

## 点対称格子と直線格子によるモアレ縞の解析について

新井 泰彦・阿波 啓造・倉田 忠雄

関西大学工学部機械工学科 〒562 吹田市山手町 3-3-35

(1985年3月2日受理)

### On the Analysis of Moiré Patterns between the Centrosymmetric Gratings and the Straight Line Gratings

Yasuhiko ARAI, Keizo AWA and Tadao KURATA

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kansai University,  
3-3-35, Yamate-cho, Suita 564

This paper describes the analysis of moiré patterns between the straight line gratings and the centrosymmetric gratings; for instance the radial gratings, the circular gratings, and the spiral gratings. This method is the extension of analysis of moiré patterns between centrosymmetric gratings in order to deal with moiré patterns between the centrosymmetric gratings and the different structural gratings. By using this method, the profile of these moiré patterns, that has not been able to be analyzed in the usual geometrical method, can be uniquely calculated with the digital computer, and then, it is suggested that the improvement of the contrast and/or the sharpening of these moiré patterns are able to be discussed sufficiently in the engineering fields.

#### 1. はじめに

モアレ縞は、規則的な図形を重ね合わせた場合に、新たに発生する縞模様として知られ<sup>1)</sup>、現在、変位、角度の精密測定、材料の歪測定など工学の分野で広く利用されている<sup>1,2)</sup>。ところが、光学式エンコーダ等に利用されている、いわゆるラジアル格子のような点対称格子 (centrosymmetric gratings; 以下 C.G. と呼ぶ) によるモアレ縞の解析は、従来 Oster による幾何学的解析<sup>3)</sup>が行なわれているにすぎず、その透過率分布を取り扱うことはできなかった。また、その解析過程において、インディシャル式<sup>4)</sup>の和、差の設定を観察者が行なわなければならない問題もあった。

これらの問題に対し前報<sup>5)</sup>では、従来の直角座標における直線格子の考え方を極座標に適用することにより、C.G. の透過率分布を式で表わし、さらに、格子条の交差角を新たなパラメータとすることにより、発生するモアレ縞を計算機内部で一意的に定義し、その透過率分布を演算することのできる解析法を示した。

本稿では、C.G. の工学利用を促す意味で、一般的な

プロフィールをもつ C.G. 同士のモアレ縞透過率分布を示した後、さらに、C.G. と直線格子によるモアレ縞の透過率分布を求めた。

まず、それぞれの格子をその特徴をあらわすのに最も適した座標系を用いてあらわし、次に積のモアレ<sup>7)</sup>を計算する段階で一方の座標系を変換し、もう一方の格子をあらわす座標系に合わせる。C.G. と直線格子の場合には、まず、C.G. を極座標系、直線格子を直交座標系であらわし、次に直線格子をあらわす直交座標系を極座標系に変換する。これによって、直線格子と C.G. によるモアレ縞を幾何学的に図形としてのみとらえる Oster の解析法<sup>3)</sup>では求めることのできない透過率分布を一意的に数値計算により求めることができた。本稿では、一例として、ラジアル格子、等間隔同心円格子に直線格子を重ね合わせた場合に発生するモアレ縞をとりあげ、その考え方を示す。

#### 2. C.G. によるモアレ縞の透過率分布

まず、C.G. が一般的なプロフィールをもつ格子の場合のモアレ縞の透過率分布を表わす式を考える。

### 2.1 C.G. の透過率分布

C.G. の中心が原点上にある場合の透過率分布  $T_1$  は、半径方向  $r$  と回転角方向  $\theta$  との2方向に、極座標系の空間周波数を定義することによって、一般に(1)式として表わすことができる<sup>5,6)</sup>。

$$T_1(r, \theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \{b_m \cos 2\pi m(\mu_1 r + \nu_1 \theta) + c_m \sin 2\pi m(\mu_1 r + \nu_1 \theta)\} \quad (1)$$

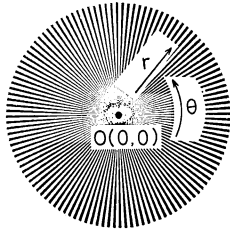


Fig. 1 Radial grating.

ここで、 $\mu_1$  は半径方向の空間周波数であり、 $\nu_1$  は回転角方向の空間周波数で、 $2\pi(\text{rad})$  あたりの本数で示される。また、 $m$  は整数であり、 $a_0, b_m, c_m$  はフーリエ級数の係数である。同様に、もう1枚のC.G.の透過率分布  $T_2$  を考える。

$$T_2(r, \theta) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{f_n \cos 2\pi n(\mu_2 r + \nu_2 \theta) + g_n \sin 2\pi n(\mu_2 r + \nu_2 \theta)\} \quad (2)$$

ここで、(1)式同様に、 $\mu_2, \nu_2$  はそれぞれ、半径方向、回転角方向の空間周波数、 $n$  は整数、 $e_0, f_n, g_n$  はフーリエ級数の係数である。

次に、この2枚の格子を重ね合わせた場合に発生するモアレ縞について考える。

### 2.2 C.G. によるモアレ縞

C.G. の場合にも直線格子の場合とまったく同様に、積のモアレ縞<sup>7)</sup> を考えると(1)(2)式よりC.G.による積のモアレ縞の透過率分布  $T_m(r, \theta)$  は(3)式となる<sup>8)</sup>。

$$\begin{aligned} T_m(r, \theta) &= T_1(r, \theta) \cdot T_2(r, \theta) \\ &= a_0 e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{b_i f_i}{2} + \frac{c_i g_i}{2} \right) \cos 2\pi i \{(\mu_1 - \mu_2)r + (\nu_1 - \nu_2)\theta\} + \left( \frac{c_i f_i}{2} - \frac{b_i g_i}{2} \right) \sin 2\pi i \{(\mu_1 - \mu_2)r + (\nu_1 - \nu_2)\theta\} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{b_j f_j}{2} - \frac{c_j g_j}{2} \right) \cos 2\pi j \{(\mu_1 + \mu_2)r + (\nu_1 + \nu_2)\theta\} + \left( \frac{c_j f_j}{2} + \frac{b_j g_j}{2} \right) \sin 2\pi j \{(\mu_1 + \mu_2)r + (\nu_1 + \nu_2)\theta\} \right] \\ &\quad + a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \{b_m \cos 2\pi m(\mu_1 r + \nu_1 \theta) + c_m \sin 2\pi m(\mu_1 r + \nu_1 \theta)\} \\ &\quad + e_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{f_n \cos 2\pi n(\mu_2 r + \nu_2 \theta) + g_n \sin 2\pi n(\mu_2 r + \nu_2 \theta)\} \\ &\quad + \sum_{\substack{m \\ m \neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{b_m f_n}{2} + \frac{c_m g_n}{2} \right) \cos 2\pi \{m(\mu_1 r + \nu_1 \theta) - n(\mu_2 r + \nu_2 \theta)\} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{c_m f_n}{2} - \frac{b_m g_n}{2} \right) \sin 2\pi \{m(\mu_1 r + \nu_1 \theta) - n(\mu_2 r + \nu_2 \theta)\} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{b_m f_n}{2} - \frac{c_m g_n}{2} \right) \cos 2\pi \{m(\mu_1 r + \nu_1 \theta) + n(\mu_2 r + \nu_2 \theta)\} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{c_m f_n}{2} + \frac{b_m g_n}{2} \right) \sin 2\pi \{m(\mu_1 r + \nu_1 \theta) + n(\mu_2 r + \nu_2 \theta)\} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、われわれが観察するモアレ縞は、各項であらわされる周期構造のうち最も空間周波数の小さい成分である。

格子定数がほぼ等しく、かつ相対的な回転角が小さい直線格子の場合<sup>9)</sup> には、(3)式の第1項のバイアス成分と第2項との和が、われわれが観察するモアレ縞の式となる<sup>8)</sup>。しかし、C.G. では、前報<sup>5)</sup> にも述べたように、格子条が複雑に交差するため、重ね合わせる格子、および観察する領域によって、モアレ縞を表わす式は、あるいは、第2項となり、あるいは第3項となる。たとえば、

Fig. 2 に示す2枚のラジアル格子の中心を2C離して重ね合わせた場合、モアレ縞の透過率分布は、半径Cの円の内部では、(3)式の第1項と第3項の和となり、Cの外では、(3)式の第1項と第2項の和となる。この違いは、格子条の交差角によって生じる。

### 2.3 交差角について

Fig. 3 に示すように、2枚の格子を重ね合わせると、4本の格子条よりなる四角形 AEOF (一般には、4本の曲線による図形であるが、近似的に四角形とみなす) が構成される。種々の場合について調べるとモアレ縞は、

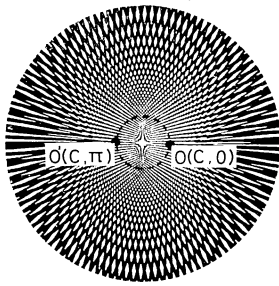


Fig. 2 Moiré patterns with radial gratings.

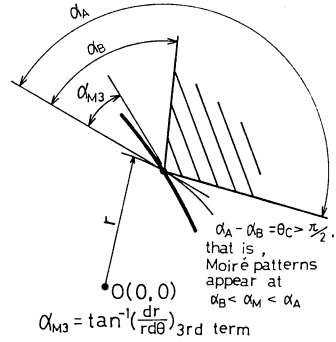


Fig. 4 Discrimination of moiré patterns.

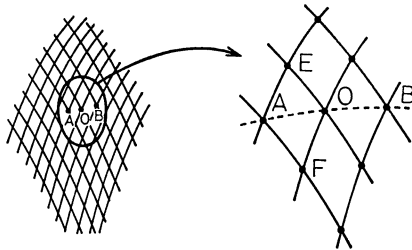


Fig. 3 Direction of moiré patterns.

短い対角線方向 (AOB) に発生することがわかる。

この現象を違った観点より見るならば、四角形の各頂点での頂角、すなわち、格子条の交差角が  $\pi/2$  (rad) を越える対角点を結ぶ方向にモアレ縞が発生することになる。この考え方により、格子を重ね合わせた場合の各点におけるモアレ縞の方向の範囲を容易に決定することができる。一方、(3)式のモアレ縞を表わすと考えられる第2、3項において、モアレ縞の周期等、基本的性質を示すものは最低次項 ( $i=1$  or  $j=1$ ) である。高次の項は微細な構造に関係するのみであるから、図形として縞の方向を求める場合には、この最低次項のみを取り扱えばよい。そこで、第3項の最低次項 ( $j=1$ ) をとり、この図形が原点を中心とする円の接線となす角  $\alpha_{M3}$  を求める。この角は三角関数の変数部分から  $\tan^{-1}(dr/r d\theta)$  となる。この方向と上述の交差角が  $\pi/2$ (rad) を越える対角交点を結ぶ方向とを比較することにより、(3)式の第2項、第3項のいずれが、われわれが観察するモアレ縞に関係しているかを判別することができる。たとえば、**Fig. 4** のハッチング領域が交差角より求めたモアレ縞の発生しうる方向の範囲であるとする。一方、第3項が表わす縞の方向は、 $\alpha_{M3}$  となっており、これは、ハッチング領域に含まれていないので、モアレ縞として見える透過率分布を表わしているのは第2項であると推定できる。このアルゴリズムを **Fig. 5** に示す。

### 3. 直線格子と C.G. によるモアレ縞

前節までの2枚の C.G. によるモアレ縞の考え方をより拡張し、直線格子と C.G. によるモアレ縞の透過率分布を考える。

#### 3.1 直線格子と C.G. によるモアレ縞の透過率分布の一般式

直線格子の透過率分布  $T_L$  は、直角座標を用いたほうが(4)式に示すように容易に式を表現できる。

$$T_L(x, y) = h_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \{k_p \cos 2\pi p(\mu_3 x + \nu_3 y) + q_p \sin 2\pi p(\mu_3 x + \nu_3 y)\} \quad (4)$$

ここで、 $\mu_3, \nu_3$  はそれぞれ  $x, y$  方向の空間周波数、 $p$  は整数、 $h_0, k_p, q_p$  はフーリエ級数の係数である。

(1)、(4)式より、直線格子と C.G. とを重ね合わせた場合に発生するモアレ縞を考える。この場合にも、前章で考えたと同様に、積のモアレ縞を考えればよい。

(1)、(4)式は、それぞれ極座標、直角座標と座標系が異なる。しかし、この問題は、一方の座標系を他の座標系に座標変換することにより容易に解消できる。すなわち、直交座標値を極座標パラメータで表わした(5)式を(4)式に代入すれば、直線格子を極座標系により(6)式のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$T_L(r, \theta) = h_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \{k_p \cos 2\pi p(\mu_3 r \cos \theta + \nu_3 r \sin \theta) + q_p \sin 2\pi p(\mu_3 r \cos \theta + \nu_3 r \sin \theta)\} \quad (6)$$

(1)、(6)式より(3)式に示す積のモアレ縞を前章の考え方に従い考えるならば、C.G. と直線格子とによるモアレ縞の透過率分布の一般式  $F_{c.g.l}(r, \theta)$  は(7)式として考えることができる。

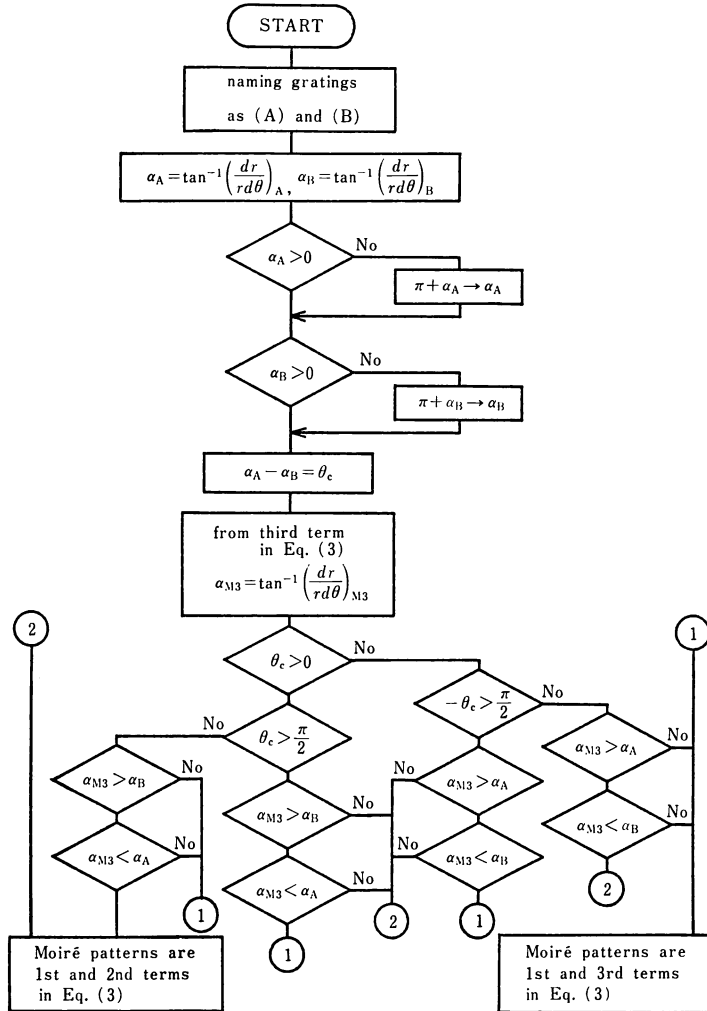


Fig. 5 Flow chart.

$$\begin{aligned}
 F_{c.g.l}(r, \theta) &= a_0 h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{b_i k_i}{2} + \frac{c_i q_i}{2} \right) \cos 2\pi i \{ (\mu_1 r + \nu_1 \theta) \right. \\
 &\quad \left. - (\mu_3 r \cos \theta + \nu_3 r \sin \theta) \right] + \left( \frac{c_i k_i}{2} - \frac{b_i q_i}{2} \right) \\
 &\quad \times \sin 2\pi i \{ (\mu_1 r + \nu_1 \theta) - (\mu_3 r \cos \theta + \nu_3 r \sin \theta) \} \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

あるいは,

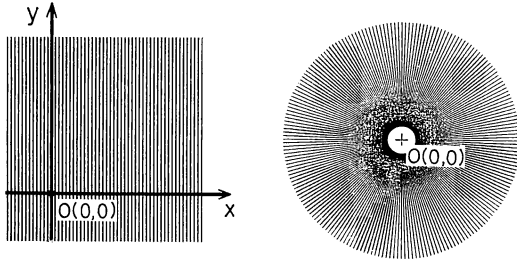
$$\begin{aligned}
 &= a_0 h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{b_i k_i}{2} - \frac{c_i q_i}{2} \right) \cos 2\pi i \{ (\mu_1 r + \nu_1 \theta) \right. \\
 &\quad \left. + (\mu_3 r \cos \theta + \nu_3 r \sin \theta) \right] + \left( \frac{c_i k_i}{2} + \frac{b_i q_i}{2} \right) \\
 &\quad \times \sin 2\pi i \{ (\mu_1 r + \nu_1 \theta) + (\mu_3 r \cos \theta + \nu_3 r \sin \theta) \} \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

ここで、(7.1)、(7.2)は、それぞれ第2項の場合、あるいは第3項の場合であり、それぞれの式の表わすモアレ縞の方向と交差角から求まる鈍い対角点を結ぶ方向との合致を見て、いずれか一方を選択する。次に、(7)式に従って Oster が示した<sup>3,4)</sup>直線格子とラジアル格子、等間隔同心円格子との重ね合せによるモアレ縞について考える。

### 3.2 直線格子とラジアル格子によるモアレ縞

Fig. 6(A), (B)に示すバイナリーな透過率分布をもつ直線格子に格子の中心が原点にあり、かつ回転角方向の位相がゼロとなる(ラジアル格子の一つの格子条がx軸と一致している)ラジアル格子を重ね合わせた場合について考える。

直線格子の透過率分布  $T_{L1}(r, \theta)$ 、ラジアル格子の透過率分布  $T_{R1}(r, \theta)$  は次式となる。



(A) straight line grating (B) radial grating

Fig. 6 Gratings.

$$T_{Li}(r, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \{2\pi(2n-1)\mu_4 r \cos \theta\} \quad (8)$$

$$T_{Ri}(r, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m-1} \cos \{2\pi(2m-1)\nu_5 \theta\} \quad (9)$$

(8), (9), (7)式より, モアレ縞の透過率分布  $F_{Ri}(r, \theta)$  は,

$$F_{Ri}(r, \theta) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} \times \cos \{2\pi(2i-1)(\mu_4 r \cos \theta - \nu_5 \theta)\} \quad (10.1)$$

あるいは,

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} \times \cos \{2\pi(2i-1)(\mu_4 r \cos \theta + \nu_5 \theta)\} \quad (10.2)$$

として求められ, 交差角をパラメータとして(10.1), (10.2)のいずれかを選択すればよい. そこで, 交差角をパラメータとするために, それぞれの格子の傾き角  $\alpha_A, \alpha_B$  を次のように求め, Fig. 5 のフローチャートに代入し, 各領域における交差角を求めることにより, (10.1), (10.2)のいずれを採用するかの判別を行なえば, モアレ縞の透過率分布が求められる. ただし, ここでは, 直線格子をA, ラジアル格子をBと名付けた.

$$\alpha_A = \tan^{-1} \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_{Li} = \tan^{-1} \left( \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} \right) = \theta$$

ただし,  $\tan^{-1}$  の主値より  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

$$\alpha_B = \tan^{-1} \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_{Ri} = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_{M3} = \tan^{-1} \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_{(10.2)} = \tan^{-1} \{ (\mu_4 r \sin \theta - \nu_5) / r \mu_4 \cos \theta \}$$

この演算を行ない交差角を求め, 交差角より求めたモアレ縞発生領域と  $\alpha_{M3}$  の関係より第2項, 第3項のいずれを採用するかの判別を行なう. また, 2枚のバイナリ格子の重ねせにより発生するモアレ縞のプロフィール

は一般に, 原格子の開口比により三角波, あるいは台形波となるため<sup>6,8)</sup>, 計算機内部で, モアレ縞の透過率に閾値を定め, 2値化画像として求めると Fig. 7(B) が得られる. この場合のモアレ縞のプロフィールは, Fig. 5 のフローチャートにより, 第1, 第2象限では, (10.2)式, 第3, 第4象限では, (10.1)式によって表わされることがわかる.

Fig. 7(A)に示す Fig. 6(A)と(B)の格子を重ね合わせて得られたモアレ縞に一致していることがわかる.

### 3.3 直線格子と等間隔同心円格子によるモアレ縞

Fig. 8(A), (B)に示すバイナリな透過率分布をもつ直線格子と等間隔同心円格子の中心を原点に置き, 重ね合わせた場合について考える.

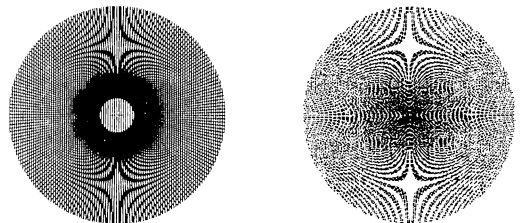
直線格子  $T_{Li}(r, \theta)$  は, (8)式であり, 等間隔同心円格子の透過率分布  $T_{Ci}(r, \theta)$  は, (11)式となる.

$$T_{Ci}(r, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m-1} \cos \{2\pi(2m-1)\mu_5 r\} \quad (11)$$

(8), (11), (7)式により, モアレ縞の透過率分布  $F_{Ci}(r, \theta)$  は, (7), (10)式同様に, 第2項, 第3項の関係よりそれぞれ,

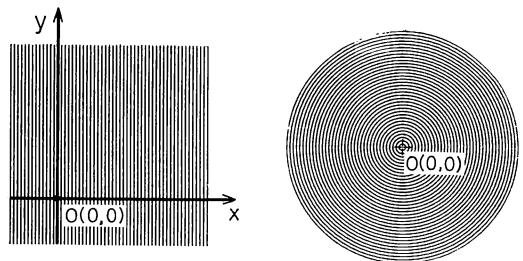
$$F_{Ci}(r, \theta) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} \times \cos \{2\pi(2i-1)(\mu_4 r \cos \theta - \mu_5 r)\} \quad (12.1)$$

あるいは,



(A) moiré patterns (B) two valued picture

Fig. 7 Moiré patterns.



(A) straight line grating (B) equispaced circles grating

Fig. 8 Gratings.

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} \times \cos \{2\pi(2i-1)(\mu_4 r \cos \theta + \mu_5 r)\} \quad (12.2)$$

となる。次に、前節同様に、(12.1)、(12.2)を判別するための演算を行なうと次のようになる。ただし、直線格子をA、等間隔同心円格子をBと名付けた。

$$\alpha_A = \tan^{-1} \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_{L1} = \theta$$

ただし、 $\tan^{-1}$ の主値より  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

$$\alpha_B = \tan^{-1} \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_{C1} = 0$$

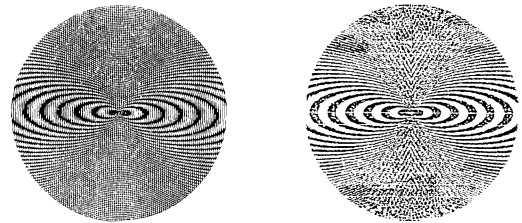
$$\alpha_{M3} = \tan^{-1} \left( \frac{dr}{rd\theta} \right)_{(12.2)} = \tan^{-1} \{ \mu_4 \sin \theta / (\mu_4 \cos \theta + \mu_5) \}$$

この結果を Fig. 5 のフローチャートに代入し、交差角を求め、交差角によって求めたモアレ縞の発生領域と  $\alpha_{M3}$  の関係より (12.1)、(12.2) のいずれを採用するかを判別を行なうと、第1、第4象限では、(12.1)式、第2、第3象限では、(12.2)式によってモアレ縞のプロファイルは表現できることがわかる。また、前節と同様に計算機内部でモアレ縞の透過率値に閾値を定め、2値化画像として求めたものが Fig. 9(B)、Fig. 10(B)、Fig. 11(B) である。この場合、Oster も示しているように<sup>4)</sup>、直線格子と等間隔同心円格子との空間周波数の関係より、発生するモアレ縞は、三つのパターンをもっている。すなわち、Fig. 9 では、 $\mu_4 < \mu_5$ 、Fig. 10 では、 $\mu_4 = \mu_5$ 、Fig. 11 では、 $\mu_4 > \mu_5$  となる場合のモアレ縞の透過率分布を示している。Fig. 8 の(A)と(B)を重ね合わせて実際に得られたモアレ縞 Fig. 9(A)、Fig. 10(A)、Fig. 11(A) とよく一致している。

以上のように、本稿に示す解析法に従えば、一意的に計算機内部でC.G.、直線格子のように格子の構造の異なったもの間に発生するモアレ縞の透過率分布を求めることができる。

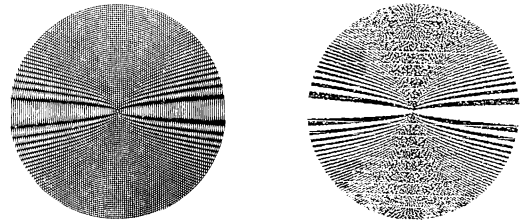
#### 4. おわりに

C.G.の透過率分布を取り扱う一般式を示し、従来C.G. 同士によるモアレ縞の解析に止まっていたのを、C.G.と直線格子によるモアレ縞の取扱いに拡張した。これにより、Oster 以来、人為的に判定されていたモアレ縞と対応式との関係を一意的に決定して、C.G.と直線格子によるモアレ縞を求めることができた。これは、従来のC.G. 同士、直線格子同士によるモアレ縞の利用から進んで、C.G.と直線格子でつくられるモアレ縞を利用



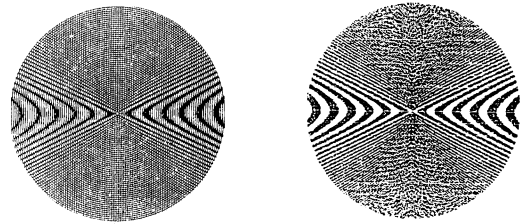
(A) moiré patterns

(B) two valued picture

Fig. 9 Moiré patterns. ( $\mu_4 < \mu_5$ )

(A) moiré patterns

(B) two valued picture

Fig. 10 Moiré patterns. ( $\mu_4 = \mu_5$ )

(A) moiré patterns

(B) two valued picture

Fig. 11 Moiré patterns. ( $\mu_4 > \mu_5$ )

した新しいエンコーダやセンサーを考へるときに必要なとなるモアレ縞の幅や鮮鋭化の検討を、人間の判断をまたず一意的に行なえることを意味し、C.G.の工学的応用拡大の基礎を与えるものである。

最後に、今回の解析を行なうにあたって、熱心にご指導くださった大阪大学工学部応用物理学科横関俊介先生に心より感謝いたします。

#### 文 献

- 1) たとえば、高崎 宏：機械の研究，26 (1974) 499.
- 2) たとえば、戸塚 泰：機械の研究，22 (1970) 94.
- 3) G. Oster, M. Wasserman and C. Zwerling: J. Opt. Am., 54 (1964) 169.
- 4) G. Oster: *The Science of Moiré Patterns*, 2nd ed. (Edmund Scientific Co., Barrington, New Jersey, 1969) p. 18.
- 5) 新井泰彦, 阿波啓造, 倉田忠雄: 光学, 14 (1985) 35.
- 6) S. Yokozeki: Opt. Lasers Eng., 3 (1982) 15.
- 7) 高崎 宏: 機械の研究, 26 (1974) 639.
- 8) S. Yokozeki, Y. Kusaka and K. Patorski: Appl. Opt., 15 (1976) 2223.
- 9) S. Yokozeki: Jpn. J. Appl. Phys., 9 (1970) 1011.