

## 光のコヒーレンス 3

## 部分的コヒーレント照明下の結像 (1)

山本公明

オリンパス光学工業(株)技術開発本部 〒192 八王子市石川町 2951

(1985年11月11日受理)

## Coherence of Light 3

Image Formation under Partially  
Coherent Illumination (1)

Kimiaki YAMAMOTO

Corporate Research Div., Olympus Optical Co. Ltd.,  
2951, Ishikawa-cho, Hachioji 192

## 1. はじめに

前回までの講義でわかるように、光学系を通して物体を照明すると、たとえインコヒーレント光源を用いても物体は部分的コヒーレントに照明されるようになる。このような結像光学系では、物体の振幅のみならず位相も像形成に寄与するため、像の見え方が照明光のコヒーレンスによって大きく影響を受ける。また重要な結像性能の一つである分解能もコヒーレンスによって大きく変わるため、コヒーレンスを考慮した結像論の正しい理解は、像評価、機器設計をする上で非常に重要である。しかし、このように実用的に非常に重要な問題も、理論的に体系づけられてきたのは1950年代以降であり、結像現象の長い研究の歴史の中では近年に属する。1953年、Hopkinsは有効光源 (effective source) という概念を導入し、照明系のコヒーレンスを考慮した結像式を導出し、部分的コヒーレント照明下の結像論の基礎づけをした。以来、この式を基にした多くの像および光学特性の研究、あるいは理論拡張等に関する研究が行なわれてきている。最近においては3次元像形成の問題にまで発展しつつある。

本講義では、あまり子細な像特性等には立ち入らず、おもに部分的コヒーレント照明下における像形成の機構および特徴を理解する上で、基本的に重要と思われる事

項をできるだけ詳しく説明してみたい。

なお、結像現象を取り扱う場合最終的に求めたい物理量は、多くの場合像の強度分布であり、一般的には多くの時間周波数を含む多色光のそれである。しかし時間平均強度を考える限り、多色光の強度分布は時間周波数 $\nu$ の光の強度分布を周波数で積分したものととなる。したがって結像現象の理解にあたっては、周波数 $\nu$ の光についての基本物理量を取り扱えばほぼ十分であるので、以下においては単色光または準単色光を想定し議論を進める。

## 2. 物体照明光のコヒーレンス

## 2.1 相互強度の伝播

コヒーレンス関数  $\Gamma(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \tau)$  で  $\tau=0$  とした  $\Gamma(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, 0)$  は相互強度 (mutual intensity) と呼ばれる。単色または準単色光の結像現象における波動場を想定するとき、基本的に重要な物理量は相互強度となる。そこでまず準備として、図1に示すような二つの面における相互強度の伝播の問題を考える。この問題は前回の講義<sup>1)</sup>におけるコヒーレンス関数の伝播の問題そのものであり、結果として次式が成立する。

$$\Gamma(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \iint \Gamma(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) K(\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_1) K^*(\mathbf{Q}_2, \mathbf{P}_2) d\mathbf{P}_1 d\mathbf{P}_2 \quad (1)$$

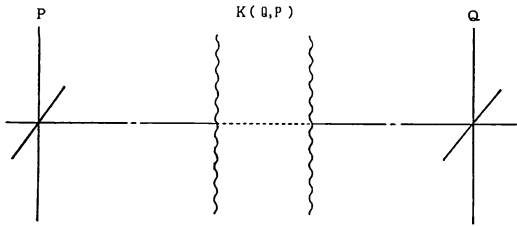


図 1 相互強度の伝播を考える光学系

ここで  $K(Q, P)$  は面 P, Q 間における振幅伝播関数であり, P 上の 1 点で単位の大きさをもつ波動が, 面 P, Q 間の光学系を通った後, 点 Q で示す波動の複素振幅を表わす.

2.2 物体照明光の相互強度および強度分布

通常用いられる照明系は, 図 2(a)(b)に示すようなケーラー照明 (Köhler illumination) およびクリティカル照明 (critical illumination) である. そこでそれぞれの照明につき, 物面上における照明光の相互強度および強度分布を考える. 最初に図 2(a)のケーラー照明について考える. この照明系において面 Q と物体面 U は, それぞれレンズ  $L_2$  の焦点面にあるとする. 開き絞り直前における波動場の相互強度を  $\Gamma_c(Q_1, Q_2)$  とし, 面 Q と U の間の振幅伝播関数を  $K(U, Q)$  で表わせば, 物面上の相互強度は(1)式から次のように与えられる.

$$\Gamma_0(U_1, U_2)$$

$$= \iint \Gamma_c(Q_1, Q_2) t(Q_1) t^*(Q_2) K(U_1, Q_1) K^*(U_2, Q_2) dQ_1 dQ_2 \quad (2)$$

ただし  $t(Q)$  は開き絞り面の複素振幅透過率である. 球面波を 2 乗放物面波で近似した Fresnel 近似の範囲内では, 振幅伝播関数  $K(U, Q)$  は次の式で与えられる.

$$K(U, Q) = \int \exp\left[\frac{ik}{2f}(Q - Y)^2\right] \exp\left[-\frac{ik}{2f}Y^2\right] \times \exp\left[\frac{ik}{2f}(Y - U)^2\right] dY \quad (3)$$

(3)式を(2)式に代入すると

$$\Gamma_0(U_1, U_2) = \exp\left[\frac{i\pi n_c}{\lambda f_c}(|U_1|^2 - |U_2|^2)\right] \times \iiint \Gamma_c(Q_1, Q_2) t(Q_1) t^*(Q_2) \times \exp\left[\frac{i\pi n_c}{\lambda f_c}(|Q_1|^2 - |Q_2|^2)\right] \times \exp\left[\frac{i\pi n_c}{\lambda f_c}(|Y_1|^2 - |Y_2|^2)\right] \times \exp\left[-\frac{i2\pi n_c}{\lambda f_c}(Q_1 \cdot Y_1 - Q_2 \cdot Y_2)\right] \times \exp\left[-\frac{i2\pi n_c}{\lambda f_c}(Y_1 \cdot U_1 - Y_2 \cdot U_2)\right] \times dQ_1 dQ_2 dY_1 dY_2 \quad (4)$$

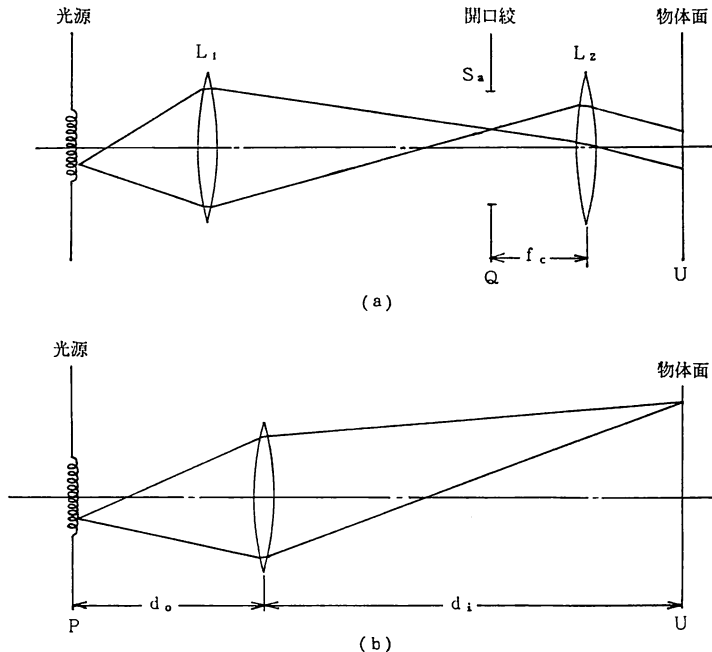


図 2 照明光学系

(a)ケーラー照明系, (b)クリティカル照明系

となる。(4)式は複雑な8重積分式であるが変数変換

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 &= 2\alpha \\ Y_1 - Y_2 &= 2\beta \end{aligned} \quad (5)$$

により次のような簡単な形になる。

$$\begin{aligned} \Gamma_0(U_1, U_2) &= \iint \Gamma_c(Q_1, Q_2) t(Q_1) t^*(Q_2) \\ &\times \exp\left[-\frac{i2\pi n_c}{\lambda f_c}(Q_1 \cdot U_1 - Q_2 \cdot U_2)\right] dQ_1 dQ_2 \end{aligned} \quad (6)$$

なお unnecessary な定数は省略してある。

(6)式は面Q上の任意の波動場に適応可能であり、面Qの波動場のコヒーレンスを考慮した物面上の一般的な相互強度の表示式である。また(6)式を正規化すれば照明光のコヒーレンスが求まるので、物体照明光のコヒーレンスに対する一般式とも考えられる。

物体面U上における照明光の強度分布は  $I(U) = \Gamma_0(U, U)$  で求められ(6)式から次のようになる。

$$\begin{aligned} I(U) &= \iint \Gamma_c(Q_1, Q_2) t(Q_1) t^*(Q_2) \\ &\times \exp\left[-\frac{i2\pi n_c}{\lambda f_c}(Q_1 - Q_2) \cdot U\right] dQ_1 dQ_2 \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式はレンズの前側焦点面におかれた物体が部分的コヒーレント光で照明された時の後側焦点面における強度分布を示しており、フーリエ領域における回折場の一般式でもある。

(6)および(7)式をもとにして、面Q上の波動場がインコヒーレントおよびコヒーレントな特殊な状態にある場合の相互強度および強度分布を求めておく。

面Qの波動場がインコヒーレントであるとき、

$$\Gamma_c(Q_1, Q_2) = \delta(Q_1 - Q_2) \quad (8)$$

とおけるから(8)式を(6)式に代入すれば、

$$\Gamma_0(U_1, U_2) = \int |t(Q)|^2 \exp\left[-\frac{i2\pi n_c}{\lambda f_c}(U_1 - U_2) \cdot Q\right] dQ \quad (9)$$

となる。(9)式によれば、物面上の任意の2点に対する相互強度は場所に依存せずたんに2点間距離の関数であり、物体上の波動場は空間的に定常とみなされる。そしてこのとき、物面上の相互強度は面Qの強度透過率のフーリエ変換で与えられる。また強度分布は

$$I(U) = \int |t(Q)|^2 dQ \quad (10)$$

であり物体面は面Q上の強度分布にかかわらず一様強度で照明されることになる。これが、均一な照明を必要とする光学系でケーラー照明が多用される理由である。

一方、面Qの波動場がコヒーレントであるときには

$\Gamma(Q_1, Q_2) = 1$  であるから物面上の相互強度は(6)式より

$$\begin{aligned} \Gamma_0(U_1, U_2) &= \iint t(Q_1) t^*(Q_2) \\ &\times \exp\left[-\frac{i2\pi n_c}{\lambda f_c}(Q_1 \cdot U_1 - Q_2 \cdot U_2)\right] dQ_1 dQ_2 \end{aligned} \quad (11)$$

で示される。このとき強度分布は

$$I(U) = \left| \int t(Q) \exp\left[-\frac{i2\pi n_c}{\lambda f_c} Q \cdot U\right] dQ \right|^2 \quad (12)$$

であり、よく知られているように、振幅透過率  $t(Q)$  の Fraunhofer 回折像が得られる。当然この場合、物体は一様な強度で照明されない。次に図2(b)のクリティカル照明の場合を考える。この照明系では、光源はインコヒーレント光源であるから、面P上の相互強度は  $\Gamma(P_1, P_2) = \delta(P_1 - P_2)$  と表わせる。また、面PとUは互いに共役面であるから、コンデンサレンズ瞳面上の座標を  $Q$  であらわすとき、振幅伝播関数  $K(U, P)$  は

$$\begin{aligned} K(U, P) &= \exp\left[\frac{i\pi n_c}{\lambda d_i} |U|^2\right] \exp\left[\frac{i\pi n_c}{\lambda d_o} |P|^2\right] \\ &\times \int P_c(Q) \exp\left[-\frac{i2\pi n_c}{\lambda} \left(\frac{P}{d_o} + \frac{U}{d_i}\right) \cdot Q\right] dQ \end{aligned} \quad (13)$$

で与えられる<sup>2)</sup>。したがって物体上の相互強度は(1)式から次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \Gamma_0(U_1, U_2) &= \exp\left[\frac{i\pi n_c}{\lambda d_i} (|U_1|^2 - |U_2|^2)\right] \\ &\times \iint \Gamma_c(Q_1 - Q_2) P_c(Q_1) P_c^*(Q_2) \\ &\times \exp\left[-\frac{i\pi n_c}{\lambda d_i} (U_1 \cdot Q_1 - U_2 \cdot Q_2)\right] dQ_1 dQ_2 \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 $d_o, d_i$  はそれぞれコンデンサ瞳面から、光源および物体面までの距離、 $P_c(Q)$  はコンデンサレンズの瞳関数、また  $\Gamma_c(Q_1 - Q_2)$  はコンデンサ瞳面での相互強度を表わし光源の強度分布  $S(P)$  と次の関係式で結ばれている。

$$\Gamma_c(Q_1 - Q_2) = \int S(P) \exp\left[-\frac{i2\pi n_c}{\lambda d_o} (Q_1 - Q_2) \cdot P\right] dP \quad (15)$$

(14)式によれば、もし2乗の位相項  $\exp[i(\pi n_c/\lambda d_i)(|U_1|^2 - |U_2|^2)]$  が無視できると仮定すると、(14)式は(6)式と一致するが、このような仮定は顕微鏡等の結像系において結像式を導く際には成立する<sup>3)</sup>。したがって、結像系を考えるときにはクリティカル照明系においても、物体照明光のコヒーレンスを(6)式で特徴づける

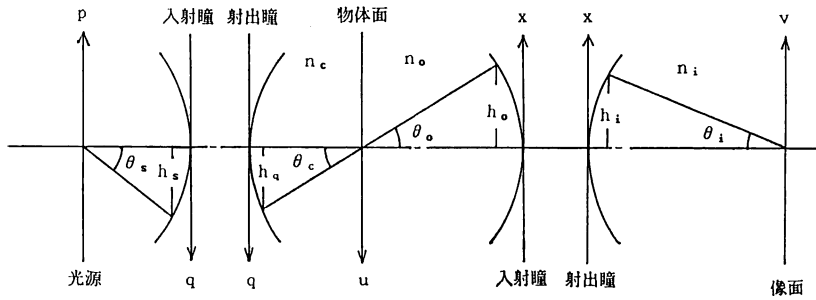


図 3 一般的な結像光学系

ことができる。

以上、実際の照明系における物体照明光のコヒーレンスを考察してきたが、ここで Hopkins が導入した有効光源の概念を検討してみる。Hopkins は物体上の波動場を空間的に定常と仮定し、物体照明光のコヒーレンスのフーリエ変換を有効光源と定義した<sup>3)</sup>。(6), (9), (14)式から明らかのように、この場合の有効光源は、実際の照明系図 2(a)では開き絞りの面をインコヒーレントと考えたときのその面上の強度分布、また(b)では、コンデンサレンズの射出瞳面の波動場をインコヒーレントと仮定したときの射出面上の強度分布に対応していることがわかる。なお、図 2(a)における開き絞りの面は、光学的には照明光学系の射出瞳と等価であるから、有効光源はケーラー照明、クリティカル照明にかかわらず、照明光学系における射出瞳の波動場がインコヒーレントであるときの射出瞳上の強度分布と考えることができる。

照明光学系の瞳面の波動場がインコヒーレントであるためには光源の大きさが十分大きいことが必要となるが、このようなときには(9)式から明らかのように、物体照明光のコヒーレンスに影響を及ぼすのは射出瞳上の強度分布そのものであるため、照明光学系の収差は結像特性に影響しないことになる。一方、光源が小さく射出瞳上の波動場が部分的コヒーレントの場合には、照明系の収差は結像特性に影響を及ぼす<sup>4)</sup>。

### 3. 結 像 式

#### 3.1 照明光学系の射出瞳のコヒーレンスを考慮した一般結像式<sup>5)</sup>

図 3 のように主要面を配置した結像光学系を考え、像

の強度分布式を求める。図において、 $n_e, n_o, n_i$  はそれぞれ記入された空間における屈折率、 $h_o, h_i$  はそれぞれ対物レンズの入射瞳および射出瞳の半径、 $h_c$  は対物レンズの入射瞳  $h_o$  の点から逆方向に光線を追跡したとき、その光線が照明系の射出瞳球面と交わった点の光軸からの距離を示す。各面上における座標は、面を表わす記号と同記号のベクトルで表示し、像分布の定式化に際する表示の簡潔さのため、次のような換算座標を導入する。

$$\begin{aligned} v &= \frac{n_i \sin \theta_i}{\lambda} V, & u &= \frac{n_o \sin \theta_o}{\lambda} U \\ p &= \frac{n_e \sin \theta_c}{\lambda} P & (16) \\ x &= \frac{X_o}{h_o} = \frac{X_i}{h_i}, & q &= \frac{Q_o}{h_o} = \frac{Q_i}{h_i} \end{aligned}$$

ここで  $V, P, U$  はそれぞれ面、 $v, p, u$  における実際の幾何学座標を表わし、また  $X_o, X_i$  および  $Q_o, Q_i$  は対物レンズおよび照明系の入射および射出瞳面における幾何学座標を示す。このような置き換えは、たんに表示の簡潔さのみならず、近軸領域で成り立つ諸式を近軸系を越え幅広く実際の光学系に適用可能とするために本質的に重要である。このような換算座標のもとでは、像面上の強度分布は(1), (6), (14)式を考慮すると次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} I(v) &= \iiint \Gamma_e(q_1, q_2) t(q_1) t^*(q_2) \\ &\times \exp[-i2\pi(q_1 \cdot u_1 - q_2 \cdot u_2)] \\ &\times a(u_1) a^*(u_2) F(v, u_1) F^*(v, u_2) dq_1 dq_2 du_1 du_2 \end{aligned} \quad (17)$$

ここで  $a(u)$  は物体の振幅透過率を示し、また  $F(v, u)$  は物体面と像面間における振幅伝播関数を表わし、光学系の isoplanatism (点像分布が物点位置により変わらない条件) を仮定すれば

$$F(v, u) = \int P(x) \exp[-i2\pi(v-u) \cdot x] dx \quad (18)$$

\* このような位相項が問題となるのは、この項が被積分関数となる場合である。  $\exp[i\pi n_e \lambda d_1 |U|^2]$  は球面的変化をする位相を表わすが、結像系では結像点に及ぼす物体面の影響は、結像点に共役な物体点のごく近傍の小領域であり、この小領域ではその変化はごく小さくほぼ一定であるとみなせられ無視できるようになる。

で表わされる。ただし  $P(x)$  は対物レンズの瞳関数を表わし、また不必要な位相項は省略している。

(17)式は照明系瞳面における波動場の定常性を仮定し、その面における相互強度のフーリエ変換  $S(\mathbf{p})$  を導入すると次のように変形できる。

$$I(\mathbf{v}) = \iiint S(\mathbf{p}) \hat{t}(\mathbf{p}-\mathbf{u}_1) \hat{t}^*(\mathbf{p}-\mathbf{u}_2) a(\mathbf{u}_1) a^*(\mathbf{u}_2) \times F(\mathbf{v}-\mathbf{u}_1) F^*(\mathbf{v}-\mathbf{u}_2) d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 d\mathbf{p} \quad (19)$$

ただし、

$$\hat{t}(\mathbf{u}) = \int t(\mathbf{q}) \exp[i2\pi\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}] d\mathbf{q} \quad (20)$$

また

$$\Gamma_c(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \int S(\mathbf{p}) \exp[i2\pi(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{p}] d\mathbf{p} \quad (21)$$

であり、 $S(\mathbf{p})$  は面 P 上におけるインコヒーレント光源の輝度分布を表わすと考えられる。

ここで関数

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \hat{t}(\mathbf{p}-\mathbf{u}) a(\mathbf{u}) \quad (22)$$

および

$$h(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{p}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{p}) F(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \quad (23)$$

を導入すると(19)式は次のように書きかえられる。

$$I(\mathbf{v}) = \iiint S(\mathbf{p}) h(\mathbf{u}_1; \mathbf{v}, \mathbf{p}) h^*(\mathbf{u}_2; \mathbf{v}, \mathbf{p}) d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 d\mathbf{p} \quad (24)$$

さらに関係式

$$\int h(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{p}) d\mathbf{u} = \left[ \int h(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{p}) \exp(i2\pi\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{u} \right]_{\mathbf{y}=0} = \hat{h}(\mathbf{y}=0; \mathbf{v}, \mathbf{p}) \quad (25)$$

および

$$\int \hat{h}^*(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{p}) d\mathbf{u} = \hat{h}(\mathbf{y}=0; \mathbf{v}, \mathbf{p}) \quad (26)$$

を考慮すると次式となる。

$$I(\mathbf{v}) = \int S(\mathbf{p}) |\hat{h}(\mathbf{y}=0; \mathbf{v}, \mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} \quad (27)$$

(27)式は像の簡単な表示式であるが、(23)式から

$$\hat{h}(\mathbf{y}=0; \mathbf{v}, \mathbf{p}) = \int \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \hat{F}(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}] d\mathbf{x} \quad (28)$$

であり、(28)式における  $F(\mathbf{v})$  のフーリエ変換  $\hat{F}(\mathbf{x})$  は対物レンズの瞳関数であることを考えると、次のように具体的に書き下せる。

$$I(\mathbf{v}) = \int S(\mathbf{p}) \left| \int \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) P(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}] d\mathbf{x} \right|^2 d\mathbf{p} \quad (29)$$

ただし  $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  は  $g(\mathbf{u}, \mathbf{p})$  のフーリエ変換であり、(22)式から

$$\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int t(\mathbf{q}) \hat{a}(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \exp[i2\pi\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}] d\mathbf{q} \quad (30)$$

で示される。ここで  $\hat{a}(\mathbf{x})$  は  $a(\mathbf{u})$  のフーリエ変換を示す。

(29)式は図3に対応した光学系での最終的な像の強度分布を表わしており、通常の結像光学系における最も一般的な結像式と考えることができる。なお、図3ではインコヒーレント光源  $S(\mathbf{p})$  が物面上に写像されていると考えられるので、コンデンサレンズの Airy disk に相当するスポットサイズの集束光が、物体を走査しながら照明していく光学系とも走査的要素を別にとると光学的に等価であるので、(29)式はレーザーを用いた走査型結像に対する一般結像式と考えることもできる。この走査型結像についてはまた次回に詳しく述べる。

### 3.2 照明光学系の射出瞳がインコヒーレントである場合の結像式

結像式(29)式から、照明光学系の射出瞳がインコヒーレントな場合の結像式を導出する。照明系の射出瞳がインコヒーレントであるとき、

$$\Gamma_c(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \quad (31)$$

が成立するから、(21)式から  $S(\mathbf{p})=1$  である。このとき(29)式は次のように表わされる。

$$I(\mathbf{v}) = \int |t(\mathbf{q})|^2 \left| \int \hat{a}(\mathbf{x}-\mathbf{q}) P(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}] d\mathbf{x} \right|^2 d\mathbf{q} \quad (32)$$

上式は照明系の射出瞳を2次光源とみなし、 $|t(\mathbf{q})|^2$  をその輝度と考えれば Hopkins の結像式<sup>3)</sup>と一致する。

(32)式は、部分的コヒーレント光学系における結像式において、通常よく使用される式であるが、変形すると次のように書き表わすこともできる。

$$I(\mathbf{v}) = \iint T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \hat{a}(\mathbf{x}_1) \hat{a}^*(\mathbf{x}_2) \times \exp[-i2\pi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{v}] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \quad (33)$$

ここで

$$T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int \gamma(\mathbf{q}) P(\mathbf{q} + \mathbf{x}_1) P^*(\mathbf{q} + \mathbf{x}_2) d\mathbf{q} \quad (34)$$

であり、transmission cross-coefficient<sup>6)</sup>と称されている。ただし、 $\gamma(\mathbf{q}) = |t(\mathbf{q})|^2$  とした。

また、物体が周期構造をもっているときには、その振幅透過率はフーリエ級数展開でき、

$$a(\mathbf{u}) = \sum_n a_n \exp[-i2\pi n \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}] \quad (35)$$

と表示できる。したがって、そのスペクトルは

$$\hat{a}(\mathbf{x}) = \sum_n a_n \delta(\mathbf{x} - n\mathbf{f}) \quad (36)$$

で与えられ、このとき(33)式は

$$I(\mathbf{v}) = \sum_n \sum_m a_n a_m T(n, m) \exp[i2\pi(n-m)\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}] \quad (37)$$

で表わされる。ただし、 $\mathbf{f}$  は周期構造の基本周波数を示し、また

$$T(n, m) = \int \gamma(\mathbf{x}) P(\mathbf{x} + n\mathbf{f}) P^*(\mathbf{x} + m\mathbf{f}) d\mathbf{x} \quad (38)$$

である。

### 3.3 照明光学系の射出瞳がコヒーレントである場合の結像式

照明系の射出瞳がコヒーレントである場合、

$$\Gamma_c(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = 1 \quad (39)$$

が成立するから、(21)式から  $S(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p})$  である。このとき(29)式は次のように変形される。

$$I(\mathbf{v}) = \left| \int a(\mathbf{u}) \hat{i}(-\mathbf{u}) \hat{P}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\mathbf{u} \right|^2 \quad (40)$$

ただし、 $\hat{P}(\mathbf{u})$  は  $P(\mathbf{x})$  のフーリエ変換を表わし、物体面と像面間における振幅伝播関数を示す。

(40)式によれば、照明系射出瞳の波動場が空間的にコヒーレントである場合の結像現象は、振幅透過率  $a(\mathbf{u}) \hat{i}(-\mathbf{u})$  をもった物体のコヒーレント照明下の結像であると解釈される。

## 4. 空間周波数領域における評価

### 4.1 線形光学系の条件と評価

光学系の空間周波数領域での評価は、光学系固有の特性をみる上で非常に重要である。この事は、線形システムにおけるフーリエ領域での評価と同等の意味をもっているが、(29)式で明らかのように部分的コヒーレント照明下の結像式は非線形なため、その評価もそれほど単純でない。しかし、ある種の条件が満足されると、部分的コヒーレント照明下の結像系も線形系とみなせられるようになるので<sup>7)</sup>、まず、そのような条件とそのときの伝達関数について述べる。このような線形系の条件は、部分的コヒーレント系における一つの特殊条件ではあるが、通常の像形成においてもこの条件が満足される場合も少なくないばかりでなく、このときの光学系の特性は一般的な系における第一近似の特性を表わしている。なお、大部分の部分的コヒーレント結像系において、照明系の射出瞳はインコヒーレントに近いと考えられ、Hopkinsの結像式が適用可能となるため、その結像式を基本にして話を進める。

Hopkinsの結像式が成り立つ結像系では、像の強度分布は(33)式で表わされる。(33)式をフーリエ変換すると次式となる。

$$\hat{I}(\mathbf{x}) = \int T(\mathbf{x}' + \mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{a}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}) \hat{a}^*(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (41)$$

まず  $T(\mathbf{x}' + \mathbf{x}, \mathbf{x}')$  がスペクトルの位置  $\mathbf{x}'$  に依存しない特別な場合を考える。このとき、上式は

$$\begin{aligned} \hat{I}(\mathbf{x}) &= T(\mathbf{x}) \int \hat{a}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}) \hat{a}^*(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= T(\mathbf{x}) F[|a(\mathbf{u})|^2] \end{aligned} \quad (42)$$

と表わされる。ただし  $F$  はフーリエ変換を示すオペレータである。(42)式は物体強度と像強度の関係が線形であり、そのときの系の伝達関数が  $T(\mathbf{x})$  で与えられることを表わしている。 $T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  は(34)式から明らかのように、光学系固有の量であり、図4に示された三つの円の共通部分を積分範囲とする関数である。したがって一般にはスペクトルの位置  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  に依存する。しかし無限に大きく、かつ一様強度をもつ有効光源、すなわちインコヒーレント照明の場合を考えれば、 $T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  は周波数差  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  のみの関数となり、(42)式が成立する。このときの  $T(\mathbf{x})$  はよく知られたインコヒーレント系の O.T.F. (optical transfer function) である。したがって、像を形成する物体スペクトル対が、スペクトルの位置にかかわらず、周波数差  $\mathbf{x}$  の対に対しては系固有の重み  $T(\mathbf{x})$  をもつとき、系は一般的に線形となる。また逆に、部分的コヒーレント照明下の結像では、 $T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  がスペクトル対の差周波数  $\mathbf{x}$  のみによらず、スペクトルの位置に依存するため非線形になるといえる。

次に物体のスペクトルが特定の周波数  $\mathbf{x}_0$  で比較的大きな輝線スペクトルを有し、

$$\hat{a}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \hat{b}(\mathbf{x}) \quad (43)$$

で表示できる場合を考える。このとき(41)式は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \hat{I}(\mathbf{x}) &= T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \delta(\mathbf{x}) + \hat{b}^*(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \\ &\quad + \hat{b}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

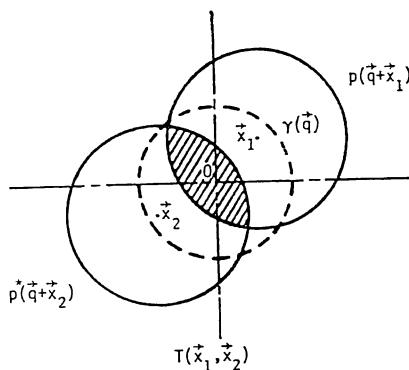


図4  $T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  の積分領域

$$+ T(\mathbf{x}' + \mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{b}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}) \hat{b}^*(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (44)$$

(44)式は、もし積分項が無視できる場合、光学系を線形系と仮定できることを意味している。このような条件は (1)物体が低コントラスト、低位相物体の場合、(2)明るい背景中に小物体が存在する場合において成り立つが、とくに(1)の場合における光学系の伝達関数は次のように表わされる。

いま、物体の振幅透過率を

$$a(\mathbf{u}) = [1 + c(\mathbf{u})] \exp[i\phi(\mathbf{u})] \approx 1 + c(\mathbf{u}) + i\phi(\mathbf{u}) \quad (45)$$

そのときの物体スペクトルを

$$\hat{a}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) + \hat{c}(\mathbf{x}) + i\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) + \hat{b}(\mathbf{x}) \quad (46)$$

とすると、像のフーリエ変換は(44)式から

$$\hat{I}(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}, 0)\delta(\mathbf{x}) + 2\hat{c}(\mathbf{x})\text{Re } T(\mathbf{x}, 0) - 2\hat{\phi}(\mathbf{x})\text{Im } T(\mathbf{x}, 0) \quad (47)$$

となる。ただし仮定より  $|c(\mathbf{u})| \ll 1$ ,  $|\phi(\mathbf{u})| \ll 1$ 。有効光源の強度分布および対物レンズの瞳関数が光軸対称であるとすると、上式は

$$\hat{I}(x) = F[|a(u)|^2] \text{Re } T(x, 0) - 2\hat{\phi}(x) \text{Im } T(x, 0) \quad (48)$$

であり、光学系の伝達関数は物体の強度分布に対し  $\text{Re } T(x, 0)$  位相分布に対し  $\text{Im } T(x, 0)$  となる。

図5に合焦および焦点はずれ光学系の  $\text{Re } T(x, 0)$  および  $\text{Im } T(x, 0)$  を示す。図中  $M$  は照明系レンズと対物レンズの開口数比を表わしている。図から  $M \leq 1$  のとき、カットオフ周波数は、 $1 + M$  で表わされることがわかる。 $\text{Im } T(x, 0)$  は、一般に光学系が無収差で合焦点のときには値をもたないが、光学系が焦点はずれのときには値をもち、このようなとき、物体の位相分布が可視化されるようになる。この現象は電子顕微鏡観察において利用されている。

### 4.2 非線形系における評価

4.1節で述べたような条件が存在しないとき、部分的コヒーレント結像系は物体と像の強度に関し非線形となり、一義的に系を特徴づける評価量はない\*2。このような系における周波数領域の評価量としては、一つに(41)式における  $T(\mathbf{x}' + \mathbf{x}, \mathbf{x})$  を一般的な伝達関数とすることが考えられる。 $T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  は(33)式から明らかなように、像構造が物体スペクトル間の干渉によって形成されるが、そのときのスペクトル対に対する重み関数という

\*2 (1)式からわかるように、結像系の空間的定常性を仮定すれば、像面と物体直後の相互強度間に一義的な周波数域での評価量を設定しうる<sup>9)</sup>。しかし、実際にほしいのは、物体情報と像との関係であるので、このような評価量は、あまり実用的でない。

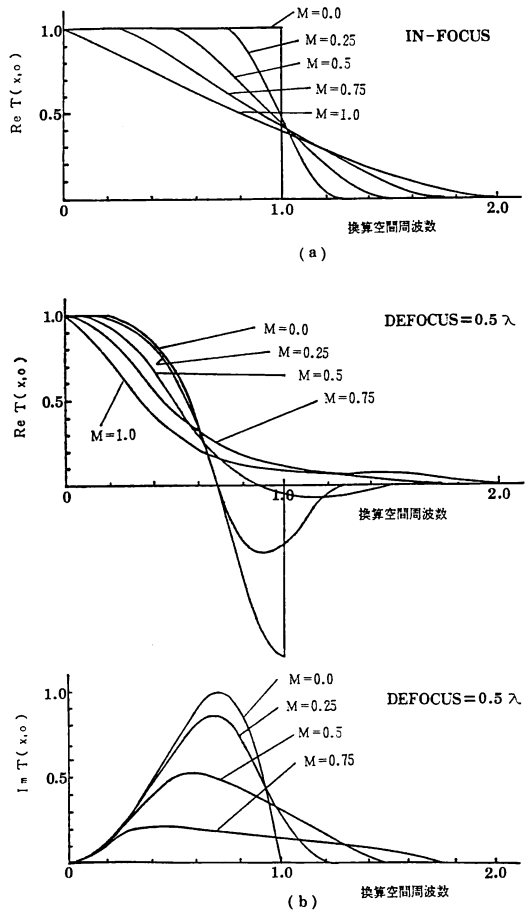


図5 合焦点および焦点はずれ光学系の  $\text{Re } T(x, 0)$  と  $\text{Im } T(x, 0)$   
 (a)合焦点光学系の  $\text{Re } T(x, 0)$ , (b)焦点はずれ光学系 (波面収差 0.5 波長)における  $\text{Re } T(x, 0)$  および  $\text{Im } T(x, 0)$

意味をもっている。しかし多くのスペクトル対に対する  $T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  特性が存在しうるため、 $T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  を通常の感覚で伝達関数としてとらえることはできないし、またすべての  $T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  特性を計算することも大変であり、そういった意味ではあまり実用的でない。

次に、インコヒーレント光学系の O. T. F. が正弦状物体のコントラストと位相シフトの応答に対応した物理的意味をもつことから<sup>9)</sup>、部分的コヒーレント結像系でも、正弦状物体、より一般的には周期物体に対する物体と像のコントラスト比の周波数特性を評価量とする方法が考えられる。すなわち、周期物体の強度分布は、すでにみたように(37)式で与えられるが、(37)式において  $n - m = k$  とすると像強度分布がさらに次式のように表わされる。

$$I(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k \cos(2\pi k \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \theta_k) \quad (49)$$

ただし,

$$E_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 T(n, n)$$

$$E_k \exp[i\theta_k] = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a_{n-k}^* T(n, n-k), \quad k=1, 2, \dots \quad (50)$$

上式において, すべての  $T(n, m)=1$  とすると物体強度分布が得られるが全体, あるいは各周波数成分に対する物体強度と像強度のモジュレーション比を評価量とするわけである. 各周波数成分に対する評価量は apparent transfer function<sup>10, 11)</sup> と呼ばれている.

一例として, 正弦状振幅物体

$$a(\mathbf{u}) = 1 + \cos 2\pi \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (51)$$

を考えると, 像の強度分布は, 有効光源および光学系収差が光軸対称のとき

$$I(\mathbf{v}) = T(0, 0) + (1/2)T(1, 1) + 2T(1, 0) \cos 2\pi \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + (1/2)T(1, -1) \cos 4\pi \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (52)$$

となる. したがって基本周波数および倍高調波成分に対する apparent transfer function はそれぞれ

$$T_a^1(\mathbf{f}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{T(1, 0)}{T(0, 0) + (1/2)T(1, 1)} \quad (53)$$

$$T_a^2(\mathbf{f}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{T(1, -1)}{T(0, 0) + (1/2)T(1, 1)}$$

となる. しかし, このように定義された周波数特性も, 周波数領域での一つの評価量ではあるが, 物体のモジュレーションによって値が変わるため, 一義的な周波数応答特性とはなりえない. いずれにしろ, 部分的コヒーレント照明下の結像系が非線形なことからくる周波数域での評価方法の問題はこのように厄介であり, 依然, 問題として残っている. 一般に  $T(1, 0)$  を部分的コヒーレン

ト系の O. T. F. とみなし系の評価が行われることがあるが, これは通常の像形成では, 大部分, 0次と1次のスペクトル間干渉によって像構造が決まるということを前提にして定義されているものであり, すでに述べてきたことからわかるように, このように定義された O. T. F. はインコヒーレント系の線形系の O. T. F. とまったく同等の意味でないことは留意しておく必要がある.

今回は像特性の特徴, 走査型結像系等について述べる.

## 文 献

- 1) 黒田和男: "光のコヒーレンス2", 光学, 15 (1985) 485-491.
- 2) J. W. Goodman: *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, San Francisco, 1968) p. 92.
- 3) H. H. Hopkins: "On the diffraction theory of optical images," Proc. R. Soc. London, Ser. A, 217 (1953) 408-432.
- 4) 辻内順平, 吉川敏幸: "顕微鏡の像におけるコンデンサの収差の影響", 機械試験所所報, 12 (1958) 60-69.
- 5) K. Yamamoto, Y. Ichioka and T. Suzuki: "Influence of light coherence at the exit pupil of the condenser on the image formation," Opt. Acta, 23 (1976) 987-996.
- 6) M. Born and E. Wolf: *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1959) p. 530.
- 7) 山本公明, 一岡芳樹, 鈴木達朗: "線形近似化された部分的コヒーレント光学系の結像特性", 光学, 6 (1977) 13-19.
- 8) G. B. Parrent, Jr.: "Imaging of extended polychromatic sources and generalized transfer functions," J. Opt. Soc. Am., 51 (1961) 143-151.
- 9) 久保田広, 浮田祐吉, 會田軍太夫編: 光学技術ハンドブック (朝倉書店, 東京 1968) p. 149.
- 10) R. E. Swing and J. R. Glay: "Ambiguity of the transfer function with partially coherent illumination," J. Opt. Soc. Am., 57 (1967) 1180-1189.
- 11) R. J. Becherer and G. B. Parrent, Jr.: "Nonlinearity in optical imaging systems," J. Opt. Soc. Am., 57 (1967) 1479-1486.

## 講義『光のコヒーレンス』

- 1 「インコヒーレント光源」(黒田和男) 14巻5号 pp. 393-399
- 2 「コヒーレンス関数の伝播・高次のコヒーレンス」(黒田和男) 14巻6号 pp. 485-491