_0\|\to\min \tag{5}$$

ということになる．

いま偏微分係数行列 $\boldsymbol{A}$ を，(1)式と同様に特異値分解する．つまり $m\times m$ 直交行列 $\boldsymbol{H}$, $m\times n$ 対角行列 $\boldsymbol{R}$, $n\times n$ 直交行列 $\boldsymbol{K}$ を用いて

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{HRK} \tag{6}$$

なる形に分解する．ここで $\boldsymbol{R}$ は $m>n$ なら $\boldsymbol{R}'$ を $n\times n$ 対角行列として

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}'\\ 0\end{pmatrix} \tag{7}$$

であり，$m<n$ ならば $\boldsymbol{R}'$ を $m\times m$ 対角行列として

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{R}' \quad 0) \tag{8}$$

と表わせる．$\boldsymbol{R}'$ の対角成分はもちろん $\boldsymbol{A}$ の特異値である．このとき，ベクトル $\boldsymbol{s}(s_1,\cdots,s_m)^{\mathrm{T}}$ および $\boldsymbol{y}(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ を次式で定義する．

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{H}^{-1}(-\boldsymbol{f}_0) \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{x} \tag{9b}$$

(9a)および(9b)式は $\boldsymbol{f}_0$ および $\Delta\boldsymbol{x}$ の基底を，写像 A の表現行列が対角行列 $\boldsymbol{R}$ となるように直交変換したことを示す．$\boldsymbol{R}$ の対角成分を決まった順序で並べることにし，かつ行列 $\boldsymbol{H}$ または $\boldsymbol{K}$ の符号について簡単な約束をしておけば，行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値に縮退がない限り，直交行列 $\boldsymbol{H}$ および $\boldsymbol{K}$ は一意的に求まる．直交変換はベクトルのノルムを保存するから，(5)式で与えたわれわれの目標はベクトル $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{y}$ を用いて

$$\|\boldsymbol{s}_s\|=\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{Ry}\|\to\min \tag{10}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{s}_s(s_1{}^s,\cdots,s_m{}^s)^{\mathrm{T}}$ は直交変換後の最終残存収差ベクトルである．

いま，$m>n$ であったとすると写像は

$$\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ \vdots\\ s_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{1,1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & R_{n,n}\\ & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{11}$$

となるから，最終残存収差ベクトル $\boldsymbol{s}_s$ は

$$\boldsymbol{s}_s=(s_1-R_{1,1}y_1,\cdots,s_n-R_{n,n}y_n,s_{n+1},\cdots,s_m)^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

で与えられ，(10)式を満たす解ベクトル $\boldsymbol{y}_s(y_1{}^s,\cdots,y_n{}^s)^{\mathrm{T}}$ は(12)式から簡単に

$$\boldsymbol{y}_s=(s_1/R_{1,1},\cdots,s_n/R_{n,n})^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

となる．このとき $\boldsymbol{s}_s$ は

$$\boldsymbol{s}_s=(0,\cdots,0,s_{n+1},\cdots,s_m)^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

となり線形近似の範囲内でも一般にゼロベクトルにはならない．一方，$m<n$ の場合は

$$\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{1,1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & R_{m,m} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{15}$$

となり解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ は

$$\boldsymbol{y}_s=(s_1/R_{1,1},\cdots,s_m/R_{m,m},y_{m+1}{}^s,\cdots,y_n{}^s)^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

$$y_{m+1}{}^s\cdots y_n{}^s：任意$$

で与えられ，$\boldsymbol{s}_s$ は線形近似の範囲でゼロベクトルとなる．(13)式の解は，いわゆる最小二乗法の解と同一である．また，(16)式の解は，$y_{m+1}{}^s,\cdots,y_n{}^s$ をすべてゼロとおくことによって未定乗数法によるノルム最小の解と同一になる．

なお，(11)式と(15)式とで，

$$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=\min(m,n) \tag{17}$$

と仮定した．(17)式が厳密な意味で成り立たなくなることは事実上起こらないと考えられるから，この仮定は一般性を失わない．

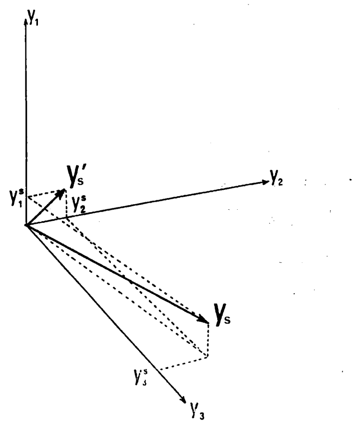

Fig. 1 *Solution vector* $\boldsymbol{y}_s$. If $y_3{}^s$ is assumed to be zero, the norm of the new solution vector $\boldsymbol{y}_s'$ would be considerably reduced as shown here.

4. 次元降下法

3.章で述べたように，偏微分係数行列 $\boldsymbol{A}$ を特異値分解すれば残存収差数 m がパラメータ数 n より多いときは最小二乗法，$m<n$ であれば未定乗数法による最適化の解が容易に得られることがわかった．次に，特異値分解の威力を発揮させる使用法について考えてみたい．

(6)式で与えられる特異値分解において，$\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{K}$ が直交行列であることから(13)式または(16)式で与えられる解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ のノルムは実空間上での解ベクトル $\Delta\boldsymbol{x}_s$ のノルムに一致している．系の線形性は $\Delta\boldsymbol{x}$ のノルムが大きいときは一般に保証されないので，収差の改善度が大きく，かつノルムの小さな解を探すことは意味のあることである．この点においてわれわれは従来にない方法を考案した．

いま，$m=n=3$ の場合を考え，解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ が **Fig. 1** のようになったとしよう．

Fig. 1 からわかるように，$\boldsymbol{y}_s$ のノルムの大部分は3番目の成分 $y_3{}^s$ によって決まっている．そこで $y_3{}^s$ を無視する，つまりゼロにしてしまえば $\boldsymbol{y}_s$ のノルムははるかに小さくすることができる (**Fig. 1** の $\boldsymbol{y}_s'$ になる)．$y_3{}^s$ は(13)式より

$$y_3{}^s=s_3/R_{3,3}$$

で与えられるから，$y_3{}^s$ の絶対値が大きいということは(9a)式における残存収差ベクトル $\boldsymbol{s}$ の第3成分がきわめて補正困難であることを示している．したがって，**Fig. 1** で $y_3{}^s$ をゼロにするということは補正困難な成分を無視するという意味であり，これによって補正可能な成分が速かに補正されるわけである．ここで補正困難な成分を無視するというのは消極的な印象を与えるが，実は，これは「最適化の目標そのものを最適化」するということなのである．なぜなら，$\boldsymbol{y}_s$ の中に絶対値のとびぬけて大きな成分が存在するということは，各収差間の従属性を無視した無理な目標が設定されていることを示すからである．

偏微分係数行列 $\boldsymbol{A}$ の特異値，および直交変換した残存収差ベクトル $\boldsymbol{s}$ は，以上の事情によりレンズ設計者にとってきわめて有用なデータとなる．設計者はこの値を見ることによって現状での最適化の難易度を知るとともに，解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ のどの成分の省略が効果的であるかを知ることができる．こうして解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の各成分は設計者の意思のもとに適当に省略され，最終解となる．このとき，$\boldsymbol{y}_s$ の有効成分が減ることになるので，われわれはこれを「次元降下法」と命名した．

設計者による解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の次元降下は，最適化を1サイクル実行する度に $\boldsymbol{A}$ の特異値とベクトル $\boldsymbol{s}$ を見ながら決定することが望ましいが，実際はこれらの値，とくに $\boldsymbol{A}$ の特異値は1サイクルごとに大きく変動する量ではないので，数サイクル～十数サイクルの間はまったく同じ次元降下を行なえばよい．この場合の次元降下法としてはいろいろ考えられるが，たとえば次のような方法が考えられる．

(a)　$\boldsymbol{A}$ の特異値のなかで絶対値最大のものを $R_{\max}$ とし，ある定数 $\alpha_1(0\leqq\alpha_1\leqq1)$ に対し第 k 番目の特異値 $R_{k,k}$ が $|R_{k,k}|\leqq\alpha_1\cdot|R_{\max}|$ を満たすとき，解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の第 k 成分をゼロとする．この方法を第一種次元降下法と呼び，α_1 を第一種次元降下定数と呼ぶことにする．

(b)　(13)式または(16)式で与えられた解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の各成分の絶対値をとり，それがある定数 α_2 より大きい場合その成分をゼロとする．この方法を第二種次元降下法と呼び，定数 α_2 を第二種次元降下定数と呼ぶことにする．

(c)　$\boldsymbol{A}$ の特異値を絶対値の大きいものから順に k 個選び出し，それに対応する解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の成分のみ採用して残りの成分はすべてゼロとする．この方法では設計者が解ベクトルの次元を指定することになるので固定次元法と呼び，定数 k を固定次元定数と呼ぶことにする．

以上の三つの方法をわかりやすくするため，具体例を示す．いま系の残存収差数とパラメータ数がともに5で，特異値 $R_{i,i}$ および残存収差ベクトル $\boldsymbol{s}$ の成分 s_i

Table 1　An example of $R_{i,i}$ and s_i.

i	$R_{i,i}$	s_i	$s_i/R_{i,i}$
1	1.5	1.35	0.9
2	0.3	0.9	3.0
3	0.01	−2.5	−250.0
4	0.005	−0.3	−60.0
5	0.001	1.6	1600.0

が **Table 1** で与えられるとしよう．

このとき，第一種次元降下法で $\alpha_1=0.1$ とおいたときの解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ は

$$\boldsymbol{y}_s=(0.9,\ 3.0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$$

となる．次に第二種次元降下法で $\alpha_2=100$ とおくと

$$\boldsymbol{y}_s=(0.9,\ 3.0,\ 0,\ -60.0,\ 0)^T$$

となる．また，固定次元法で $k=4$ とおくと

$$\boldsymbol{y}_s=(0.9,\ 3.0,\ -250.0,\ -60.0,\ 0)^T$$

となる．次元降下しない解ベクトルはもちろん

$$\boldsymbol{y}_s=(0.9,\ 3.0,\ -250.0,\ -60.0,\ 1600.0)^T$$

であり，これは $\alpha_1=0$ または $\alpha_2=\infty$，あるいは $k=5$ とおいた場合に相当する．

さて上記の(a)，(b)，(c)でいずれの場合も設計者はある定数を入力するだけでよい．この次元降下定数の値を選ぶことによって，設計者は「最適化の目標の最適化」を意のままに行なうことができる．ここで次元降下定数の意味は，パラメータの過大な動きを抑制するという点で減衰最小二乗法（DLS 法）におけるダンピングファクタに類似した印象を受けるが，次元降下定数はパラメータベクトル $\Delta\boldsymbol{x}$ を直交変換した後の空間におけるダンピングであり，設計者自身が直接レンズ系の可能性を評価して設定するダンピングであるから，質的にまったく異なるものであるといえよう．

なお，上述した三つの場合において，解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の中の次元降下する成分はすべてゼロとおいたが，必ずしもゼロである必要はない．符号さえ逆転しなければ，ゼロでない値を入れればそれだけ（線形近似の範囲内で）収差は改善されるはずである．ただしその分，解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ のノルムは大きくなるから対応する特異値の絶対値がきわめて小さいときは無意味に解ベクトルを伸ばすだけである．このあたりの事情も設計者が判断するのがよいが，たとえば次のような方法も考えられる．

(d)　解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の各成分の絶対値をとり，それがある定数 β より大きいときはそれらの成分の絶対値はすべて β とする．この方法は解ベクトルの有効成分を減らすわけではないので次元制御法と呼び，定数 β を次元制御定数と呼ぶことにする．

$R_{i,i}$ と s_i が **Table 1** で与えられているとき，次元制御法を $\beta=100$ として用いると解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ は

$$\boldsymbol{y}_s=(0.9,\ 3.0,\ -100,\ -60.0,\ 100)^T$$

となる．

次に，次元降下法によるレンズの自動設計例を **Fig. 2～Fig. 4** に示す．

Fig. 2 は，13 枚構成の顕微鏡用対物レンズ（N. A.＝

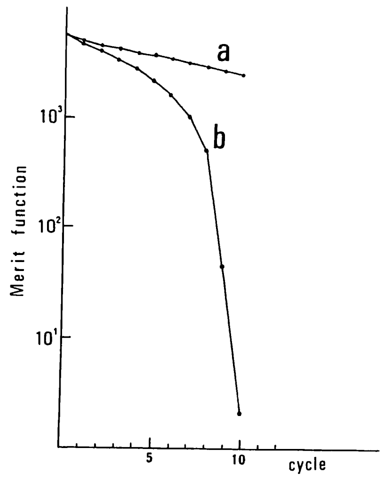

Fig. 2　An example of the optimization process where reasonable targets were given to a complicated lens system.
(a)：$\alpha_1=0$，(b)：$\alpha_1=0.002$.

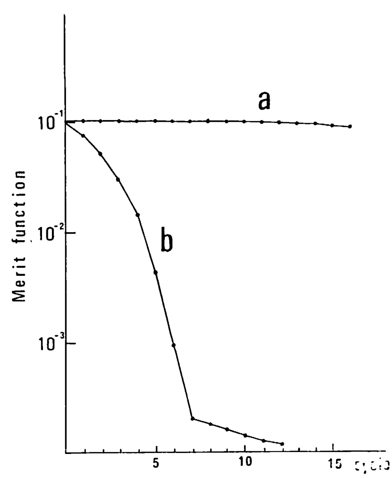

Fig. 3　An example of the optimization process where unreasonable targets were given to a simple lens system.
(a)：$\alpha_1=0$，(b)：$\alpha_1=0.005$ (Cycle No. 1-7)，$\alpha_1=0.0005$ (Cycle No. 8-12).

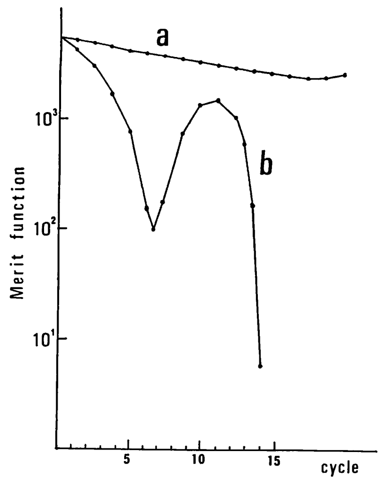

Fig. 4　An example of the optimization process where unreasonable targets were given to a complicated lens system.
(a) : $\alpha_1=0$, (b) : $\alpha_1=0.002$ (Cycle No. 1-6), $\alpha_1=0.0005$ (Cycle No. 7-14).

0.5, 焦点距離＝4.2) に，実現可能な無理のない目標を与えた場合の例であり，最適化の対象とする残存収差は光線収差，および物像間距離の計15，可変パラメータは各レンズの曲率半径と厚み，およびレンズ間隔の計20である．(a)は次元降下をまったく行なわなかった場合，(b)は第一種次元降下を行なった場合で，縦軸はメリット関数，すなわち残存収差ベクトルのノルムの2乗を示す．実現可能な目標であるからどのような方法でも収束するが，次元降下法では効果的に解ベクトルを短縮するため収束が非常に速い．

Fig. 3 は4枚構成の対物レンズ (N. A.＝0.46, 焦点距離＝5.0) に，故意に実現不可能な目標を与えた場合であり，残存収差数は6，可変パラメータ数は7である．次元降下を行なわない(a)の場合は補正困難な成分の存在により解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ が異様に長くなっており，線形性保証のために $\boldsymbol{y}_s$ を圧縮すると収差はほとんど改善されない．一方，第一種次元降下を行なうと，補正困難な成分をはじめから排除しているため，実現可能な地点まで急激に収束している．

Fig. 4 は，**Fig. 2** と同じ系に実現不可能な目標値を与えた場合である．(a)の次元降下を行なわない場合は収差はほとんど変わっていないが，第一種次元降下を施した(b)では急激に残存収差が減少している．なお(b)で，第一種次元降下定数 α_1 の値を変えたところでいったん残存収差が増加する傾向にあるが，これはレンズ全体の収差バランスが変化するためであろう．

なお，減衰最小二乗法 (DLS 法) との比較は，解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ を求めた後の取扱い方が異なり，意味のある比較にならないため行なわなかった．

5.　特異値分解の応用

前章では特異値分解の自動設計への応用として次元降下法を提案したが，特異値分解はこの他にも多くの応用の可能性を有している．ここでは，われわれが考案した二つの応用例について紹介したい．

5.1　残存収差の線形予測

一般に，解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の次元降下を行なうと，線形近似の範囲内でも最終残存収差ベクトル $\boldsymbol{s}_s$ はゼロベクトルにならない．残存収差数を m，パラメータ数を n としたとき，解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の成分のうち $y_k{}^s, \cdots, y_n{}^s$ を次元降下によってゼロとおいたとすれば，(12)式から与えられる最終残存収差ベクトル $\boldsymbol{s}_s$ は

$$\boldsymbol{s}_s=(0, \cdots, 0, s_k, \cdots, s_m)^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

となる．ここで $\boldsymbol{s}_s$ を再び直交変換してもとの残存収差空間に戻す，すなわち

$$\boldsymbol{f}_s=\boldsymbol{H}\boldsymbol{s}_s \tag{19}$$

とすれば，$\boldsymbol{f}_s$ は実空間における最終残存収差を与えるベクトルであり，$\boldsymbol{f}_s$ を知るということは当然，最適化終了後の系の残存収差を線形近似が成り立つという仮定のもとに予測することである．そこで，これを残存収差の線形予測と呼ぶことにする．解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ のノルムが大きいときには系の線形性は大きく崩れるからこの予測はあまり意味がないが，次元降下を行なっている場合は解ベクトルのノルムが制限されるので線形予測は非常に有効となる．

Table 2 および **Table 3** は線形予測の例であり，それぞれ残存収差6，パラメータ9の系と，残存収差8，パラメータ15の系における計算結果である．

Table 2 からわかるように，解ベクトルの次元を4とした場合の，残存収差の線形予測値と実際に最適化を行なった後の残存収差を比較してみると，両者は非常によく一致している．

Table 3 は解ベクトルの次元を6とした場合であるが，系の線形性が悪いことと解ベクトルが長くなったことにより予測値と実際の値は多少離れている．しかし予測値としては十分実用になると判断できる．

残存収差の線形予測は最適化の実行に比べて非常に短時間ですみ，またこれを応用して現状のレンズ系の難点がどこにあるのかを探ることもできるので，レンズの自動設計における補助手段としてきわめて有効である．

Table 2　An example of linear estimation.

Aberration No.	Present value	Target	Dimension of solution vector=4	
			Linear estimation	After optimization
1	−0.2530	−0.25	−0.2499	−0.2499
2	−0.0061	0.	0.0015	0.0015
3	−0.0055	0.	−0.0026	−0.0025
4	−0.0058	−0.003	−0.0043	−0.0048
5	−0.0014	0.	0.0006	0.0006
6	0.0071	0.003	0.0044	0.0045

Table 3　An example of linear estimation.

Aberration No.	Present value	Target	Dimension of solution vector=6	
			Linear estimation	After optimization
1	−1.0588	−1.0	−0.9947	−0.9808
2	−0.1729	−0.01	−0.0049	−0.0090
3	−1.3554	0.	0.0103	0.0016
4	−0.5793	−0.02	−0.0463	−0.0266
5	0.0296	0.0008	−0.0053	−0.0023
6	0.0674	0.	0.0611	0.0700
7	−0.0982	0.	−0.0191	−0.0210
8	−0.0223	0.02	0.0287	0.0334

5.2 直交化空間における手動設計

前述したように，特異値分解を行なった後はレンズ系の最適化の問題はきわめて簡単になる．このことは，偏微分係数行列がはじめから対角行列であった場合を考えれば容易に想像がつくであろう．すなわち，計算された偏微分係数行列 $\boldsymbol{A}$ の特異値と残存収差ベクトル $\boldsymbol{s}$ の成分から最終残存収差ベクトル $\boldsymbol{s}_s$ のノルムを最小にすることを考えればよいわけで，これは非常に容易なことである．したがって，解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の構成自体を設計者に委ねることが考えられる．要するに，通常のレンズ設計では設計者が現存収差と偏微分係数行列 $\boldsymbol{A}$ を考慮しながらレンズパラメータを直接変えていくわけであるが，特異値分解を応用した設計法では，設計者は $\boldsymbol{A}$ の特異値と直交変換後の残存収差ベクトルを考慮しながら直交変換されたレンズパラメータを変えていくのである．この場合は解ベクトルの構成を自由に行なうことになるので，計算機の判断による最適化に較べて柔軟な対応が可能になる．たとえば系の線形性が広い範囲で保証されているような場合は思いきって解ベクトルを長くすることができるし，また，特殊な解ベクトルを設定して収差変化と実空間でのパラメータ変動量を観察することにより，レンズ系の現地点での基本的性質を知る手掛りとすることもできる．

この設計法のためには，次のような機能をプログラムに持たせれば十分であろう．

（1） 偏微分係数行列 $\boldsymbol{A}$ を特異値分解し，$\boldsymbol{A}$ の特異値，残存収差ベクトル $\boldsymbol{s}_s$ および (13)式または(16)式で与えられる解ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の参考値を計算し表示する．

（2） ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の成分を自由に変更できる．

（3） 最適化目標値を自由に変更できる．

（4） ベクトル $\boldsymbol{y}_s$ の成分を再び直交変換して実空間に戻し，それに従ってレンズ系の各パラメータを動かし，収差計算を行なう．

この手法による設計は，従来の手動設計とはまったく異なるものであり，非常に興味深い方法である．

6. ま　と　め

ここまで述べてきたように，本報告でわれわれが最も強く主張したいのはレンズ設計における特異値分解の有用性である．そして，その応用例として次元降下法による最適化，残存収差の線形予測，および直交変換した空間における手動設計を提案した．これらはいずれも会話型のプログラムを用いてレンズ設計を行なう際に，非常に強力な手段となりうるものである．とくに，どの場合

においても設計者自身の判断がきわめて大きな意味をもち，かつそのための有効な情報が常時提供されるという点で従来の自動設計の枠から一歩前進したものといえよう．また，数学的な面から考えても，レンズ系を線形写像として捉える限り，次元降下法が最も合理的な最適化法の一つであることは明らかであろう．

レンズ設計で用いられる数学は，もとよりさほど高級なものではない．しかしわれわれに可能な範囲で理論を整理し，洗練するのは重要なことである．本報告がレンズ設計手法の可能性の拡大に少しでも役立つことができれば幸いである．

最後に，特異値分解の応用を開発するにあたり，多くのご教示をいただいた日本光学工業(株)光学部・渋谷真人，同精機設計部・嵐田和男の両氏に深く感謝の意を表したい．

文　献

1) C. L. Lawson and R. J. Hanson: *Solving Least Squares Problems* (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1974).