

光のコヒーレンス 1

インコヒーレント光源

黒田和男

東京大学生産技術研究所 〒106 東京都港区六本木 7-22-1
(1985年6月26日受理)

Coherence of Light 1

Incoherent Source

Kazuo KURODA

Institute of Industrial Science, University of Tokyo,
7-22-1, Roppongi, Minato-ku, Tokyo 106

1. はじめに

光が波であり、干渉することをわれわれは知っている。実際、レーザーと二、三の光学部品があれば簡単に干渉縞を見ることができる。しかし、歴史的に見ると干渉縞の観測は決して容易なことではなかった。干渉は波動が示す最も顕著な現象であるが、その光の波動説が広く認められたのは、Young の干渉の実験と Fresnel の回折理論の成功の後、19世紀前半のことである。もしも光の干渉がありふれた現象であったならば、波動説はもっと早く受け入れられたはずである。通常の光源を使った干渉縞の観測がこれほどむずかしいのは、第1に光の波長の短いことが挙げられるが、さらに、太陽やランプの光が干渉性の悪い光であったことも理由になっている。光は水面の波から連想されるものとはかけはなれた大変不規則な波であり、その不規則性の程度によって干渉縞がはっきり見えたり、まったく見えなかったりするわけである。光の可干渉性を定量的に取り扱うには光学に確率統計の考え方を導入する必要がある。これが光のコヒーレンス理論である。

コヒーレンス理論の応用範囲は干渉縞の形成の説明に止まらず光学の中心的課題にまで及んでいる。なかでも、光学系の結像特性がコヒーレンスの影響を受けることは重要である。顕微鏡や IC の焼付け装置など高分解能を要求される光学系では照明光のコヒーレンスが装置

の性能をきめる重要なファクターになっている。一方、レーザーの発明によって、理想的なコヒーレント光を作り出すことが可能になった。このことはコヒーレンスの量子論の誕生と発展を促した。応用面でも、コヒーレント光学をはじめ、レーザー分光、非線形光学、光子統計など光のコヒーレンスが直接関係する分野は拡がっている。

2. コヒーレンス関数

干渉計では二つの異なる光路を通った光を重ね合わせ、その強度を観測する¹⁾。それぞれの光路を通った光の複素振幅を、 E_1, E_2 とすると、強度 I は

$$\begin{aligned} I &= \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle \\ &= \langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle E_1 E_2^* \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

となる。記号 $\langle \rangle$ は時間的空間的な平均操作を表わす。この平均操作は観測が有限の時間にわたり、また、受光器が有限の面積をもつことにより観測過程に必然的に持ち込まれるものである。第1項、第2項はそれぞれ片方の光路のみが開かれたときの強度であり、最後が干渉縞の形成を表わす項である。交差項 $\langle E_1 E_2^* \rangle$ は、確率論でいうところの、ランダムな変数 E_1, E_2 の相関関数にほかならない。一般に、時間と空間の関数である場 $E(\mathbf{r}, t)$ の二つの点 (\mathbf{r}_1, t_1) と (\mathbf{r}_2, t_2) における値、 $E(\mathbf{r}_1, t_1)$ と $E(\mathbf{r}_2, t_2)$ の相関関数をコヒーレンス関数 (coherence function) と呼ぶ (図1)。干渉計は二つの時空点

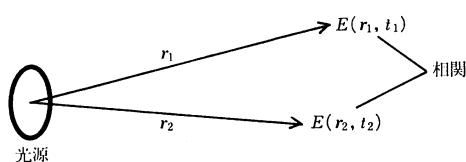


図1 コヒーレンス関数の定義
 $\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1)E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$

における場をビームスプリッターなどの助けを借りて検出器上で重ね合わせる装置だと見るわけである。

光の複素振幅を $E(\mathbf{r}, t)$ としよう。 $E(\mathbf{r}, t)$ は解析的信号といわれる（5章を参照のこと）。コヒーレンス関数は解析的信号を用いて

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1)E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \quad (2)$$

と定義される。〈 〉は E の分布に対する平均（集団平均 ensemble average）を表わす。

光源が定常的である場合、この関数は t_1, t_2 そのものではなく、差 $\tau = t_1 - t_2$ のみに依存する。このとき記号を簡略化して

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E(\mathbf{r}_1, t + \tau)E^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle \quad (3)$$

とも書く。右辺の t はダミーの変数であり、平均をとった結果は t に依らない。なおこの場合は、〈 〉を t に関する時間平均としてもよい。定常的なランダム関数について、集団平均と時間平均は一致すると考えられるからである（エルゴード性）²⁾。これからは定常的な光源に議論を限ろう。

観測点 \mathbf{r}_1 における強度 I_1 は複素振幅の絶対値の2乗であるから

$$I_1 = \Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_1, t_1) \equiv \Gamma_{11}(0) \quad (4)$$

となる。 $\Gamma_{11}(\tau)$ は同一点における時間差 τ の場の相関を表わしている。 $\Gamma_{12}(\tau)$ はかってな2点における相関であるから、 $\Gamma_{11}(\tau)$ は2点がたまたま一致した特別な場合にすぎない。両者を区別するときは、 Γ_{12} を相互コヒーレンス関数（mutual coherence function）、 Γ_{11} を自己コヒーレンス関数（self coherence function）と呼んでいる。

コヒーレンス関数の絶対値に対して

$$|\Gamma_{12}(\tau)| \leq (I_1 I_2)^{1/2} \quad (5)$$

の成り立つことが Schwarz の不等式を使って示される。そこで、 Γ_{12} を規格化した関数

$$\gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{12}(\tau)/(I_1 I_2)^{1/2} \quad (6)$$

を複素コヒーレンス度（complex degree of coherence）、その絶対値をコヒーレンス度と呼ぶ。絶対値 $|\gamma_{12}|$ は0から1の間の値をとるが、この値が1のときコヒーレン

ト、0のときインコヒーレント（incoherent）、これらの間にあるとき部分的コヒーレント（partially coherent）という。干渉縞の可視度（visibility） V は

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2(I_1 I_2)^{1/2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}| \quad (7)$$

となる。とくに、 $I_1 = I_2$ のとき、 $|\gamma_{12}|$ は可視度そのものである。

同一時刻における（光軸に直交する平面上の）異なる2点の相関 $\gamma_{12}(0)$ を空間的コヒーレンス（spatial coherence）、1点の異なる時刻における相関 $\gamma_{11}(\tau)$ を時間的コヒーレンス（temporal coherence）という。Young の干渉計や横ずらし干渉計（Shearing interferometer）では空間的コヒーレンスが測定にかかる。また、光軸上の異なる2点の相関は、光路差分の時間遅れのある相関に等しくなるから、Michelson型の干渉計を使って時間的コヒーレンスが測定できる。

3. すりガラスを透過したレーザー光

平行に拡げたレーザー光ですりガラスを照らしたときの透過光のコヒーレンス関数を求めよう（図2）。インコヒーレント光源の空間的コヒーレンスを計算するためにこの問題を取り上げるのだが、実用的にも重要である。それは、ホログラフィーやスペックル干渉計における粗面で反射されたレーザー光をこのモデルで取り扱うことができるからである³⁾。

座標系を図3に示す。レーザー光は波長 λ 、周波数 ω のゆらぎのない単色平面波とする。偏光は考えないことにすると、振幅はスカラー関数 $a(\xi, \eta)\exp(-i\omega t)$ で表わされる。 $a(\xi, \eta)$ はレーザー光の強度分布の平方根に対応するゆるやかに変化する関数である。点 $S = (\xi, \eta)$ におけるガラスの厚さを $d(S)$ 、屈折率を n とすると、

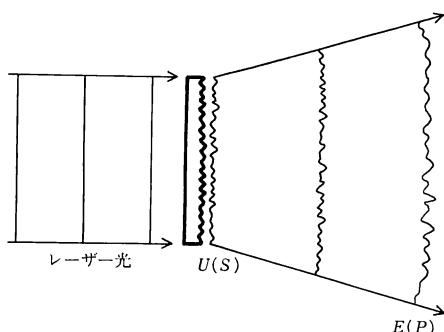


図2 すりガラスを透過した光の波面
 透過光はすりガラスの凹凸に応じたランダムな位相変化を受ける。

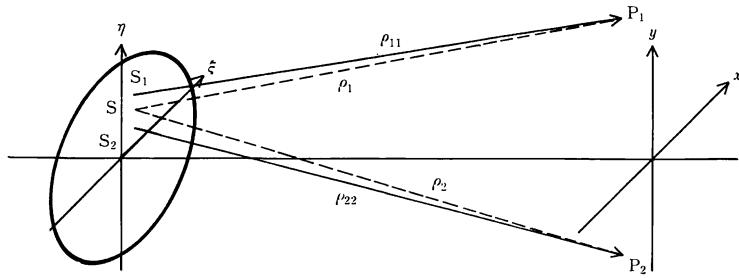


図3 座標系
 ρ_{11}, ρ_{22} は S_1P_1, S_2P_2 間の距離. ρ_1, ρ_2 は $S_1=S_2=S$
としたときの SP_1, SP_2 間の距離.

透過光は $\phi=2\pi(n-1)d/\lambda$ だけの位相変化を受ける. よって, 透過光の振幅 $U(S, t)$ は

$$U(S, t) = a(S) e^{i[\phi(S) - \omega t]} \quad (8)$$

となる. 照明領域, あるいは, すりガラスに開口を重ねたときはその開口を S としよう. すりガラスは自分で光るのではないが, そのあとの光学系にとっては光源の役割を担っているから, 簡単に光源 S と呼ぶことにする.

すりガラスから z 離れたところに (x, y) 面をとる. この面上での振幅を求める問題は, Fresnel-Kirchhoff の回折場の計算としてよく知られている. 回折公式は Green 関数のとり方に応じて異なる表現が可能であるが, 入射波に対する微分を含まない表現を採用する⁴⁾. すりガラス面上の点 $S=(\xi, \eta)$ と観測面上の点 $P=(x, y)$ の間の距離を ρ としたとき, P 点における振幅 $E(P, t)$ は

$$\begin{aligned} E(P, t) &= \int_S \frac{K}{\rho} U(S, t - \rho/c) dS \\ &= e^{-i\omega t} \int_S \frac{K}{\rho} e^{i[k\rho + \phi(S)]} a(S) dS \end{aligned} \quad (9)$$

で与えられる. ここで, c は光速度, $k=2\pi/\lambda$ は波数である. 係数 K はベクトル SP が z 軸となす角度 (回折角) の関数である.

距離 z が光源の大きさや観測領域に比べ十分大きく, 回折角が小さいとき, K は定数 ($=1/i$) としてよい. またこのとき, ρ を展開して

$$\rho = z + \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2z} \quad (10)$$

と近似できる. さらに, (9)式の分母の ρ は z で置き換えることができる. 以上のように近似したのが Fresnel 回折の式である.

位相 $\phi(S)$ がランダムな分布をしているとそれを反映

して $E(P, t)$ も空間的にランダムな関数となる. (9) 式に明らかなように $E(P, t)$ は時間については正弦波振動であるから, すりガラスが静止していればランダムな空間分布は固定されている. たとえば観測面に写真乾板を置けば強度 $|E(P, t)|^2$ の不規則な分布を記録することができる. これがレーザー光に特徴的なスペックルパターン (speckle patern) である.

統計的な性質が同じであるすりガラスを多数用意し, それらに関する集団平均をもってコヒーレンス関数を定義しよう. 実験的にはすりガラスを回転し長時間露光する場合に相当する. Fresnel 回折の成立する範囲に 2 点 $P_1=(x_1, y_1, z_1)$ と $P_2=(x_2, y_2, z_2)$ をとると, コヒーレンス関数は

$$\Gamma_{12}(\tau)$$

$$\begin{aligned} &= A \int_S \int_S \left\langle U\left(S_1, t + \tau - \frac{\rho_{11}}{c}\right) U^*(S_2, t - \frac{\rho_{22}}{c}) \right\rangle dS_1 dS_2 \\ &= A e^{-i\omega\tau} \int_S \int_S e^{i k (\rho_{11} - \rho_{22})} \langle e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \rangle \\ &\quad \times a(S_1) a^*(S_2) dS_1 dS_2 \\ &= \Gamma_{12}(0) e^{-i\omega\tau} \end{aligned} \quad (11)$$

となる. ここで ρ_{11}, ρ_{22} はそれぞれ S_1P_1, S_2P_2 間の距離, $A=1/\lambda^2 z_1 z_2$, また, ϕ_1, ϕ_2 は S_1, S_2 における位相である.

すりガラスの凹凸が十分細かく, 相関関数がデルタ関数で置き換えられる場合を考えよう.

$$\langle e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \rangle \sim M \delta(S_1 - S_2) \quad (12)$$

この近似は, 回折角の最大値を α として, 位相分布の相関長が λ/α に比べ十分小さければ許される. もともと α は小さいと仮定しているから, これは比較的ゆるやかな条件である. このように相関関数がデルタ関数になるとき, 空間的にインコヒーレントな光源と呼ぶ. (12)式を代入して, コヒーレンス関数は

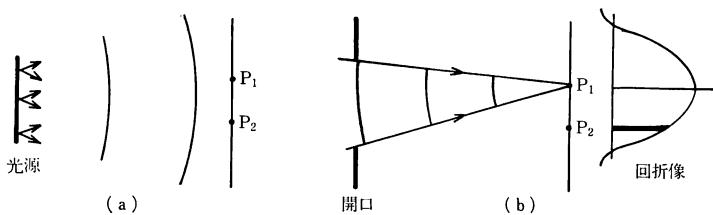


図4 Van Cittert-Zernike の定理

(a) インコヒーレント光源からの光の P_1, P_2 間のコヒーレンス度は、
 (b) 光源と同じ強度分布をもつ開口を通り P_1 に収束する光の作る回折パターンの P_2 における振幅に等しい。

$$\Gamma_{12}(0) = AM \int_S e^{i\beta_{12} + ik\Delta z} I_0(S) dS \quad (13)$$

となる。ここで、 ρ_1, ρ_2 はそれぞれ SP_1, SP_2 の距離、
 $I_0(S) = |\alpha(S)|^2$ である。(10)式の近似を用いると

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(0) &= AM e^{i\beta_{12} + ik\Delta z} \int_S e^{-i(v\xi + \mu\eta) - ik\Delta z(\xi^2 + \eta^2)/2z_1 z_2} \\ &\quad \times I_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (14)$$

ただし

$$\begin{aligned} \beta_{12} &= k(x_1^2 + y_1^2)/2z_1 - k(x_2^2 + y_2^2)/2z_2 \\ v &= k(x_1/z_1 - x_2/z_2), \quad \mu = k(y_1/z_1 - y_2/z_2) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Delta z = z_1 - z_2$$

が得られる。

とくに、 $z_1 = z_2$ のときは、 v, μ は座標差 $\Delta x = x_1 - x_2, \Delta y = y_1 - y_2$ に比例し

$$v = k\Delta x/z, \quad \mu = k\Delta y/z \quad (16)$$

と書ける。このとき、コヒーレンス関数 $\Gamma_{12}(0)$ は開口 S の Fourier 変換で表わされる。われわれは(9)式の振幅 E を Fraunhofer 回折ではなく Fresnel 回折の式を用いて計算したことを思い出そう。そのなごりは 2 次の位相項 β_{12} に残されている。しかし積分は、Fraunhofer 回折の式のように Fourier 変換になる。これは、すりガラス面上の相関をデルタ関数としたので、 ξ, η の 2 次の項が打ち消されるためである。

次に強度を求める

$$I = \Gamma_{11}(0) = AM \int_S I_0(S) dS \quad (17)$$

と定数になる。 M はすりガラスの散乱度を表わすパラメーターで、強度と簡単な関係で結ばれているのがわかる。

複素コヒーレンス度は Γ_{12} を強度 I で割ったものであるから

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(0) &= \frac{\Gamma_{12}(0)}{I} \\ &= e^{i\beta_{12} + ik\Delta z} \int_S e^{-i(v\xi + \mu\eta) - ik\Delta z(\xi^2 + \eta^2)/2z_1 z_2} I_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\times \left[\int_S I_0 d\xi d\eta \right]^{-1} \quad (18)$$

となる。

以上をまとめると、インコヒーレント光源の空間的コヒーレンス ($\Delta z = 0$) に関する Van Cittert-Zernike の定理、「図4(a) の P_1, P_2 間のコヒーレンス度は、 P_1 に収束する球面波が、光源の強度分布に比例する透過率をもった開口を通過したときの、 P_2 点における回折波の振幅に等しくなる」が得られる。

例として、光源が半径 a の円のときの空間的コヒーレンスを計算しよう。光源の強度分布は一様とする。円の Fourier 変換は光学では Airy の回折像としておなじみである。結果は、1次の Bessel 関数 J_1 を使って

$$|\gamma_{12}(0)| = \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \quad (19)$$

ただし

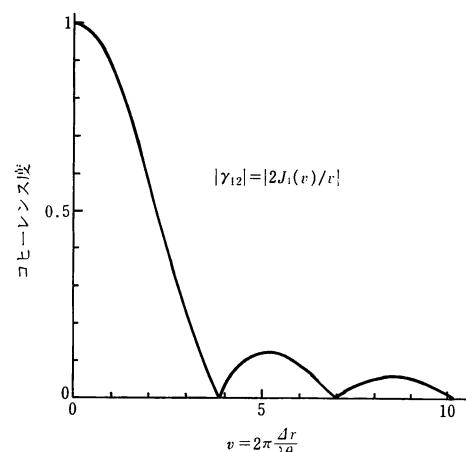


図5 光源が円形のときの空間的コヒーレンス度
 Δr : 2点間の距離、 λ : 波長、 θ : 観測点から見た光源の角直径。

$$v = ka \Delta r / z$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (20)$$

と書ける（図5）。 $J_1(v)$ の最小の正根は 3.83 であるから、コヒーレンス度が最初にゼロになるのは

$$\Delta r = 3.83 z / ka = 1.22 \lambda / \theta \quad (21)$$

のところである。ここで

$$\theta = 2a/z \quad (22)$$

は光源 S の観測面から見た角直径である。（21）式は星の角直径の測定に使える。Michelson の天体干渉計（stellar interferometer）の原理である⁵⁾。

4. インコヒーレント光源

4.1 分布密度

高温の物体や放電管はインコヒーレントな光源といわれる。この種の光源は互いに独立に光子を出す原子（または分子、イオン）の集合体である。光源を構成する個々の原子は励起と自然放出（spontaneous emission）を繰り返す。自然放出とは励起状態にある原子がすでに存在する光の場とは無関係に 1 個の光子を放出して励起のエネルギーを失う過程である。したがって、われわれの観測する光は互いに独立に放出された光子の集団である。

インコヒーレント光源では、個々の原子による自然放出過程における量子論的な確率性と、多数の原子が独立に光子を放出しているという普通の意味での統計性が二重に重なっている。光源を、空間的には点光源として扱えるが、しかしこれは巨視的に系とみなせるほど多数の原子を含んでいる微小な部分に分ける。このようにして、個々の光子ではなくその集団を統計的に考えることにすれば、光子の量子性は統計の中に埋もれてしまうから、古典論的なイメージを描くことが許される。個々の微小部分は統計的に独立に光を放射する。

微小部分からの光の振幅を $u(t)$ としよう。 $u(t)$ は多数の互いに独立に分布する光子の集りである。確率論の中心極限定理によると、多数の互いに独立な確率変数の和は、個々の分布によらず正規分布（normal distribution または Gaussian distribution）に近づいていくことが知られている⁶⁾。インコヒーレント光はこの条件に合うから正規分布で近似できる。 $u(t)$ が複素量であることに注意して、分布密度 $\rho(u)$ は

$$\rho(u) d^2 u = \frac{1}{\pi I} e^{-|u|^2/I} d^2 u \quad (23)$$

となる。ここで、 I は平均強度であり、また、 $d^2 u = dRe(u)dIm(u)$ である。

$u(t)$ の時間的経過については、次回に高次のコヒーレンス関数を論じるときに触れる。以下に示すように、ここではスペクトルの知識だけで十分なのである。

4.2 コヒーレンス関数

コヒーレンス関数の計算には、相関関数

$$\mu(\tau) = \langle u(t+\tau)u^*(t) \rangle \quad (24)$$

が必要である。定常確率過程に関する Wiener-Khintchine の定理によると、相関関数は Fourier スペクトルをもつ⁷⁾。

$$\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (25)$$

をパワースペクトル（power spectrum）という。 $\sigma(\omega)$ は、分光器を使って測られる光源のスペクトルにほかなりない。相関関数はスペクトルから（25）式の逆変換として求まる。ちなみに、Fourier 分光は干渉計で $\mu(\tau)$ を測定し、その Fourier 変換としてスペクトルを求める方法である⁸⁾。

Wiener-Khintchine の定理は振幅 $u(t)$ の分布のし方によらない一般的な結果である。すなわち、インコヒーレント光にもレーザー光にも等しくこの定理が適用できる。ということは、たとえインコヒーレント光でも何らかの方法でスペクトル幅を狭めることができれば、レーザー光のみの時間的コヒーレンスが得られるのである。この事情は、インコヒーレント光源でも点とみなせるほど絞れば空間的にコヒーレントな光になると似ている。しかし、インコヒーレント光とレーザー光では分布が異なるから、たとえば強度相関のような高次のコヒーレンス関数を考慮すると両者に明らかな違いがでてくるのである。

スペクトルは光源の微視的状態を知るうえで重要な情報源があるので詳しく調べられている。放電管のような気体のスペクトルは、発光粒子の量子遷移に対応する線スペクトルの集りである。各線スペクトルは、量子準位の寿命（自然幅）、粒子間の相互作用（衝突拡がり、または、圧力拡がり）、粒子の熱運動による Doppler 効果（Doppler 拡がり）などいろいろな要因からきまるスペクトル形状を呈する。発光ダイオードのような固体光源ではスペクトルは固体のバンド構造を反映したものとなる。一方、高温物体からの放射では、光は物体と熱平衡状態にあり、物体の吸収率が 1 であれば、Planck の黒体放射の法則に従う広いスペクトル分布をもつ。一般的な場合は黒体輻射の密度に吸収率を掛けたものになる。なお、統計的観点からは、黒体放射と放電管のようなインコヒーレント光はスペクトルの形が違うだけで他に差異

はない。インコヒーレント光を周波数成分（光子のモード）に分けると、それぞれがエントロピー最大の状態にあることが示され、(23)式の分布密度が正当化されるのである。

準備はできたのでコヒーレンス関数の計算に移ろう。光源上 S 点の光の振幅を $U(S, t)$ とする。これらの相関関数は、空間的にはデルタ関数、時間的には $\mu(\tau)$ に比例する。すなわち

$$\langle U(S_1, t+\tau) U^*(S_2, t) \rangle = \mu(\tau) I(S_1) \delta(S_1 - S_2) \quad (26)$$

と書ける。ただし、 $I(S)$ は光源の強度分布を表わす。光源から離れた 2 点におけるコヒーレンス関数は前節と同様に計算される。ただし、(11)式の係数 A は波長に依存するから、スペクトル幅が広いときは周波数成分に分けて考えたほうがよい。 $\Gamma_{12}(\tau)$ の時間に関する Fourier 変換を

$$\hat{\Gamma}_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{12}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (27)$$

としよう。これは相互スペクトル密度 (mutual spectral density function) と呼ばれる。 ω 成分のみに着目すれば、 $A = 1/\lambda^2 z_1 z_2$ として、(11)式のはじめの等式が使えるから、これを Fourier 変換して

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{12}(\omega) &= A \iint_S \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle U\left(S, t+\tau - \frac{\rho_{11}}{c}\right) U^*\left(S, t - \frac{\rho_{22}}{c}\right) \right\rangle \\ &\quad \times e^{i\omega\tau} d\tau dS_1 dS_2 \\ &= A \iint_S \int_{-\infty}^{\infty} \mu\left(\tau - \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{c}\right) e^{i\omega\tau} \\ &\quad \times I(S_1) \delta(S_1 - S_2) d\tau dS_1 dS_2 \\ &= A \iint_S \sigma(\omega) e^{i\omega(\rho_{11} - \rho_{22})} I(S_1) \delta(S_1 - S_2) dS_1 dS_2 \\ &= A \int_S \sigma(\omega) e^{i\omega(\rho_{11} - \rho_{22})} I(S) dS \end{aligned} \quad (28)$$

が得られる。積分の部分は(13)式と同じである。コヒーレンス関数は、逆変換

$$\Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{\Gamma}_{12}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (29)$$

から求まる。

とくにスペクトルの幅 $\Delta\omega$ が中心の周波数 ω 自身に比べ十分狭いとき準単色光 (quasimonochromatic light) と呼ぶ。一般に、 $\Delta\omega\tau \ll 1$ の時間差 τ にたいして光はコヒーレントである。このとき、(14)式がそのまま成立する。当然ながら、Van Cittert-Zernike の定理の成り立つことが結論できる。

4.3 コヒーレンス幅とコヒーレンス長

インコヒーレント光源によって照明された領域内に点 P_1 をとり、これと P_2 点との間のコヒーレンス度 $|\gamma_{12}|$

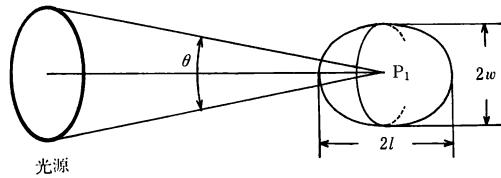


図 6 コヒーレント領域（概念図）

を考えよう。一般に、 P_2 点が P_1 点から遠ざかるほどコヒーレンス度は悪くなる。そこで、コヒーレンス度がある値（たとえば 0.5、しかし適当に選んでよい）以上である P_2 点を集めると、図 6 に表示したように P_1 点の回りにコヒーレンスの良い領域を描くことができる。この領域の光軸に対して横方向の幅 w をコヒーレンス幅 (coherence width)、光軸方向の幅 l をコヒーレンス長 (coherence length) という。

コヒーレンス幅は空間的にコヒーレントな範囲を与える。(21)式から

$$w \sim \lambda/\theta \quad (30)$$

である。ここで、 λ は中心波長、 θ は P_1 点から見た光源の角直径である。

光軸方向のコヒーレンスは時間的コヒーレンスである。これはスペクトルの Fourier 変換で与えられるから、光源のスペクトル幅（フィルターを併用していればフィルターの幅）を $\Delta\omega$ とすると相関は $\Delta\omega^{-1}$ のあいだ持続する。これをコヒーレンス時間 (coherence time) という。よってコヒーレンス長は

$$l \sim c/\Delta\omega \quad (31)$$

と見積もられる。

5. 補足—解析的信号

観測にかかる物理量は実数値であるが、複素数を使うと便利なことが多い。実関数 $u^{(r)}(t)$ が Fourier 変換 $\hat{u}(\omega)$ をもてば

$$u^{(r)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (32)$$

に対して、複素関数

$$u^{(a)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (33)$$

を対応させると、 $u^{(a)}(t)$ の実部が $u^{(r)}(t)$ となることが確かめられる。これを解析的信号 (analytic signal) と呼ぶ。(33)式で ω の積分範囲の下限がゼロになっていることに注意。このため、 t を複素数に拡張したとき、複素平面の下半分、 $Im(t) < 0$ 、では積分は絶対収束し、したがって、そこで解析的である。これが名前の由来である。

る。虚部 $u^{(i)}(t)$ は実部 $u^{(r)}(t)$ から

$$u^{(i)}(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{(r)}(t')}{t' - t} dt' \quad (34)$$

と求まることが示される。ここで、 P は $t' = t$ で Cauchy の主値をとることを意味する。これを Hilbert 変換といいう。これは $u^{(o)}(t)$ の解析性からの帰結である。

$u^{(r)}(t)$ が Fourier 変換不可能のとき（定常的な場合がそうである）話は少々やっかいになる。 $u^{(r)}(t)$ を有限区間 $-T < t < T$ に限ればこれは Fourier 変換可能であるから解析的信号を定義できる。 T を有限に保ったままで、たとえば相関関数を計算し、最後に（時間平均をとる段階で） $T \rightarrow \infty$ を実行する。こうして辻摺の合った計算のできることが示されているが詳細は略す。

文 献

- 1) 諸隈 肇：“光波干渉計測原論”，光学，12 (1983) 45；“コヒーレンスと光学部品検査用干渉計”，光学，12 (1983) 117.
- 2) たとえば、A.Y. Khintchine (河野繁雄訳)：統計力学の数学的基礎 (東京図書、東京、1971) p. 39.

- 3) 山口一郎：“粗面干渉技術”，光学，12 (1983) 336.
- 4) たとえば、A. Sommerfeld (瀬谷正男、波岡 武訳)：光学、ゾンマーフェルト理論物理学講座、IV (講談社、東京、1969) p. 213.
- 5) M. Born and E. Wolf: *Principles of Optics*, 4th ed. (Pergamon, Oxford, 1970) p. 271 (草川 徹、横田英嗣訳：光学の原理、II (東海大出版、東京、1975) p. 441).
- 6) たとえば、伊藤 清：確率論 (岩波、東京、1953) p. 89.
- 7) たとえば、A. Papoulis: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* (McGraw-Hill 好学社、東京、1965) p. 336.
- 8) 吉原邦夫：“干渉分光法”，光学，13 (1984) 230.
以下、光のコヒーレンス (古典論) に関する教科書を挙げる。
- 9) M. Born and E. Wolf: *Principles of Optics*, 4th ed. (Pergamon, Oxford, 1970) (草川 徹、横田英嗣訳：光学の原理、I, II, III (東海大出版、東京、1975)).
- 10) M. J. Beran and G. B. Parrent, Jr.: *Theory of Partial Coherence* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964).
- 11) 加納 泰：コヒーレンス理論とその応用 (岩波書店、東京、1976).
- 12) A.S. Marathay: *Elements of Optical Coherence Theory* (John Wiley, New York, 1982).
- 13) 鈴木範人、小塩高文：応用光学 II (朝倉書店、東京、1982).
- 14) J.W. Goodman: *Statistical Optics* (John Wiley, New York, 1985).