

## 光のコヒーレンス 2

## コヒーレンス関数の伝播・高次のコヒーレンス

黒田 和男

東京大学生産技術研究所 〒106 東京都港区六本木 7-22-1

(1985年9月26日受理)

## Coherence of Light 2

Propagation of Coherence Function and  
Coherence of Higher Order

Kazuo KURODA

Institute of Industrial Science, University of Tokyo,  
7-22-1, Roppongi, Minato-ku, Tokyo 106

## 1. コヒーレンス関数の伝播

## 1.1 はじめに

光が空間を伝わることの当然の結果として、コヒーレンス関数も空間を伝わっていく。このため、ある面上でコヒーレンス関数の値がわかっているならば、別の面上でのコヒーレンス関数を予言できる。前回の講義<sup>1)</sup>でインコヒーレント光源のコヒーレンス関数を計算したときに暗黙のうちにこの事実を用いていた。コヒーレンス関数の伝播という観点から前回の計算をふりかえってみよう。

光源面上の点を  $\mathbf{s}$ 、観測点を  $\mathbf{r}$  とする。それぞれの点における光の振幅を  $E(\mathbf{s}, t)$ 、 $E(\mathbf{r}, t)$  とすると、これらは Fresnel-Kirchhoff の回折公式で結ばれている。この式は形式的に

$$E(\mathbf{r}, t) = \int K(\mathbf{r}, \mathbf{s}) E(\mathbf{s}, t - \rho/c) d^2\mathbf{s} \quad (1)$$

と書くことができる。積分核  $K(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  は  $\mathbf{s}$  点に置かれた単位の強さの点光源が  $\mathbf{r}$  点に及ぼす場の振幅と解釈できる。 $\rho$  は  $\mathbf{s}$  から  $\mathbf{r}$  へ至る光路長、 $c$  は光速である。前回の計算では、Fresnel 回折と準単色光の仮定を置いたので  $K(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  は定数であった。一般には  $K(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  には時間や空間座標に関する微分が含まれ、また途中でレンズが入った場合はレンズ面上での積分が加わるなど相当に複雑な式になるであろう。しかし、ここで大事なことは

$E(\mathbf{s}, t)$  と  $E(\mathbf{r}, t)$  の関係が線形だということである。

(1) 式からコヒーレンス関数を求めると

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$$

$$= \iint K(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1) K^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2)$$

$$\times \Gamma(\mathbf{s}_1, t_1 - \rho_{11}/c; \mathbf{s}_2, t_2 - \rho_{22}/c) d^2\mathbf{s}_1 d^2\mathbf{s}_2 \quad (2)$$

となる。この式の意味するところは、 $\mathbf{s}$  面上のコヒーレンス関数から、 $\mathbf{r}$  面上でのコヒーレンス関数を完全に計算できるということである。 $\mathbf{s}$  が光源の上にある必要もない。一般に、ある面上でのコヒーレンス関数の値がわかれば、それがどのように空間を伝播していくかが上の関係式で求まるのである。

## 1.2 二重波動方程式

前節では回折公式からコヒーレンス関数の伝播の式を求めた。回折公式は数学的には波動方程式

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

の近似解法として位置づけられる。いままで  $E(\mathbf{r}, t)$  はランダムな関数であるとなつねに強調してきたが、無原則にランダムではありえず、波動方程式に従うことに変わりはない。このことから  $E(\mathbf{r}_1, t_1)$  と  $E^*(\mathbf{r}_2, t_2)$  の積の平均で与えられるコヒーレンス関数もそれぞれの変数について

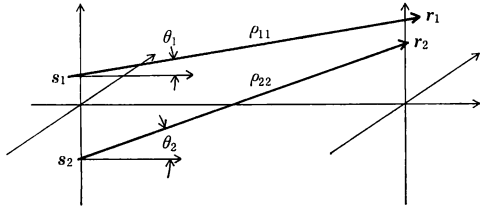


図1 座標系

て同じ波動方程式を満たすことがいえる。

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\right) \Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = 0$$

$$\left(\nabla_2^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right) \Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = 0 \quad (4)$$

定常的な場合はコヒーレンス関数は時間差  $\tau = t_1 - t_2$  のみの関数になるから

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \Gamma(\mathbf{r}_1, t + \tau; \mathbf{r}_2, t) \quad (5)$$

と書くと

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = 0$$

$$\left(\nabla_2^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = 0 \quad (6)$$

が得られる。コヒーレンス関数の時間に関する Fourier 変換である相互スペクトル密度

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \int \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (7)$$

に対しては、 $k = \omega/c$  として

$$(\nabla_1^2 + k^2) \hat{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = 0$$

$$(\nabla_2^2 + k^2) \hat{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = 0 \quad (8)$$

となる。以上一連の式ではコヒーレンス関数は二つの座標について対の波動方程式を満足する。コヒーレンス関数の伝播理論の根本にこの二重波動方程式がある。

自由空間における伝播の式はすでに前回実質的に求めてあるが、相互スペクトル密度に対する式を書くと(図1)

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \iint \frac{e^{ik(\rho_{11} - \rho_{22})}}{\rho_{11}\rho_{22}} \chi(\theta_1)\chi(\theta_2) \hat{\Gamma}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \omega) d^2\mathbf{s}_1 d^2\mathbf{s}_2 \quad (9)$$

となる。 $\chi(\theta)$ は inclination factor であり、 $\theta$  が小さいときは1としてよい。インコヒーレント光源の面上におけるコヒーレンス関数を

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \omega) = I(\mathbf{s}_1)\sigma(\omega)\delta^{(2)}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \quad (10)$$

と置いて、前回の結果をすべて再現することができる。

1.3 相互スペクトル密度のコヒーレントモード展開部分的にコヒーレントな光を適当な関数列で展開しよ

うという試みは以前からあるが<sup>2)</sup>、ここでは比較的最近の Wolf による相互スペクトル密度のコヒーレントモード展開の概略を紹介しよう<sup>3)</sup>。この展開定理によって、コヒーレンス関数の空間的分布を伝播公式としてではなく固有関数の形で表現できる。

有界領域  $D$  で相互スペクトル密度  $\hat{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)$  が与えられているとき

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \sum \lambda_n(\omega) \Psi_n(\mathbf{r}_1; \omega) \Psi_n^*(\mathbf{r}_2; \omega) \quad (11)$$

と固有関数に展開できる。固有関数  $\Psi_n(\mathbf{r}; \omega)$  と固有値  $\lambda_n(\omega)$  は固有値方程式

$$\int_D \hat{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) \Psi_n(\mathbf{r}_2; \omega) d^3\mathbf{r}_2 = \lambda_n(\omega) \Psi_n(\mathbf{r}_1; \omega) \quad (12)$$

の解である。固有値  $\lambda_n(\omega)$  は非負であり、固有関数は直交関係

$$\int_D \Psi_n(\mathbf{r}; \omega) \Psi_m^*(\mathbf{r}; \omega) d^3\mathbf{r} = \delta_{nm} \quad (13)$$

を満たす。固有関数をコヒーレントモードと呼ぶ。

この結果は解析学の Mercer の定理<sup>4)</sup>という耳慣れない定理を使って証明されるが、ここでは省略する。これを相互スペクトル密度の Mercer 展開ともいう。

以上により、相互スペクトル密度が空間的にコヒーレントな部分に分解できることがわかった。これを振幅レベルの話に戻すと、振幅の  $\omega$  成分  $\hat{E}(\mathbf{r}; \omega)$  が

$$\hat{E}(\mathbf{r}; \omega) = \sum c_n(\omega) \Psi_n(\mathbf{r}; \omega) \quad (14)$$

と展開できることに対応する。ここで  $c_n(\omega)$  は確率変数であり、その相関は

$$\langle c_n(\omega) c_m^*(\omega) \rangle = \lambda_n(\omega) \delta_{nm} \quad (15)$$

で与えられる。重要な点は、定常的な場合  $E(\mathbf{r}, t)$  は Fourier 変換不可能な関数であるから、 $\hat{E}(\mathbf{r}; \omega)$  を  $E(\mathbf{r}, t)$  から直接定義できないことにある。このために従来は時間を有限区間  $-T \leq t \leq T$  に区切って Fourier 変換し、計算の最後に  $T \rightarrow \infty$  とする便法がとられてきた。コヒーレントモード展開によって、相互スペクトル密度という遠回りをしながらでも、ともかく  $\hat{E}(\mathbf{r}, \omega)$  を数学的に矛盾なく導入できたことはめざましい成果である。

しかし、この新理論にはまだまだ問題点が残されている。一つは、この理論がコヒーレンスの空間的部分にのみ着目し、時間的側面を同等には扱っていないことにある。このため、コヒーレントモードが必ずしもコヒーレントではないという結果がでてくる。すなわち、コヒーレントモードを取り出して Fourier 逆変換で複素コヒーレンス度を求めると、絶対値が1以下になってしまう。もう一つの問題点は、係数  $c_n(\omega)$  の物理的意味は何かと

いうことにある。この理論では相関関係(15)式が与えられるだけで、 $c_n(\omega)$ は光源の物理的性質とどう関係づけられるか、どのような統計分布に従うかなどが未解決である。また、これに関連して、この理論が次章に述べる高次のコヒーレンスにどのような形で拡張できるかなど多くの問題を含んでいる。

以上問題点は残されているが、この理論がコヒーレンス理論に新しい視点をもたらしたことは意義深い。レーザーの共振器モードがコヒーレントモードに一致することの証明など<sup>5)</sup>、新たな結果が出ている。

1.4 物理光学的測光学

コヒーレンス関数の伝播理論の最も重要な応用は部分的にコヒーレントな光の結像理論である。これについては次回に詳説する。ここでは測光学への応用について概略を述べよう。

放射測光学 (radiometry) と測光学 (photometry) では光源や照明された物体の表面の明るさを定量的に取り扱う<sup>6)</sup>。放射測光学と測光学の違いは、光のパワーを物理量(ワット)で測るか、ヒトの視感度で評価した量(ルーメン)で測るかにあり、この差を除けば両者はまったく並列に論じることができる。

(放射) 測光学を一言で表わすと、幾何光学の諸定理にエネルギー保存則を付加した理論といえる。そこでは、光束(放射束)、(放射)輝度、(放射)照度、(放射)光度などの量が導入され、これらの量間の関係が論じられる。光束とはある面内を通り、ある立体角内に入る光線全体の運ぶパワーである。光線束は光学系を通過するとき、幾何光学の法則に従って形状を変えていくが、光学系における吸収が無視できれば光束は保存される。輝度 $B$ は光源、あるいは照明された面の与えられた点の与えられた方向への明るさであり、面から放射される光束から

$$dF = B(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \cos \theta d^2s d\Omega \quad (16)$$

と定義される。ここで、 $\mathbf{s}$ は面上の点、 $\mathbf{n}$ は光束の方向、 $dF$ は $\mathbf{s}$ の回りの微小面積 $d^2s$ から $\mathbf{n}$ の回りの微

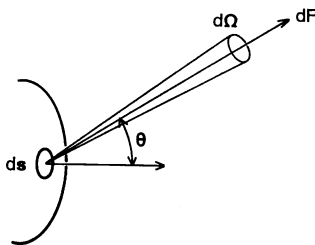


図2 輝度と光束

小立体角  $d\Omega$  内に放射される光束、 $\theta$  は面法線と  $\mathbf{n}$  のなす角度である (図2)。照度、光度等の定義は省略するが、輝度を出発点にしてこれらの諸量が求まっている。

さて、測光学の基礎に幾何光学の代りに物理光学を置いたらどうなるであろうか。輝度を位置と方向の関数としたが、位置と方向を同時に考えるのは幾何光学においてのみ許されることである。物理光学では、量子力学の不確定性原理と同じことで、位置と方向は両立しえない。方向の確定した波(平面波)では位置は無限に広がっているし、位置の確定した波(球面波)はすべての方向にわたって放射される。球面波の一部を取り出し、方向を制限すると、回折によって位置は広がる。不確定性原理の許す精度内でしか光線や輝度を考えることができないのである。一方、照度や光度など他の量は物理光学でも矛盾なく定義できる。

では物理光学的測光学とは何かというと、それはコヒーレンス理論そのものといえる。光源が与えられたときに空間の各点での光の強度がわかればよいわけで、コヒーレンス関数の伝播の式がそれに答えてくれるからである。ここで明らかなのは、(2)式にあるように、 $\mathbf{s}$ 面上の強度の情報だけでは不十分であり、コヒーレンス関数の全体を知っていなくてはならないことである。幾何光学の光線の位置と方向の概念が、物理光学のコヒーレンス関数の概念に置き換わるといえる。

興味深いことに、コヒーレンス関数を変形して輝度によく似た関数を導入できることが Marchand と Wolf によって示された<sup>7)</sup>。まず、光源から  $\theta$  方向に放射される周波数  $\omega$  の成分の光束を求めよう。図3のように  $z=0$  を光源面とし、面上に点  $\mathbf{s}$  をとる。観測点  $\mathbf{r}$  は十分遠方にあるとする。観測点の回りに微小面積  $d^2r$  を光束に垂直にとり、ここを通過する光束を  $F$  とすると、 $F$  は  $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega) d^2r$  に比例するから、比例定数を  $C$  として

$$F = \frac{C}{\lambda^2} d^2r \iint \frac{e^{ik(\rho_{11}-\rho_{22})}}{\rho_{11}\rho_{22}} \cos^2 \theta \hat{\Gamma}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \omega) d^2s_1 d^2s_2 \quad (17)$$

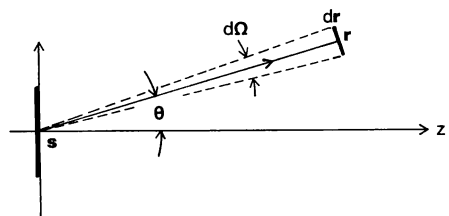


図3 光源からθ方向に放射される光束

と書ける。ただし, inclination factor を  $\cos\theta$  とした。積分変数を  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  から, 重心と差

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \quad (18)$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$$

に変換する。観測点は十分遠方にあるから, 位相項は

$$k(\rho_{11} - \rho_{22}) \sim -k \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \cdot \mathbf{s}' \quad (19)$$

と近似できる。これを代入すると

$$F = \frac{C}{\lambda^2} d^2 \mathbf{r} \iint \frac{e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2} \cos^2 \theta \hat{f}\left(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{s}', \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{s}'; \omega\right) d^2 \mathbf{s} d^2 \mathbf{s}' \quad (20)$$

となる。ただし,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \quad (21)$$

と置いた。そこで輝度に当たる関数を, 同じ記号を使って

$$B(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = \frac{C}{\lambda^2} \cos^2 \theta \int e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}'} \hat{f}\left(\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{s}', \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{s}'; \omega\right) d^2 \mathbf{s}' \quad (22)$$

と定義する。ここで,  $\mathbf{n}$  は方向と解釈される単位ベクトルである。この式を(20)式に代入し, 光源から  $d^2 \mathbf{r}$  を望む立体角は  $dQ = d^2 \mathbf{r} / |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2$  であることを用いると

$$F = dQ \int B(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \cos^2 \theta d^2 \mathbf{s} \quad (23)$$

を得る。これは形式的に(16)式を  $\mathbf{s}$  で積分したものに一致する。

上のように, 二つの空間座標を重心と差に分け差について Fourier 変換する方法は, Wigner が量子力学の密度行列と古典的分布関数の対応を論じるために導入したもので Wigner 分布関数と呼ばれる<sup>9)</sup>。Wigner の場合の Fourier 変換は3次元であり, いまの場合には面上2次元であるが精神に変わりはない。Wigner 分布関数の特徴は必ずしも非負ではないことである。負の輝度というのは物理的にありえないから, (22)式を輝度と解釈するのは無理があり, あくまで形式的な一致と見なくてはならない。もちろん積分の結果である(23)式は決して負になることはない。

(22)式の  $B$  を使って照度等を表わすとすべて幾何光学の測光学の公式に対応することが確かめられている。また, Wolf らは  $B$  が非負になる一群のコヒーレンス関数を調べているが, これら詳細は Marathay の教科書にゆずる<sup>9)</sup>。

## 2. 高次のコヒーレンス関数

### 2.1 $2n$ 次コヒーレンス関数

コヒーレンス関数はランダムに変動する光の振幅  $E(\mathbf{r}, t)$  の最低次の相関関数として定義された。これを拡張して  $2n$  個の時空点  $\mathbf{x}_i = (\mathbf{r}_i, t_i)$  における振幅の相関関数

$$\Gamma(x_1 \cdots x_n, x_{n+1} \cdots x_{2n}) = \langle E(x_1) \cdots E(x_n) E^*(x_{n+1}) \cdots E^*(x_{2n}) \rangle \quad (24)$$

を  $2n$  次のコヒーレンス関数と呼ぶ。

干渉とか結像というような通常の光学の問題を扱う限りこれまで論じてきた2次のコヒーレンス関数でまにあう。レンズなどの光学素子の応答は光の振幅に関して線形であり, 検出器だけが2次の特性を示すので, 全体としてたかだか2次の項しか出てこないからである。4次以上のコヒーレンス関数が登場するのは, 強度干渉計や非線形光学など特別な場合に限られる。一方, 光子統計では光の従う統計分布が問題の対象であり, そこでは, 高次のコヒーレンス関数が中心的役割を果たす。光の統計分布そのものは測定にかかる性質のものではなく, データはつねにコヒーレンス関数を介して与えられるからである。

高次のコヒーレンス関数の重要性は, たとえば, レーザ光と自然光の違いはどこにあるかというような疑問に答えるとき明らかとなる。インコヒーレント光源からの光の2次のコヒーレンス関数は, 光源のスペクトル幅と見掛けの角直径からきまる。したがって, 光源を遠く離し, 前に狭帯域のスペクトルフィルターを置けば高いコヒーレンス度が得られる。現実にはレーザー光と自然光では単位スペクトル当りの強度が異なるから両者を取り違えることはないであろうが, 原理的には干渉縞の写真だけではレーザー光と自然光を区別することはできない。2次のコヒーレンス関数に関する限り, 高輝度の光源があればレーザー光と同等の光を作り出せるのである。それではレーザー光と自然光をどうして区別するかという以下に示すように4次のコヒーレンス関数を調べればよいのである。

### 2.2 インコヒーレント光源

インコヒーレント光源からの光の4次のコヒーレンス関数を求めよう。前回述べたとおりインコヒーレント光源からの光は, 光源を構成する個々の原子から放射された互いに独立な光の寄せ集めであった。したがって, 光の振幅  $E(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (\mathbf{r}, t)$  は形式的に

$$E(\mathbf{x}) = \sum u_n(\mathbf{x}) \quad (25)$$

と書ける。要素  $u_n(x)$  の正体は光をモード分解したときの  $n$  番目のモードの複素振幅であるが、モード分解についてはコヒーレンスの量子論のところで論じられるであろうから、ここでは直感的に  $n$  番目の原子の出す光と考えておく。要点は、 $u_n(x)$  は光の周波数で振動する項であり、 $n$  の異なる項は統計的に独立であることである。これから

$$\begin{aligned} \langle u_n(x) \rangle &= \langle u_n(x_1) u_n(x_2) \rangle = 0 \\ \langle u_n(x_1) u_m^*(x_2) \rangle &= 0, \quad n \neq m \end{aligned} \quad (26)$$

などが成り立つ。統計計算の強い所であるが、モデルの詳細に依らず一般的な仮定だけで正しい結果が得られる。

はじめに、2 次のコヒーレンス関数は

$$\Gamma(x_1, x_2) = \sum \langle u_n(x_1) u_n^*(x_2) \rangle \quad (27)$$

となる。次に4 次のコヒーレンス関数を求めよう。

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \sum \sum \sum \sum \langle u_{n_1}(x_1) u_{n_2}(x_2) u_{n_3}^*(x_3) u_{n_4}^*(x_4) \rangle \\ &= \sum \sum \sum \sum \langle u_n(x_1) u_n^*(x_3) \rangle \langle u_m(x_2) u_m^*(x_4) \rangle \\ &\quad + \sum \sum \sum \sum \langle u_n(x_1) u_n^*(x_4) \rangle \langle u_m(x_2) u_m^*(x_3) \rangle \\ &= \Gamma(x_1, x_3) \Gamma(x_2, x_4) + \Gamma(x_1, x_4) \Gamma(x_2, x_3) \end{aligned} \quad (28)$$

と書けるが、 $u_n$  自身の平均値が0であることと、 $n$  についての独立性を考慮すると、0にならないのは、 $(n_1=n_3, n_2=n_4)$  と  $(n_1=n_4, n_2=n_3)$  のときだけになる。ゆえに

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \sum \sum \langle u_n(x_1) u_n^*(x_3) \rangle \langle u_m(x_2) u_m^*(x_4) \rangle \\ &\quad + \sum \sum \langle u_n(x_1) u_n^*(x_4) \rangle \langle u_m(x_2) u_m^*(x_3) \rangle \\ &= \Gamma(x_1, x_3) \Gamma(x_2, x_4) + \Gamma(x_1, x_4) \Gamma(x_2, x_3) \end{aligned} \quad (29)$$

となり、4 次のコヒーレンス関数が、2 次のコヒーレンス関数の積で書けることが示された。実は4次に限らず任意の次数のコヒーレンス関数が2次のコヒーレンス関数で表わされることが確かめられる。この結果は、ランダム関数が多数の互いに独立な関数の和になるときに一般的に成り立つ結果であり、この性質をもつランダム関数は Gauss の統計に従うという<sup>10)</sup>。

なお上の計算を詳細に検討すると、 $n_1=n_2=n_3=n_4$  の項が二重に数えられていることに気付く。(25)式の和の項数を  $N$  とすると、4 次のコヒーレンス関数は  $N^2$  のオーダーであるが、二重に数えた項は  $N$  のオーダーであるから、 $N$  が十分大きければこの差は無視できる。面白いことに量子論の計算では、この二重に数えた項は、演算子の交換関係から出てくる余分な項と正確に打ち消し合い、その結果、(29)式が厳密に成り立つ。

### 2.3 レーザー光

レーザー光のコヒーレンスについてはレーザーの発明後 10 年ぐらい精力的に研究された<sup>11)</sup>。ここでは、その

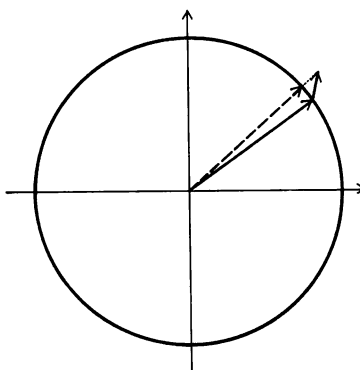


図 4 レーザー光の複素振幅ベクトル  
定常状態は円周に乗る。定常状態から外れるようなノイズが加わると、位相の異なる別の定常状態に変化する。

結果のごく定性的な説明を与えよう。

定常的に発振する理想的な単一モードレーザーを考える。理想的とは、機械的振動、熱ゆらぎ、電源電力の変動など外部からのゆらぎがないという意味である。また議論は時間のコヒーレンスに限る。レーザー光の振幅を  $E(t) = ae^{i\phi}e^{-i\omega t}$  としよう。ここで  $a$  は実数である。複素振幅  $ae^{i\phi}$  を複素平面上のベクトルとして表現するとわかりやすい(図 4)。レーザー発振の定常状態はゲインと共振器の損失の釣り合うところできまる。それを  $a_0$  とする。定常状態できまるのは振幅の絶対値のみであって、位相は任意である。実際、位相は時間の原点をずらすだけで変わるから、位相の絶対的な値というのは物理的に意味がない。複素ベクトルの表現では定常解は円周上の点になる。

ノイズが加わって、定常状態  $a_0e^{i\phi_1}$  から  $ae^{i\phi_2}$  に変わったとしよう。振幅の絶対値については、レーザーゲインと共振器の損失のバランスがくずれ、定常状態に向かって強い復元力が働く。その結果、振幅  $a$  はある時定数で定常値  $a_0$  に復帰する。一方、位相に関してはすべての値が同等に許されるのであるから、変化した後の値のままである。結局、はじめに  $a_0e^{i\phi_1}$  であった状態がノイズのために位相のみが変化し  $a_0e^{i\phi_2}$  の状態になる。図 4 で、実線の状態から破線の状態に変化するわけである。そこで、次々と定常的にノイズが加わるとすると、振幅の絶対値は定常値の回りをわずかに変動するだけだが、位相はノイズの加わるたびに正または負の方向に変化する。レーザー発振のしきいの近くを除くと、振幅の絶対値のゆらぎは非常に小さいことがわかっている。したがって振幅の複素ベクトルは、図 4 の円周上をランダムに動き回る。この動きは、Brown 運動、あるいは、

random walkであることを証明できる。以上がレーザー光のゆらぎの直感的イメージである。

レーザー光のノイズの主要な原因は、自然放出光と熱雑音である。可視やその近傍のスペクトル域では自然放出光雑音が大きい。一方、ノイズの大きさが一定であれば、図4の円の半径が大きいほど位相のゆらぎは小さくなる。実際、定量的な解析によれば、位相のゆらぎの2乗平均は自然放出の確率に比例し、レーザー光強度に反比例する。

2次のコヒーレンス関数は、振幅のゆらぎを無視して

$$\Gamma(t_1, t_2) = a_0^2 \langle e^{i(\phi(t_1) - \phi(t_2))} \rangle e^{-i\omega(t_1 - t_2)} \quad (30)$$

となる。φ(t)がBrown運動をするとき上式は

$$\Gamma(t_1, t_2) = a_0^2 e^{-\Delta\omega |t_1 - t_2|} e^{-i\omega(t_1 - t_2)} \quad (31)$$

と書けることが知られている。Δωは位相のゆらぎの大きさの2乗平均に比例する量である。スペクトルは2次のコヒーレンス関数のFourier変換で与えられるから、スペクトル幅ΔωのLorentz型のスペクトルになる。たとえば、He-NeレーザーではΔωは1Hz以下である。

次に、4次のコヒーレンス関数は

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, t_2, t_3, t_4) \\ = a_0^4 \langle e^{i(\phi(t_1) + \phi(t_2) - \phi(t_3) - \phi(t_4))} \rangle e^{-i\omega(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。二つの時間区間が重ならないとき位相変化は統計的に独立であることを使って位相項の平均を計算できる。表式は時間変数の並び方に依存する。とくに、t<sub>1</sub>=t<sub>4</sub>, t<sub>2</sub>=t<sub>3</sub>のときは

$$\Gamma(t_1, t_2, t_2, t_1) = a_0^4 \quad (33)$$

と定数になる。これは次節で論じる強度相関関数である。

### 2.4 強度干渉計

高次のコヒーレンス関数の測定の一つにHanbury-BrownとTwissの強度干渉計がある(図5)<sup>12)</sup>。二つの検出器からの光強度の信号I<sub>1</sub>(t<sub>1</sub>)=|E(r<sub>1</sub>, t<sub>1</sub>)|<sup>2</sup>とI<sub>2</sub>(t<sub>2</sub>)=|E(r<sub>2</sub>, t<sub>2</sub>)|<sup>2</sup>の積を電氣的にとり平均をする。実際の測定では、検出器の応答関数の補正、測定系のノイ

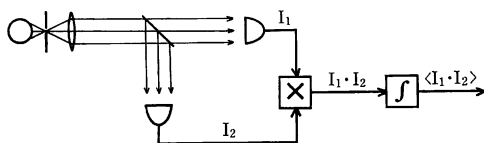


図5 Hanbury-BrownとTwissの強度干渉計  
この図の配置では異なる時間の強度相関が得られる。空間的に広がった光を別々の場所で受ければ異なる位置での強度相関が得られる。

ズの除去などむずかしい問題が残るが、この装置で強度の相関を得ることができる。強度相関関数は4次のコヒーレンス関数を用いて

$$\langle I_1(t_1)I_2(t_2) \rangle = \Gamma(x_1, x_2, x_2, x_1) \quad (34)$$

と書ける。ただし、x<sub>i</sub>=(r<sub>i</sub>, t<sub>i</sub>)である。強度干渉計の出力はこれの時間積分であるが、定常光源であれば上式は時間差にしか依らないから出力にはたんに観測時間が掛かるだけである。強度相関を平均強度で規格化した関数を

$$g(x_1, x_2) = \frac{\Gamma(x_1, x_2, x_2, x_1)}{\Gamma(x_1, x_1)\Gamma(x_2, x_2)} \quad (35)$$

としよう。

インコヒーレント光の場合

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, x_2, x_1) \\ = \Gamma(x_1, x_1)\Gamma(x_2, x_2) + \Gamma(x_1, x_2)\Gamma(x_2, x_1) \end{aligned} \quad (36)$$

である。Γ(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>)=Γ\*(x<sub>2</sub>, x<sub>1</sub>)であることを使うと

$$g(x_1, x_2) = 1 + |\gamma(x_1, x_2)|^2 \quad (37)$$

と書ける。ここで、γ(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>)は複素コヒーレンス度である。とくに、強度の2乗平均g(x, x)は2になる。これは前回の講義で述べたインコヒーレント光の強度の分布関数を使って直接<math>\langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2</math>を計算しても確かめられる。

理想的なレーザー光では強度のゆらぎは非常に小さいから、g(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>)は常に1である。図6は時間をずらしていったときの規格化された強度相関関数の様子を示したものである。ここに至ってレーザー光とインコヒーレント光を明瞭に区別する手段が得られた。

インコヒーレント光源に対して強度干渉計から得られるのはコヒーレンス度の情報である。普通の干渉計に比べて位相の情報失われている。干渉計測はほとんどの場合位相変化の測定であるから、普通の干渉計を強度干

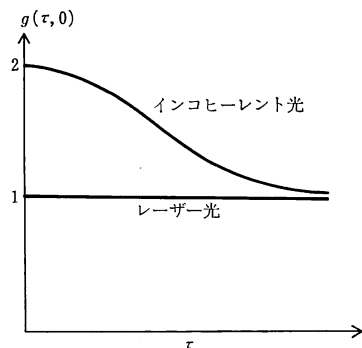


図6 インコヒーレント光とレーザー光の強度相関関数

渉計に置き換えることはできない。しかし逆に強度干渉計は位相の変化に鈍感であるから、地上からの天体観測のように空気のゆらぎが障害になる場合には都合がよい<sup>13)</sup>。また出力は電気信号であるから、二つの検出器を近くに置く必要もなく基線長が地球規模あるいはそれ以上の干渉計を組むことができる。天体強度干渉計はおもに電波領域で使われている。

## 2.5 光子計数と強度相関関数

強度干渉計で入射光強度が一個一個の光子が区別できるほど弱くなったとしよう。検出器には光子1個に感じる高感度のものを用い、雑音はないとする。各検出器の出力は光子の入射に対応するパルス列になる。積をとると、両方の検出器から同時にパルスが来たときだけパルスが出力される。平均を取るかわりに、パルスのカウンターを置けば測定時間内に二つの検出器に同時に光子が入射した事象の数が測定できる。すなわち、強度相関関数  $\Gamma(x_1, x_2, x_2, x_1)$  は  $r_1, r_2$  において時間差  $\tau = t_1 - t_2$  において2個の光子が存在する確率に比例するのである。これが光子計数から見た強度相関関数の意味である。

インコヒーレント光の  $g(x, x)$  が2になることは、光子がかたまっても飛んでくる性向のあることを示している。これを光の bunching という。

強度相関の2通りの解釈は光の波動説と粒子説に対応している。光の理論は正しくは量子論に従わねばならないが、空間を伝播するときは波動のイメージが、放射や吸収など光が物質と相互作用するときは粒子のイメージが理解しやすい。とくに波動説は関与する光子の数が多いたとにのみ妥当な近似である。

最後に波動説のパラドックスを紹介しよう。 $g(x, x) = 0$  になる系が存在するのである。これは古典的な波動の考え方からはとうてい理解できない。答えは光子が1個しか存在しない系である。たとえば、光励起された1個の原子からの放出を想像すれば、原子が光を出したあと再び励起状態へ励起されるのにいくらかの時間がかかるから同時には光子は1個しか存在しない。 $g(x, x)$  は同時に2個の光子を見出す確率に比例するから光子が1個しかなければたしかに0である。規格化された強度

相関関数が1以下になる現象は antibunching といわれ<sup>14)</sup>、実証されている<sup>15)</sup>。

コヒーレンス関数と偏光状態の関係、いろいろな光源に対するコヒーレンス関数の具体的表示などまだ述べるべき事柄が多く残っているが、紙面も尽きたのでここで入門編を終える。

## 文 献

- 1) 黒田和男: "光のコヒーレンス1", 光学, **14** (1985) 393-399.
- 2) H. Gamo: "Matrix treatment of partial coherence," *Progress in Optics*, Vol. 3, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1964) p. 187.
- 3) E. Wolf: "New theory of partial coherence in the space-frequency domain. Part 1: spectra and cross spectra of steady-state sources," *J. Opt. Soc. Am.*, **72** (1982) 343.
- 4) 加藤敏夫: 位相解析 (共立出版, 東京, 1967) p. 315.
- 5) E. Wolf and G. S. Agarwal: "Coherence theory of laser resonator modes," *J. Opt. Soc. Am.*, **A1**(1984) 541.
- 6) 小穴 純: "測光学上の諸量と諸量間の関係(1)", 光学, **4** (1975) 142; "同(2)", 光学, **4**(1975) 187; "同(3)", 光学, **4** (1975) 238.
- 7) E. M. Marchand and E. Wolf: "Radiometry with sources of any state of coherence," *J. Opt. Soc. Am.*, **64** (1974) 1219.
- 8) E. Wigner: "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium," *Phys. Rev.*, **40** (1932) 749.
- 9) A. S. Marathay: *Elements of Optical Coherence Theory* (John Wiley, New York, 1982) p. 239.
- 10) たとえば, J. W. Goodman: *Statistical Optics* (John Wiley, New York, 1985) p. 82.
- 11) H. Haken: *Encyclopedia of Physics, Light and Matter*, **1c** (Springer, Berlin, 1970). レーザーのコヒーレンスに関する文献は他に多数あり。
- 12) R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss: "Interferometry of the intensity fluctuations in light. I. Basic theory: the correlation between photons in coherent beams of radiation," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **242** (1957) 300; "—II. An experimental test of the theory for partially coherent light," *ibid.*, **243** (1958) 291.
- 13) R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss: "A test of a new type of stellar interferometer on Sirius," *Nature*, **178** (1956) 1046.
- 14) D. Stoler: "Photon antibunching and possible ways to observe it," *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974) 1397.
- 15) H. J. Kimble, M. Dagenais and L. Mandel: "Photon antibunching in resonance fluorescence," *Phys. Rev. Lett.*, **39** (1977) 691.