

研究

誤差をもつ格子によるモアレ縞の解析法

新井 泰彦・倉田 忠雄

関西大学工学部機械工学科 〒564 吹田市山手町 3-3-35

(1985年9月30日受理)

An Analysis of Moiré Fringe Formed by Gratings with Errors

Yasuhiko ARAI and Tadao KURATA

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kansai University,
3-3-35, Yamate-cho, Suita 564

This paper describes a practical analysis of moiré fringe profile formed by gratings with some errors as a model in the case of an encoder. The encoder is constructed with a pair of gratings and a moiré detecting system with a finite area aperture. A mathematical expression for individual error of grating-line, the influence of the error on fringe profile and the effect of the detecting aperture are discussed. The results show that the influence of errors is changed variously by shape of the detecting aperture. By using this phenomenon, it is considered that the moiré detecting system in the encoder can be designed in detail.

1. はじめに

モアレ縞は、周期性のあるほぼ同じ空間周波数をもつ図形を重ねあわせた場合に、新たに発生する縞模様として知られている^{1,2)}。この現象は、近年工学の分野においても長さの測定、歪の測定、三次元形状測定など広く利用されている³⁻⁵⁾。なかでも、モアレ縞の光学的拡大作用⁶⁾を利用した測長、測角の分野では、産業用ロボットをはじめとする factory automation の普及とともにない、モアレ縞は A-D 変換器として大きな役割をはたし、さらに、これらの装置の高精度化、高分解能化が望まれている⁷⁾。この高精度化を進めるにあたっての誤差解析でまず問題となるものに格子の精度がある。ところが、現実の格子には製作精度が向上したとはいえ⁸⁾、工業的に利用する場合には、価格、製作法等により、周期性をもつパターン的な誤差、個々の格子条のランダムな誤差などさまざまな誤差が存在している。従来、このような格子の誤差のモアレ縞への影響は、モアレ縞のもつ誤差の平均化効果⁶⁾といわれる性質として取り扱われ、幾何学的な解析⁸⁾が行なわれているものの、エンコーダにおいて実質的に問題となるモアレプロファイルへの影響を取り扱うことはできなかった。

本研究では、この問題に対して、モアレ縞を用いたエ

ンコーダをモデルとし、格子条のもつ誤差のモアレプロファイルへの影響を解析する手法を示した。また、一般に格子の誤差はさまざまなパターンをもち、すべてを網羅して取り扱うことが困難なため、基本的な誤差を設定し、実験を通して解析法の正当性を確かめ、さらに、エンコーダにおける格子の誤差と出力の誤差との基本的関係を計算機シミュレーションによって検討した。これらの結果より、この解析法は、エンコーダにおける高精度化、高分解能化に対してきわめて有効なものであると考える。

2. エンコーダにおけるモアレプロファイル⁹⁻¹³⁾

エンコーダのように一方の格子を移動させ、それにともない変化するモアレ縞を有限の面積の開口を通して平均的明るさとして検出する場合について考える。

従来の考え方では、格子は Fig. 1 に示すプロファイルをもつ完全に周期的なバイナリ格子として(1)、(2)式のように考えられ、積のモアレよりもアレプロファイル $M_0(x, y)$ を(3)式として考えていた⁹⁾。

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= e_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \{b_m \cos 2\pi m(\mu_1 x - \nu_1 y)\} \\ &\quad + c_m \sin 2\pi m(\mu_1 x - \nu_1 y) \quad (1) \\ T_2(x, y) &= e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{f_n \cos 2\pi n(\mu_2 x - \nu_2 y)\} \end{aligned}$$

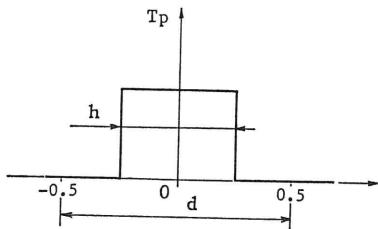


Fig. 1 Profile of binary grating.

$$+ g_n \sin 2\pi n(\mu_2 x - \nu_2 y) \quad (2)$$

$$M_0(x, y) = T_1(x, y) \cdot T_2(x, y)$$

$$= \frac{a_0 e_0}{A_1}$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{b_i f_i}{2} + \frac{c_i g_i}{2} \right) \cos 2\pi i \{ (\mu_1 - \mu_2)x - (\nu_1 - \nu_2)y \} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{c_i f_i}{2} - \frac{b_i g_i}{2} \right) \sin 2\pi i \{ (\mu_1 - \mu_2)x - (\nu_1 - \nu_2)y \} \right] \right] \quad A_2$$

$$+ \left[e_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left[b_m \cos 2\pi m(\mu_1 x - \nu_1 y) + c_m \sin 2\pi m(\mu_1 x - \nu_1 y) \right] \right. \\ \left. + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n \cos 2\pi n(\mu_2 x - \nu_2 y) + g_n \sin 2\pi n(\mu_2 x - \nu_2 y) \right] \right] \quad A_3$$

$$+ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{b_m f_n}{2} + \frac{c_m g_n}{2} \right) \cos 2\pi \{ m(\mu_1 x - \nu_1 y) - n(\mu_2 x - \nu_2 y) \} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{c_m f_n}{2} - \frac{b_m g_n}{2} \right) \sin 2\pi \{ m(\mu_1 x - \nu_1 y) - n(\mu_2 x - \nu_2 y) \} \right] \right] \quad A_4$$

$$+ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{b_m f_n}{2} - \frac{c_m g_n}{2} \right) \cos 2\pi \{ m(\mu_1 x - \nu_1 y) + n(\mu_2 x - \nu_2 y) \} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{c_m f_n}{2} + \frac{b_m g_n}{2} \right) \sin 2\pi \{ m(\mu_1 x - \nu_1 y) + n(\mu_2 x - \nu_2 y) \} \right] \right] \quad A_5$$

(3)

ここで、 μ_1, μ_2 は格子の x 方向、 ν_1, ν_2 は y 方向の空間周波数であり、 $a_0, e_0, b_m, c_m, f_n, g_n$ はフーリエ係数である。

エンコーダのように有限の面積をもつ開口を通してモアレ縞を考える場合は、Wronkowskii の解析法¹³⁾が必要となる。これは、移動量 y_0 を考慮した格子モデル(4)式を移動格子と考えられる(2)式の y に $y - y_0$ を代入することにより定義し、(4)式と(1)式との間に発生するモアレ縞のプロファイル $M_0(x, y, y_0)$ を(3)式同様に定義するものである。さらに、開口を通過する光の強度分布の総和 $M(x, y, y_0)$ を(5)式に示すように、 $M_0(x, y, y_0)$ と開口の透過率分布 $T_3(x, y)$ のたたみ込み積分として考えるものである¹³⁾ (Fig. 2)。

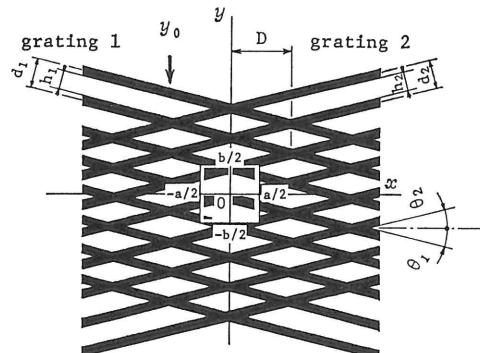


Fig. 2 A detecting aperture for moiré fringes.

$$M_0(x, y, y_0) \triangleq T_2(x, y - y_0)$$

$$= e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n \cos 2\pi n \{ \mu_2 x - \nu_2 (y - y_0) \} \\ + g_n \sin 2\pi n \{ \mu_2 x - \nu_2 (y - y_0) \}] \quad (4)$$

$$M(x, y, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_0(x - x', y - y', y_0) \\ \times T_3(x', y') dx' dy' \quad (5)$$

ここで、

$$T_3(x, y) = 1 : |x| \leq a/2 \text{ and } |y| \leq b/2$$

$$0 : |x| > a/2 \text{ or } |y| > b/2$$

以上の演算により、エンコーダにおけるモアレプロファイルを数学的モデルとして考えることができる。

3. 実際のエンコーダの誤差解析を行なうための一手法

3.1 実際の格子モデル

従来のように完全に周期的な格子モデルでは、現実にそくしたさまざまな誤差をもつ格子を考えることができない。

この問題に対して、格子構造の誤差を数式として表現するには、数本の格子条を 1 周期とし、その周期内で格子の構造に誤差を考えればよい。たとえば、Fig. 3において格子 N 本を 1 周期と考えれば、格子モデルは、一般に、(6)式として考えることができる。

$$T_N(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos 2\pi n(\mu_3 x - \nu_3 y) \\ + b_n \sin 2\pi n(\mu_3 x - \nu_3 y) \} \quad (6)$$

$$\text{ここで, } a_0/2 = \sum_{i=1}^N h_i / \sum_{i=1}^N d_i, \quad 2l = \sum_{i=1}^N d_i$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^N \left[\sin \left(\frac{n\pi h_i}{2l} \right) \cos \left\{ \frac{n\pi}{2l} (-2l + 2e_i) \right\} \right]$$

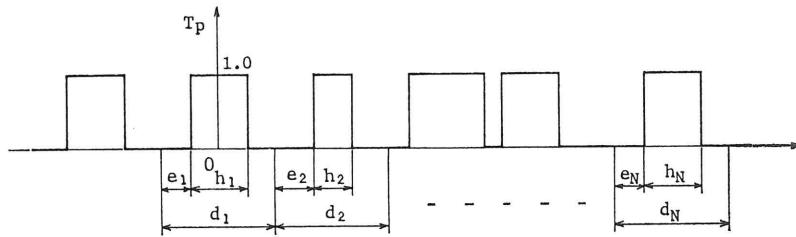


Fig. 3 A model of grating with random errors.

$$+ h_i + 2 \sum_{j=0}^{i-1} d_j \Big) \Big] \\ b_n = \frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^N \left[\sin\left(\frac{n\pi h_i}{2l}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2l}(-2l + 2e_i + h_i + 2 \sum_{j=0}^{i-1} d_j)\right) \right]$$

ただし, $d_0=0$

ここで, μ_3, ν_3 は N 本の格子条を 1 周期とした格子群の x, y 方向の空間周波数であり, d_i は各格子条のピッチ, h_i は格子の開口幅, e_i は偏りである。

以上の定義により, 誤差のある格子を数式として表現することができる。

3.2 新しい解析法の実験的検証

次に, (6)式に示した格子モデルを用い, 計算機シミュレーションを行ない, 同時に同条件下での実験結果との比較, 検討を行なった。

実験に使用した装置は, 一方の格子を固定できるように改造したミクロフォトメータであり, ステージ上の移

動格子と固定された格子との間に発生するモアレ縞を長さ $0 \sim 20$ mm, 幅 $0 \sim 10$ mm の範囲で自由に変化させることのできる開口を通して検出するものである。一方, 実験に使用した格子は製作時に, 誤差に対し次のように考えた。一般に, 格子のもつ誤差はさまざまなパターンをもち, 一概に定義することが困難なため, 最も基本的な誤差について考え, さらに, 実験誤差に結果が隠れてしまわないように, 特徴的な誤差を格子に与えることとした。この考え方にもとづき, 基本格子の格子ピッチを 1 mm とし, Fig. 3 の各値に対して Table 1 に示したプロファイルをもつ 4 種類の格子 (G-A, G-B, G-C, G-D) を製作し, 実験に使用した。実験条件は, Fig. 2において各格子の取付け角を $\theta_1=\theta_2=15$ deg (格子の交差角を 30 deg) に設定し, 開口幅 a をモアレ縞ピッチ D ($D=d/\sin\theta$ ただし, d は格子条のピッチ, $\theta=\theta_1=\theta_2$) に対して $a=0.05 D$, 開口長さ b を格子条 N 本の周期に格子の取付け角を考慮した値 $L(L=Nd/\cos\theta)$ に対して, $b=0.4 L$ とした。以上の条件より, 1 周期とす

Table 1 Experimental gratings.

	profile of grating	remarks
G-A		$d_1=d_2=d_3=d_4=d_5=1$ (mm) $h_1=h_2=h_3=h_4=h_5=0.5$ (mm) $e_1=e_2=e_3=e_4=e_5=0.25$ (mm)
G-B		$d_1=d_2=d_3=d_4=d_5=1$ (mm) $h_1=h_2=h_4=h_5=0.5$ (mm), $h_3=1$ (mm) $e_1=e_2=e_4=e_5=0.25$ (mm), $e_3=0$
G-C		$d_1=d_2=d_3=d_4=d_5=1$ (mm) $h_1=h_2=h_4=h_5=0.5$ (mm), $h_3=0$ $e_1=e_2=e_4=e_5=0.25$ (mm), $e_3=0$
G-D		$d_1=d_2=d_3=d_4=d_5=1$ (mm) $h_1=h_2=h_3=h_4=h_5=0.5$ (mm) $e_1=e_2=e_4=e_5=0.25$ (mm), $e_3=0$

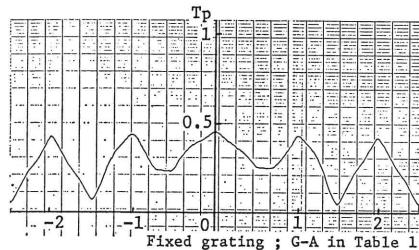


Fig. 4 Result of experiment.

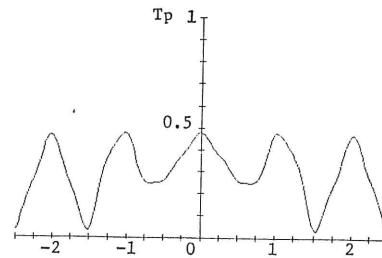


Fig. 6 Result of simulation.

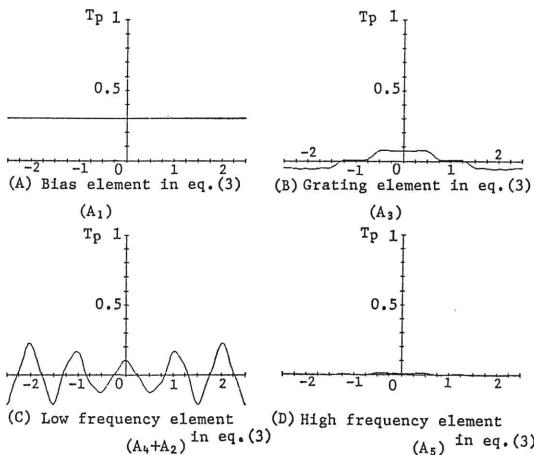


Fig. 5 Calculational results of elements in Eq. (3) in the case of moiré fringes by grating with errors.

る格子条の本数 N は、本稿で取り扱う格子の誤差の基本パターンを十分に考えることのできる5本とし、フーリエ級数の項数を15項として計算した。

Fig.4にTable 1のG-Aを固定格子、G-Bを移動格子とした場合の実験結果を示す。G-Bの格子の開口比における誤差により、モアレ縞のプロファイルは大きくひずんでいる。これに対し、本解析法により、(3)式の各項を計算した結果がFig.5である。Fig.5において、開口範囲にわたるたたみ込み積分は、そこを通過する光の総和を意味するものであるから、開口内の局所的な強弱は平均化される。したがって開口が大きければ平均化作用が広範囲となり、(B)に示す本来の格子の成分(A_3 : (3)式の第3, 4項)ならびに、(D)に示す高周波成分(A_5 : (3)式の第6項)等はともにほとんどがゼロとなる。また、開口が小さい場合には、平均化の範囲がせまく格子の誤差に従って、 A_3, A_5 成分が局所的に値をもつようになる。一方、格子に誤差がなければ、透過光の局所的変動が少ないため、小さい開口でも平均化されやすくなる。したがって、格子に誤差がない従来

の解析法では、小さい開口でも A_3, A_4, A_5 は平均化され、 A_1, A_2 成分によってモアレプロファイルを考えることができた。しかし、格子が誤差をもつ場合には、透過光の局所的変動が大きく、 A_3, A_4, A_5 を考慮しなければならない。すなわち、このような場合には、モアレプロファイルは、(3)式のすべての項を考えなければならない。この考え方について計算を行なった結果がFig.6である。Fig.4の実験結果によく一致している。同様にTable 1に示す格子を用い、実験ならびにシミュレーションを行なった結果がFig.7である。どの場合にも、実験結果とシミュレーション結果とはよく一致している。

4. 検出開口形状のモアレプロファイルへの影響

前章に示した議論より、検出用開口形状(開口幅: a 、開口長さ: b)のモアレプロファイルへの定性的な影響は次のように考えられる。

開口幅 a を D まで広げればモアレ成分がまったく平均化されてしまう、したがって小さくすれば明暗の振幅、すなわち縞のコントラスト¹⁴⁾が増加するはずである。また、開口長さ b を L 以上にすると格子の誤差による透過光強度の変動は平均化される。逆に小さくすると誤差による変動が顕著になるはずである。この考え方にもとづき、Fig.8では開口幅 a の影響を、Fig.9では開口長さ b の影響を検討する。

Fig.8は開口長さ $b=0.40L$ とした場合の開口幅 a のモアレプロファイルへの影響を示すものである。前述の定性的な説明に示したように、 a の増大にともないコントラスト V は明らかに低下している。また、コントラスト V は、ほぼ開口幅 a に対して線形に低下していくことがわかる。すなわち、0.7程度のコントラストを保つためには、 $a=0.30D$ 以下の小さな開口幅にする必要があることがわかる。Fig.9はFig.7(c)で取り扱った格子開口の偏り誤差に対して検出開口幅 $a=0.05D$ とした場合の開口長さ b のモアレプロファイルへの影響

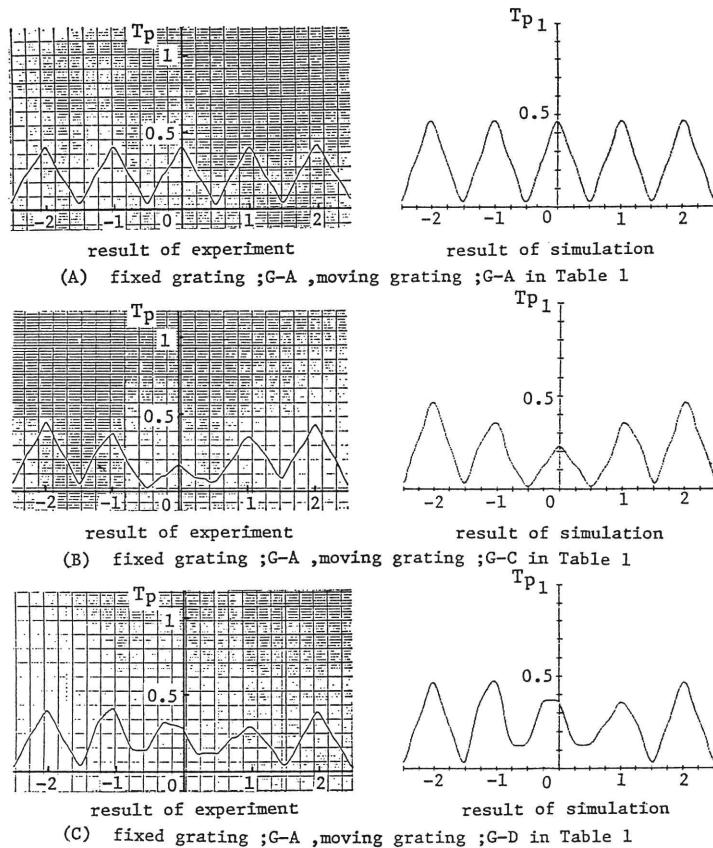
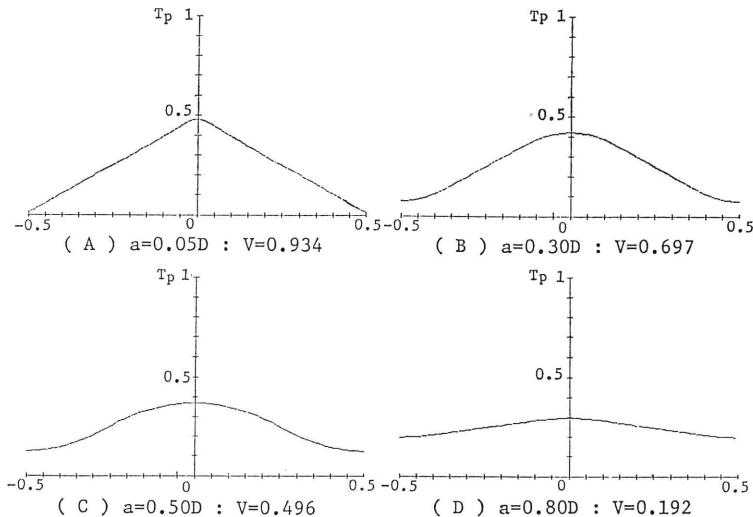


Fig. 7 Comparison of the experimental results with simulative results.

Fig. 8 The influence of width of detecting aperture on moiré profile.
Length of aperture: $b = 0.40 L$.

を示すものである。

$b = 0.30 L$ 以下ではほぼ(A)に示すような格子の誤差による局所的な影響を受けたモアレプロファイルとなり、

$b = 0.40 L$ 近傍において、格子の誤差による影響が急速に緩和されはじめ、 $b = 0.60 L$ 程度より、 b の増大に対してモアレプロファイルへの影響の緩和はゆるやかになる

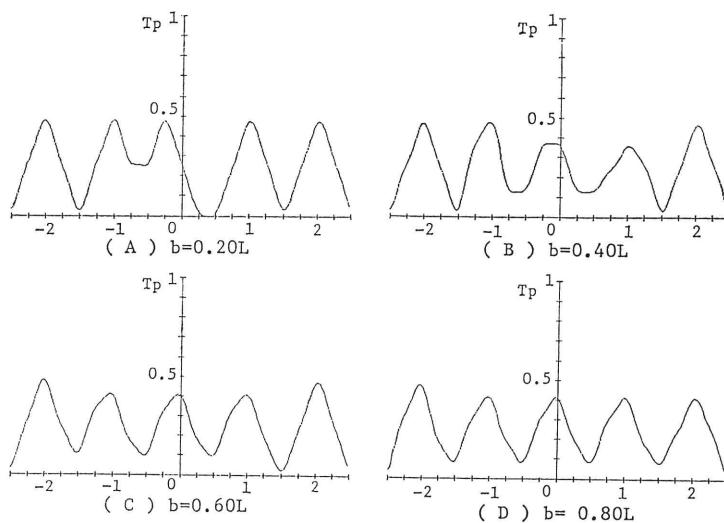


Fig. 9 The influence of length of detecting aperture on moiré profile.
Width of aperture : $a = 0.05 L$.

ことがわかった。このことより、 b はできる限り大きく設定することが望ましいが、ある領域を過ぎると、 b をそれ以上に大きく設定する必要性は認められない。**Fig. 9** の条件では、 $b=0.80 L$ 程度でほぼ格子の誤差のモアレプロファイルへの影響の緩和は飽和しているものと考えられる。

5. まとめ

本稿では、次のことを行ない、明らかにした。

- 1) 従来の解析法では定義することのできなかった誤差をもつ格子の数学的モデルを提案した。
- 2) この格子モデルを用い、誤差をもつ格子によるモアレ縞を考え、その解析法の正しさを実験結果との比較により検証した。
- 3) この解析法により、格子のもつ誤差のモアレプロファイルへの影響を検討した。結果において、本稿で取り扱った有限の面積をもつ開口を通して検出されたモアレプロファイルは、格子の誤差のみならず、開口の形状によっても大きく影響されることがわかった。さらに、開口形状のモアレプロファイルへの基本的な影響について解析を行ないその寸法決定法について検討した。

最後に、研究の開始時より、結果の検討に至るまで、熱心にご指導くださった大阪大学工学部応用物理学科、横関俊介先生に心より感謝いたします。

文 献

- 1) 高崎 宏：“モアレ縞とその応用”，機械の研究，26(1974) 499-503.
- 2) G. Oster: *The Science of Moiré Patterns* (Edumund Scientific Co., New Jersey, 1969).
- 3) 鈴木正根, 金谷元徳, 鈴木喜義, 関 一寿, 松岡 猛: “モアレトポグラフィ計測法Ⅱ”, 画像技術, 6, 12 (1975) 35-46.
- 4) 松永輝雄: “高精密測定用光学式エンコーダ”, 精密機械, 51 (1985) 722-729.
- 5) 加藤和典: “モアレ法による塑性ひずみの測定について”, 日本機械学会誌, 79 (1976) 1151-1157.
- 6) 植村恒義: 画像計測入門 (昭晃堂, 東京, 1980) pp. 72-92.
- 7) 吉田庄一郎: “光電式エンコーダ”, 高精度, 3, 3 (1971) 28-36.
- 8) J. Guild: *The Interference Systems of Crossed Diffraction Gratings* (Oxford Clarendon Press, London, 1956) pp. 101-128.
- 9) S. Yokozeki: “Moiré fringe profile prediction method and its application to fringe sharpening,” Appl. Opt., 17 (1978) 2541-2547.
- 10) K. Patorski, S. Yokozeki and T. Suzuki: “Moiré profile prediction by using Fourier series formalism,” Jpn. J. Appl. Phys., 15 (1976) 443-456.
- 11) 横関俊介: “モアレ縞の鮮鋭化”, 光学, 5 (1976) 125-131.
- 12) S. Yokozeki: “Geometric parameters of moiré fringes,” Appl. Opt., 15 (1976) 2223-2227.
- 13) L. Wronkowski: “An analysis of the effect of diaphragm shape on the contrast of filtered moiré fringes,” Opt. Acta, 30 (1983) 85-95.
- 14) 久保田広: 波動光学 (岩波書店, 東京, 1971) pp. 75-76.