



## 点対称格子によるモアレ縞の解析

新井 泰彦・阿波 啓造・倉田 忠雄

関西大学工学部機械工学科 〒564 吹田市山手町 3-3-35

(1984年9月25日受理)

### On the Analysis of Moiré Patterns with the Centrosymmetric Gratings

Yasuhiko ARAI, Keizo AWA and Tadao KURATA

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kansai University,  
3-3-35, Yamate-cho, Suita 564

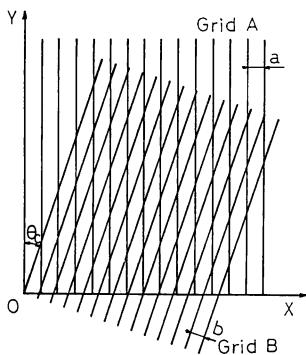
This paper describes a new method of the description of the centrosymmetric gratings; for instance the radial gratings, the circular gratings, and the spiral gratings and the analysis of moiré patterns with the centrosymmetric gratings. In the usual geometrical method, the improvement of the contrast and/or the sharpening of these moiré patterns has not been able to be analyzed sufficiently in the use of the engineering fields. In this paper, by using the polar coordinates, the fringe profile of the centrosymmetric gratings is analyzed. Then, the general conception of the intersecting angles of two gratings is explained and moiré patterns with the centrosymmetric gratings are analyzed by two conceptions of the fringe profile and the intersecting angles. The representative examples of the centrosymmetric gratings and moiré patterns with them are shown.

#### 1. はじめに

モアレ縞は、規則的な図形を重ね合わせた場合に、新たに発生する縞模様として知られ、現在、変位、角度の精密測定、材料の歪測定など工学の分野で広く利用されている<sup>1,2)</sup>。ところが、このモアレ縞を利用する場合、Oster による幾何学的解析<sup>3)</sup>では、発生したモアレ縞と幾何学的解析により求めた数式との関連が不十分であり、結果的に、人間が発生したモアレ縞图形と数式を対応させる作業を必要としている。そのため解析上の曖昧さが見られる。さらに、縞の存在位置のみに対する解析であるため、利用上問題となるモアレ縞のコントラストの改善、あるいは、その縞幅についてなど、測定上の精度向上への解析を十分に行なうことはできない<sup>4)</sup>。これに対し、従来、平行直線格子を格子定数がほぼ等しく、かつ、相対的な回転角度が小さいと仮定した場合に、格子の透過率分布を考え、上記の仮定に従い、空間周波数をパラメータとして、モアレ縞の图形と数式を対応させる報告がある<sup>5)</sup>。しかしながら、上記の仮定を満足しな

い場合には、この手法は利用できない。この問題に対して、本研究では、モアレ縞を形成する格子を局部的に見た場合の格子による平行四辺形と、その頂角、つまり格子の交差角をパラメータとすることにより、一意的にモアレ縞の图形を数式に対応させることができた。

一方、近年使用頻度が高まりつつある光学式エンコーダ等に利用されているラジアル格子に代表された centrosymmetric grating (以下、CG と呼ぶ) は、平行直線格子とは、比較にならないほど複雑に格子条が交差するため、従来の平行直線格子の解析法では、取り扱うことができなかった。本稿では、ラジアル格子によるモアレ縞の明暗分布を用いた速度計の研究<sup>6)</sup>において行なった極座標系によるラジアル格子の透過率分布の考え方を、さらに一般化し、また、モアレ縞を形成する格子を局部的にとらえることにより、平行直線格子同様に、交差角をパラメータとして発生するモアレ縞の透過率分布を解析した。この手法によって、Oster の解析に見られるようなモアレ縞图形と数式との曖昧な対応ではない、より一般的な解析を行なうことができた。



**Fig. 1** Coordinate system for the analysis of the two superposed grids.

## 2. 格子の透過率分布

### 2.1 平行直線格子の透過率分布<sup>7,8)</sup>

平行直線格子の透過率分布は、一般に  $x-y$  平面で空間周波数の考え方によって表現されている<sup>8)</sup>。本稿においても、この考え方から、フーリエ級数の高次の項まで考慮することにより、得られるモアレ縞のプロファイルを扱うものである。しかしながら解析過程では、演算を繁雑にしないために、透過率分布の基本空間周波数のみを考え、演算を進め、その結果に対して、付随する高次の項を後ほど付加することにより、モアレ縞のプロファイルを扱うものとし、基本的解析では、格子はすべて基本空間周波数に対応する正弦波格子として扱うこととした。

**Fig. 1** に示す格子 A、格子 B の透過率分布は、 $x-y$  座標系によりそれぞれ  $T_A$ ,  $T_B$  と表現できる<sup>5)</sup>。

$$T_A = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \frac{1}{a} x \right\} \quad (1)$$

$$T_B = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{\cos \theta_c}{b} x - \frac{\sin \theta_c}{b} y \right) \right\} \quad (2)$$

しかし、 $x-y$  座標によって、CG を取り扱うと、空間周波数が座標の位置によって複雑に変化し、解析は困難

である。そのため、本稿では極座標を用いて CG を表示し、得られるモアレ縞を解析した。

### 2.2 CG の透過率分布

#### 2.2.1 CG の中心が原点にある場合

本稿では CG を  $x-y$  座標で考えるのではなく、極座標に直線格子の解析に用いた空間周波数の考え方を導入することによって、回転角方向、半径方向の 2 方向に極座標系の空間周波数を設定した。また、平行直線格子の場合と同じ考え方により、この場合にも正弦波格子として解析を行なうこととする。

**Fig. 2(a)** に示すラジアル格子の透過率分布  $T_R$  は、回転角方向にのみ空間周波数を考えればよいので、

$$T_R = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{\theta_R}{2\pi} \theta \right) \right\} \quad (3)$$

と表現できる。ここで、回転角方向の空間周波数は、 $2\pi$  (rad) 当りに格子が  $\theta_R$  (本) 存在することを意味するものである。一方、**Fig. 2(b)** に示す等間隔同心円格子の透過率分布  $T_C$  は、

$$T_C = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{1}{r_C} r \right) \right\} \quad (4)$$

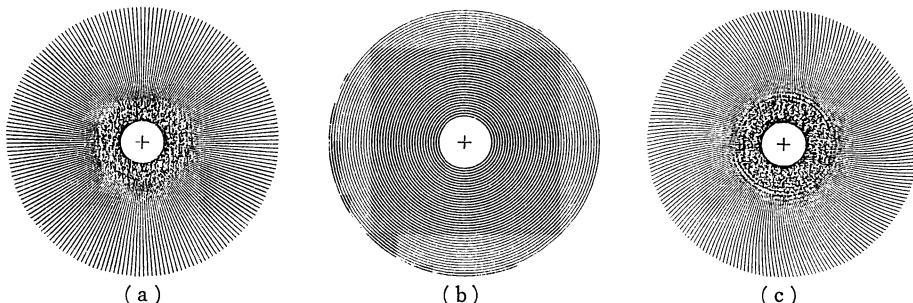
となり、空間周波数  $1/r_C$  は、従来の考え方を半径方向に適用したものである。よって、上記  $T_R$ ,  $T_C$  のより一般的な格子である **Fig. 2(c)** に示す等間隔スパイラル格子の透過率分布  $T_S$  は、

$$T_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{\theta_S}{2\pi} \theta - \frac{1}{r_S} r \right) \right\} \quad (5)$$

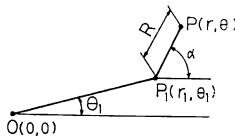
となる。 $2\pi/\theta_S$ ,  $r_S$  は、それぞれ回転角方向、半径方向の格子のピッチである。

#### 2.2.2 CG の中心が原点にない場合

前節では、CG の中心はすべて原点上にあるものとした。しかしながら、中心は必ずしも原点とは限らない、とくに重ね合わされた格子の中心がずれているときのモアレ縞を考えるには、CG の中心が原点上にない場合の表現が必要である。



**Fig. 2** Centrosymmetric gratings.  
(a) Radial grating, (b) Equispaced circles grating, (c) Equispaced spiral grating.



**Fig. 3** Polar coordinate system for the analysis of the centrosymmetric gratings.

ここでは、**Fig. 3** に示す CG の中心が原点ではなく、 $P_1$  点上にある場合について考える。中心が  $P_1$  点にある場合でも、格子固有の基本的性質とでもいえる極座標系に対するそれぞれの空間周波数は何ら変化しないので、 $P_1$ を中心とした回転角  $\alpha$ 、半径方向の距離  $R$  を原点  $(0, 0)$  について表現し、前節の格子の透過率分布の式へ代入すればよいわけである。 $P_1(r_1, \theta_1)$  における回転角  $\alpha$  は、原点に対して(6)式となる。

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\bar{P}_1 \bar{P}_2}{\bar{P}_1 \bar{P}_2} = \tan^{-1} \frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{r \cos \theta - r_1 \cos \theta_1} \quad (6)$$

また、半径方向の距離  $R$  は(7)式となる。

$$R = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1)} \quad (7)$$

以上より、(5)式に示す等間隔スパイラル格子の中心が、点  $P_1$  上にある場合の透過率分布  $T_S(r_1, \theta_1)$  は、(8)式となる。

$$T_S(r_1, \theta_1) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \times \left( \frac{\theta_s}{2\pi} \tan^{-1} \frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{r \cos \theta - r_1 \cos \theta_1} - \frac{1}{r_s} \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1)} \right) \right\} \quad (8)$$

また、この等間隔スパイラル格子の特別な場合として見なせる、ラジアル格子、等間隔同心円格子の中心が点  $P_1$  上にある場合の透過率分布  $T_R(r_1, \theta_1)$ 、 $T_C(r_1, \theta_1)$  は、それぞれ(9)、(10)式となる。

$$T_R(r_1, \theta_1) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \times \left( \frac{\theta_s}{2\pi} \tan^{-1} \frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{r \cos \theta - r_1 \cos \theta_1} \right) \right\} \quad (9)$$

$$T_C(r_1, \theta_1) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \times \left( \frac{1}{r_s} \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1(\theta - \theta_1)} \right) \right\} \quad (10)$$

### 3. モアレ縞の透過率分布

#### 3.1 平行直線格子によるモアレ縞

(1)、(2)式に示す直線格子の重ね合せでは、積のモアレ縞<sup>9)</sup>の考え方から従って、モアレ縞の透過率分布  $F_1$

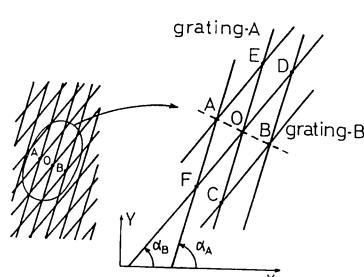
は(11)式となる。

$$F_1 = I \cdot T_A \cdot T_B = \frac{I}{4} + \frac{I}{4} \left\{ \cos 2\pi \frac{x}{a} + \cos 2\pi \left( \frac{\cos \theta_c}{b} x - \frac{\sin \theta_c}{b} y \right) \right\} + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \left( \frac{1}{a} + \frac{\cos \theta_c}{b} \right) x - \frac{\sin \theta_c}{b} y \right\} + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \left( \frac{1}{a} - \frac{\cos \theta_c}{b} \right) x + \frac{\sin \theta_c}{b} y \right\} \quad (11)$$

ここで、 $I$  は光の強度である。この結果は、よく知られているように第1項目がバイアス成分、第2項目が本来の格子である。そして、第3項目、第4項目がモアレの成分となる<sup>9)</sup>。ところが、この第3項目、第4項目のいずれが、われわれが日常観察するモアレ縞であるかの判別は、Oster が行なうような人間の介在を必要とする解析法、あるいは格子定数がほぼ等しく、かつ相対的な回転角が小さいと仮定した場合の空間周波数の比較による解析法が見られる程度であり、一般的な解析法は見いただされていない。そこで、本稿ではこの平行直線格子の交差状態を解析することにより、第3項、第4項のいずれがわれわれの観察するモアレ縞であるかを判別する解析法を示す。

**Fig. 4**において、モアレ縞は、格子によって形成された平行四辺形 AEOF を考えれば、その対角線の短い方向 (AOB 方向) に発生することがわかる。さらに、点 O のまわりについて考えると、平行四辺形の各頂点での角度、すなわち、格子の交差角とモアレ縞の方向との間には、その交差角が、 $\pi/2$  (rad) を越える方向にモアレ縞が、発生するという関係が認められる。それゆえ、この現象を利用し、新たに、交差角というパラメータを次のように一般化して定義することによって、モアレ縞の方向は、容易に求めることができるものと考える。

**Fig. 4** 格子 A、格子 B が水平軸となす角度をそれぞれ  $\alpha_A, \alpha_B$  とすると、格子の透過率分布の式の余弦項の変数  $x, y$  の関係より、



**Fig. 4** The direction of moiré patterns.

$$\alpha_A = \tan^{-1} \left( \frac{dy}{dx} \right)_A, \quad \alpha_B = \tan^{-1} \left( \frac{dy}{dx} \right)_B \quad (12)$$

として求めることができる。また、ここでは、 $\tan^{-1} \alpha_0$  の主値が  $-\pi/2 < \alpha_0 < \pi/2$  であることを考慮して、 $\alpha_A, \alpha_B$  が負のときには、それぞれ  $\pi + \alpha_A$  を  $\alpha_A, \pi + \alpha_B$  を  $\alpha_B$  と置き換える、すべて正の角度として取り扱うこととする。

次に、交差角  $\theta_c$  を(13)式によって定義する。

$$\alpha_A - \alpha_B = \theta_c \quad (13)$$

ここで、 $\theta_c$  が負になる場合には、

$$\alpha_B - \alpha_A = \theta_c \quad (14)$$

とする。この場合、交差角を clockwise で求めるという定義を逸脱してしまわるために、再度、格子 B から格子 A の方向で、積のモアレの式を検討する。

$$\begin{aligned} F_{11} = I \cdot T_A \cdot T_B &= \frac{I}{4} + \frac{I}{4} \left\{ \cos 2\pi \frac{x}{a} \right. \\ &\quad \left. + \cos 2\pi \left( \frac{\cos \theta_c}{b} x - \frac{\sin \theta_c}{b} y \right) \right\} \\ &+ \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \left( \frac{1}{a} + \frac{\cos \theta_c}{b} \right) x - \frac{\sin \theta_c}{b} y \right\} \\ &+ \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \left( \frac{\cos \theta_c}{b} - \frac{1}{a} \right) x - \frac{\sin \theta_c}{b} y \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

この結果より、明らかに(11)式と異なる点は、第4項の減算の順序のみであることがわかる。そのため、 $\theta_c$  が負になる場合には、(11)式に対して、第4項の減算の順序を変更した式を利用する必要があることがわかる。次に、前述の平行四辺形の考え方従うと、交差角  $\theta_c$  が  $\pi/2$ (rad) を境として大か小かによってモアレ縞の方向(発生する領域)を決定することができる。この方向を求め、次に積のモアレの式の第4項目が示す図形の傾き  $\alpha_{M_4}$  を(16)式として求める。

$$\alpha_{M_4} = \tan^{-1} \left( \frac{dy}{dx} \right)_{M_4} \quad (16)$$

この  $\alpha_{M_4}$  が、上述の平行四辺形の考え方の交差角によって求められたモアレ縞の方向(発生する領域)とどのように対応しているかにより、積のモアレ縞の式の第3項、第4項のいずれがモアレ縞を示しているかの判別を行なうものである。以上の処理を Fig. 5 のフローチャートに示す。

### 3.2 CG によるモアレ縞

前節に示した平行直線格子によるモアレ縞同様に、交差角を考えることにより、CG によるモアレ縞も容易に定義することができる。

Fig. 6 に示すように CG も平行直線格子同様に格子の交差状態を調べると、ほぼ平行四辺形とみなせる図形

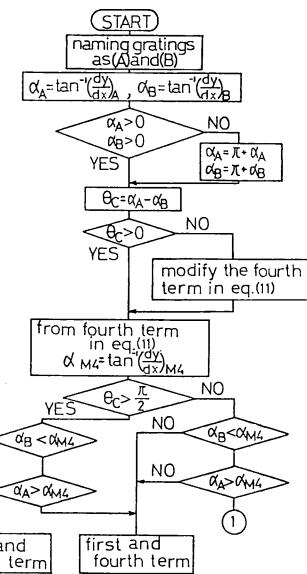


Fig. 5 Flowchart of algorithm for defining the intersecting angles.

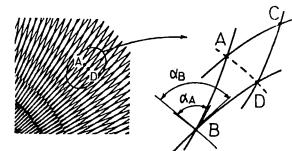


Fig. 6 The direction of moiré patterns.

によってモアレ縞が形成されている。前述の平行直線格子で求めた傾きは、ここでは原点を中心とした円の接線に対する傾きとして、2枚の格子に対してそれぞれ次のように定義することができます。

$$\alpha_A = \tan^{-1} \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_A, \quad \alpha_B = \tan^{-1} \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_B \quad (17)$$

この定義により、平行直線格子同様の処理を行なうことができる。これにより、CG に対しても容易にモアレ縞の图形と式を対応させることができる。次に、実例にもとづき、上記の解析法を検討する。

## 4. CG によるモアレ縞の結果および検討

### 4.1 原点を中心とした場合のモアレ縞

ラジアル格子、等間隔スパイラル格子、等間隔同心円格子によるモアレ縞を格子の中心を原点とした場合について考える。

#### 4.1.1 ラジアル格子、等間隔スパイラル格子によるモアレ縞

Fig. 2(a)(b)のラジアル格子と等間隔スパイラル格子によるモアレ縞を考える。(3),(5)式より積のモア

レ縞を考えると(18)式となる。

$$\begin{aligned} F_2 = I \cdot T_S \cdot T_R &= \frac{I}{4} + \frac{I}{4} \left\{ \cos 2\pi \left( \frac{\theta_S}{2\pi} \theta - \frac{1}{r_S} r \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos 2\pi \frac{\theta_R}{2\pi} \theta \right\} \\ &+ \frac{I}{8} \cos 2\pi \left( \frac{\theta_S + \theta_R}{2\pi} \theta - \frac{1}{r_S} r \right) \\ &+ \frac{I}{8} \cos 2\pi \left( \frac{\theta_S - \theta_R}{2\pi} \theta - \frac{1}{r_S} r \right) \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、スパイアル格子  $T_S$ 、ラジアル格子  $T_R$  の傾きは、

$$\left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_S = \frac{\theta_S \cdot r_S}{2\pi r}, \quad \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_R = \infty \quad (19)$$

となる。よって、

$$\alpha_S = \tan^{-1} \left( \frac{\theta_S \cdot r_S}{2\pi r} \right), \quad \alpha_R = \frac{\pi}{2} \quad (20)$$

ここで、 $\theta_S, r_S$  を正の値とすると、 $0 < \alpha_S < \pi/2$  (ただし  $r \neq 0$ ) となり、前章で定義した交差角  $\theta_C$  を正の値とするには、

$$\alpha_R - \alpha_S = \theta_C \quad (21)$$

と格子の減算の順序を変更する必要がある。また、同時に、(21)式より  $0 < \theta_C < \pi/2$  であることもわかる。

すなわち、Fig. 7 の角度  $\alpha_M$  の破線方向 (ただし、 $0 \leq \alpha_M < \alpha_S$  or  $\pi/2 < \alpha_M \leq \pi$ ) にモアレ縞が生じることがわかる。次に、(18)式で交差角を求めた場合、減算の順序を変更したため、(18)式の第4項目の減算の順序を変更して、第4項目の图形のなす角度  $\alpha_{M_4}$  を求める。

$$\alpha_{M_4} = \tan^{-1} \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_{M_4} = \tan^{-1} \left( \frac{(\theta_S - \theta_R) \cdot r_S}{2\pi r} \right) \quad (22)$$

ここで、 $\theta_S, \theta_R$  の関係から  $\alpha_{M_4}$  を考えると、

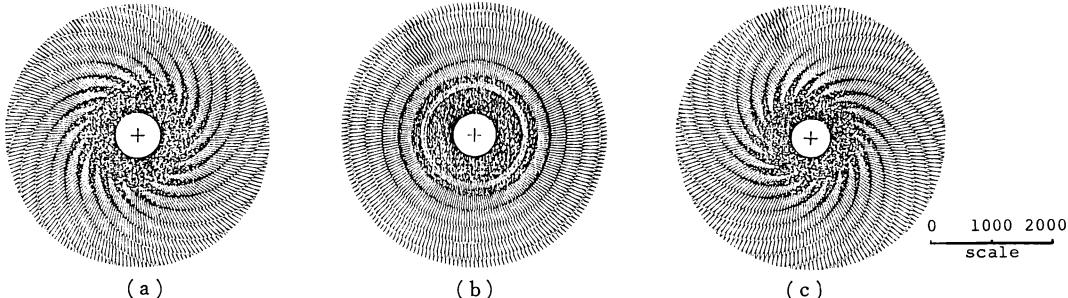


Fig. 7 The direction of moiré patterns with the radial grating and the equispaced spiral grating.

(a)	(b)	(c)
$T_R = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos 2\pi \frac{200}{2\pi} \theta \right)$	$T_R = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos 2\pi \frac{200}{2\pi} \theta \right)$	$T_R = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos 2\pi \frac{200}{2\pi} \theta \right)$
$T_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{220}{2\pi} \theta - \frac{1}{300} r \right) \right\}$	$T_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{200}{2\pi} \theta - \frac{1}{300} r \right) \right\}$	$T_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{180}{2\pi} \theta - \frac{1}{300} r \right) \right\}$
$F_M = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi \left( \frac{20}{2\pi} \theta - \frac{1}{300} r \right) \right\}$	$F_M = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi \frac{1}{300} r \right\}$	$F_M = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi \left( \frac{20}{2\pi} \theta + \frac{1}{300} r \right) \right\}$

**Table 1** The investigation of the angles on the moiré patterns.

			Remarks
1	$\alpha_c$	0	—
2	$\alpha_s$	$\tan^{-1} \frac{\theta_s \cdot r_s}{2\pi \cdot r}$	$\theta_s, r_s \neq \infty$ and $r > 0$ ; $0 < \alpha_s < \pi/2$
3	$\theta_c$	$\tan^{-1} \frac{\theta_s \cdot r_s}{2\pi \cdot r}$	$\alpha_s - \alpha_c = \theta_c (= \alpha_s)$ ; $0 < \theta_c < \pi/2$
4	$\alpha_M$	$\alpha_s < \alpha_M < \pi$	
5	$\alpha_{M_4}$	$\tan^{-1} \frac{\theta_s \cdot r_s \cdot r_c}{2\pi(r_s + r_c) \cdot r}$	$\frac{r_c}{r_s + r_c} < 1$
6		$0 < \alpha_{M_4} < \alpha_s < \alpha_M$	Moiré is defined as first and third term.

$$F_3 = I \cdot T_c \cdot T_s = \frac{I}{4} + \frac{I}{4} \left\{ \cos 2\pi \frac{1}{r_c} r \right. \\ \left. + \cos 2\pi \left( \frac{\theta_s}{2\pi} \theta - \frac{1}{r_s} r \right) \right\} \\ + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \left( \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_s} \right) r + \frac{\theta_s}{2\pi} \theta \right\} \\ + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \left( \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_s} \right) r - \frac{\theta_s}{2\pi} \theta \right\} \quad (24)$$

前節と同様の演算を **Table 1** に示す。

**Table 1** の③, ⑤より, 交差角  $\theta_c$  は鋭角となり, 積のモアレ縞の式第4項目の図形はモアレ縞の発生する方向に存在しないことがわかり, モアレ縞の透過率分布  $F'_3$  は第1項と第3項の和となることがわかる。

$$F'_3 = \frac{I}{4} + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \left( \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_s} \right) r + \frac{\theta_s}{2\pi} \theta \right\} \quad (25)$$

$r_c, r_s, \theta_s$  の関係より, **Fig. 9** に示すモアレ縞が発生する。いずれの場合にも図中の式  $F_M$  は, (25)式より求められ, モアレ縞と対応している。

#### 4.1.3 2種類の等間隔スパイアル格子によるモアレ縞

この場合も同様に考えることにより, 積のモアレ縞の式  $F_4$  は(26)式となる。

$$F_4 = I \cdot T_{S_1} \cdot T_{S_2}$$

$$= \frac{I}{4} + \frac{I}{4} \left\{ \cos 2\pi \left( \frac{\theta_{S_1}}{2\pi} \theta - \frac{1}{r_{S_1}} r \right) \right. \\ \left. + \cos 2\pi \left( \frac{\theta_{S_2}}{2\pi} \theta - \frac{1}{r_{S_2}} r \right) \right\} \\ + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \frac{\theta_{S_1} + \theta_{S_2}}{2\pi} \theta - \left( \frac{1}{r_{S_1}} + \frac{1}{r_{S_2}} \right) r \right\} \\ + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \frac{\theta_{S_2} - \theta_{S_1}}{2\pi} \theta - \left( \frac{1}{r_{S_1}} - \frac{1}{r_{S_2}} \right) r \right\} \quad (26)$$

それぞれの格子により, 前述の解析を行なうと, 発生するモアレ縞は **Fig. 10** に示すものとなる。

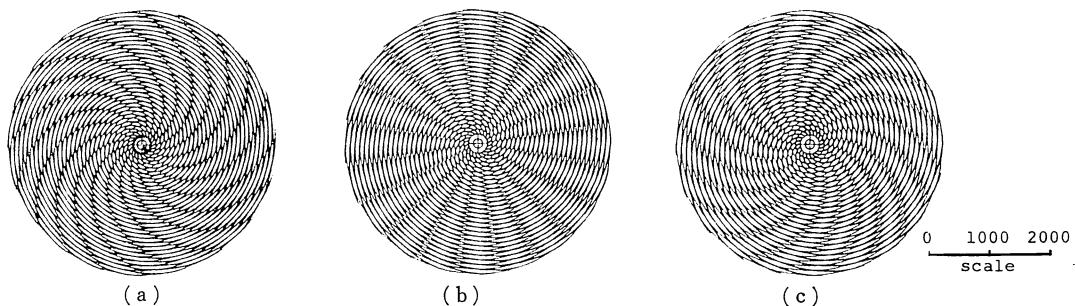
#### 4.2 中心位置ずれのある場合のモアレ縞

次に, 中心が原点でないラジアル格子による場合を考える。2枚のラジアル格子の中心をそれぞれ  $(c, 0)$ ,  $(c, \pi)$  とした場合, 透過率分布は, (9)式より, (27), (28)式となることがわかる。

$$T_r(c, 0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{1}{\theta_r} \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{-c + r \cos \theta} \right) \right\} \quad (27)$$

$$T_r(c, \pi) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{1}{\theta_r} \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{c + r \cos \theta} \right) \right\} \quad (28)$$

これらの格子は, **Fig. 11** に示すように2枚の格子の相対的位置関係により, 交差角  $\theta_c$  は複雑に変化している。



**Fig. 9** Moiré patterns with the equispaced circle grating and the equispaced spiral grating.

$$T_c = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos 2\pi \frac{1}{60} r \right)$$

$$T_s = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{20}{2\pi} \theta - \frac{1}{50} r \right) \right\}$$

$$F_M = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi \left( \frac{20}{2\pi} \theta - \frac{1}{300} r \right) \right\}$$

$$T_c = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos 2\pi \frac{1}{60} r \right)$$

$$T_s = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{20}{2\pi} \theta - \frac{1}{60} r \right) \right\}$$

$$F_M = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi \frac{20}{2\pi} \theta \right\}$$

$$T_c = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos 2\pi \frac{1}{60} r \right)$$

$$T_s = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{20}{2\pi} \theta - \frac{1}{70} r \right) \right\}$$

$$F_M = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi \left( \frac{20}{2\pi} \theta + \frac{1}{420} r \right) \right\}$$

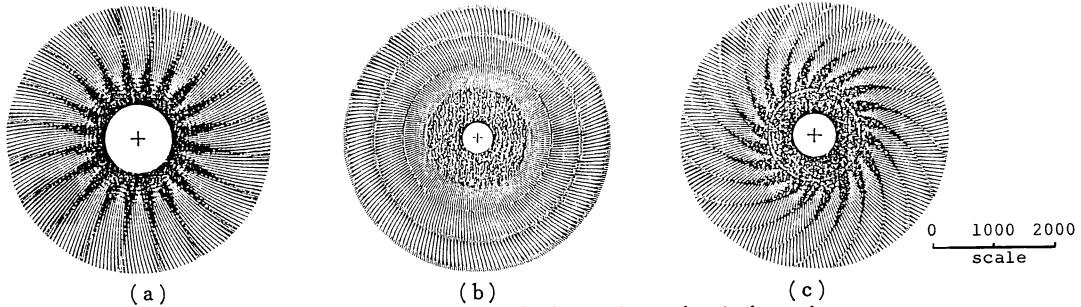


Fig. 10 Moiré patterns with the equispaced spiral gratings.

(a)

$$T_{S_1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{200}{2\pi} \theta - \frac{1}{300} r \right) \right\}$$

$$T_{S_2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{220}{2\pi} \theta - \frac{1}{300} r \right) \right\}$$

$$F_M = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi \frac{20}{2\pi} \theta \right)$$

(b)

$$T_{S_1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{200}{2\pi} \theta - \frac{1}{300} r \right) \right\}$$

$$T_{S_2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{200}{2\pi} \theta - \frac{1}{500} r \right) \right\}$$

$$F_M = \frac{1}{4} \left( 1 + \cos 2\pi \frac{1}{750} r \right)$$

(c)

$$T_{S_1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{200}{2\pi} \theta - \frac{1}{300} r \right) \right\}$$

$$T_{S_2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{220}{2\pi} \theta - \frac{1}{600} r \right) \right\}$$

$$F_M = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi \left( \frac{20}{2\pi} \theta + \frac{1}{600} r \right) \right\}$$

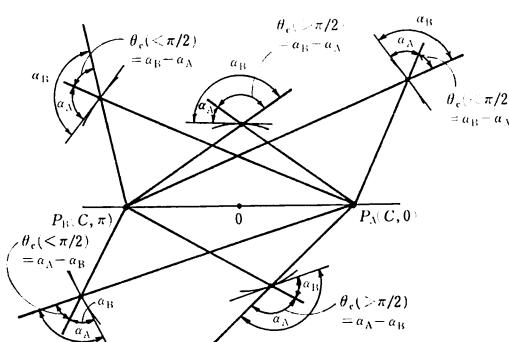


Fig. 11 The intersecting angles.

この場合にも、交差角  $\theta_c$  が鈍角であるか否かにより、モアレ縞の方向（発生する領域）をそれぞれの座標において決定する。そして、それぞれの格子の透過率分布の式より求めた積のモアレ縞の第4項の図形の方向と、このモアレ縞の発生する領域とを比較することにより、モアレ縞の透過率分布の式を一意的に決定することができる。これらの処理を計算機により行なうと、モアレ縞の透過率分布は自動的に次のように分類できる。

1) 第1, 第2象限, 半径  $c$  の円の外部

$$F_M = \frac{I}{4} + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \frac{1}{\theta_r} \left( \tan^{-1} \frac{r \tan \theta}{-c + r \cos \theta} - \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{-c + r \cos \theta} \right) \right\}$$

2) 第1, 第2象限, 半径  $c$  の円の内部

$$F_M = \frac{I}{4} + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \frac{1}{\theta_r} \left( \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{-c + r \cos \theta} \right) \right\}$$

$$+ \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{c + r \cos \theta} \right\}$$

3) 第3, 第4象限, 半径  $c$  の円の外部

$$F_M = \frac{I}{4} + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \frac{1}{\theta_r} \left( \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{c + r \cos \theta} - \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{-c + r \cos \theta} \right) \right\}$$

4) 第3, 第4象限, 半径  $c$  の円の内部

$$F_M = \frac{I}{4} + \frac{I}{8} \cos 2\pi \left\{ \frac{1}{\theta_r} \left( \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{c + r \cos \theta} + \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{-c + r \cos \theta} \right) \right\}$$

以上のように、交差角の符号による積のモアレ縞の式の第4項目の変換、 $\pi/2$  を越えるか否かによる判別によって、モアレ縞の透過率分布の式を決定することができる。

この計算を計算機によって行ない、合成透過率値に閾値を定め、2値化画像として求めたものが Fig. 12(b)、

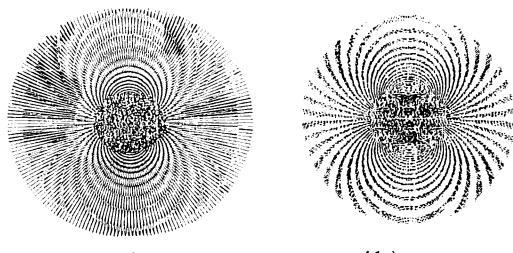
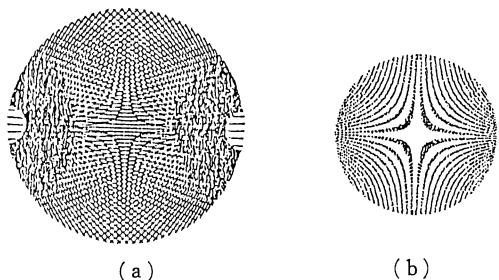
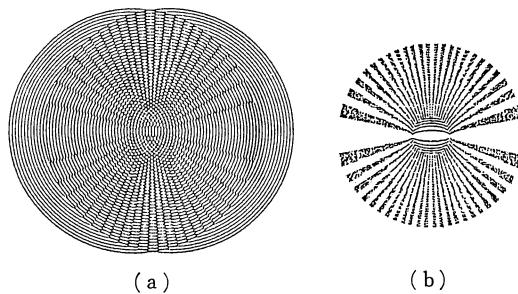


Fig. 12 Moiré patterns with the radial gratings when the centers of gratings are proximate. (a) Moiré patterns, (b) Two valued picture.



**Fig. 13** Moiré patterns with the radial gratings when the centers of gratings are away.  
(a) Moiré patterns, (b) Two valued picture.



**Fig. 14** Moiré patterns with the equispaced circle gratings.  
(a) Moiré patterns, (b) Two valued picture.

**Fig. 13(b)**である。それぞれ、モアレ縞と一致している。

同様に、2枚の等間隔同心円格子の中心をずらせて重ね合わせた場合に発生するモアレ縞を考える。**Fig. 14(a)**と離心量を等しくした場合の本稿で述べた手法によるモアレ縞の透過率分布の2値化画像を**Fig. 14(b)**に示す。

従来の Oster による幾何学的解析では、発生するモアレ縞と解析結果より得た式との対応が不十分なため、図中に見られる橢円、双曲線縞を一意的に分離することができなかった。しかしながら、本稿に述べた手法に従えば、**Fig. 14(b)**に示す解析結果を一意的に数値計算により求めることができる。さらに、基本空間周波数による解析結果に高次の項を付加することにより縞のプロファイルを扱うことができるため、モアレ縞の鮮明化の

問題も取り扱うことができる。これは、たとえば、近年使用頻度が高まりつつある光学式ロータリーエンコーダにおける格子と縞の透過率分布に起因する誤差解析など、CG を用いた装置の解析に有効な手法であることを示している。

本研究では平行四辺形を考え、その頂点の角度（格子の交差角）によりモアレ縞の式を求めた。その際、 $\pi/2$  (rad) を閾値として考えたけれども、現実には、Oster が直線格子について述べている<sup>10)</sup>ように、 $\pi/2$  (rad) 前後にモアレ縞の発生しない領域があり、今後 CG に対してこの部分の検討が必要であると考える。

## 5. ま と め

モアレ縞が発生する場合の格子の交差状態を調べることにより、Oster の解析法のような人間の判別が必要な手法ではない、格子の交差角をパラメータとしたモアレ縞の图形と式を対応させる解析法を提案した。さらに、従来、平行直線格子の解析に用いられていた格子の透過率分布の解析法を、極座標に適用することにより CG の透過率分布を定義し、さらに、交差角をパラメータとすることにより、複雑に変化する CG によるモアレ縞を計算機により自動的に解析した。この解析法により、CG の取扱いはきわめて容易なものとなり、より広い分野での利用が期待できるものと考える。

最後に、研究の開始時より結果のまとめに至るまで、熱心にご指導くださった大阪大学工学部応用物理学科、横関俊介先生に心より感謝いたします。

## 文 献

- 1) たとえば、高崎 宏：機械の研究，26 (1976) 499.
- 2) たとえば、戸塚 泰：機械の研究，22 (1970) 94.
- 3) G. Oster: J. Opt. Soc. Am., 54 (1964) 169.
- 4) S. Yokozeki: Appl. Opt., 17 (1978) 2541.
- 5) S. Yokozeki: Jpn. J. Appl. Phys., 9 (1970) 1011.
- 6) 新井泰彦：精密機械，49 (1983) 871.
- 7) S. Yokozeki: Opt. Lasers Eng., 3 (1982) 15.
- 8) S. Yokozeki: Appl. Opt., 15 (1976) 2223.
- 9) 高崎 宏：機械の研究，26 (1974) 639.
- 10) G. Oster: *The Science of Moiré Patterns*, 2nd ed. (Edmund Scientific Co., Barrington, NJ, 1969) p. 15.