

光のコヒーレンス 5

自由電磁場の量子論・コヒーレンスの量子論 (1)

上 西 克 二

東北大学科学計測研究所 〒980 仙台市片平 2-1-1

(1986年3月6日受理)

Coherence of Light 5

Quantum Theory of the Free Electromagnetic Field
and Quantum Theory of Coherence (1)

Katsuji KAMINISHI

Research Institute for Scientific Measurements, Tohoku University,
2-1-1, Katahira, Sendai 980

1. はじめに

光は波であると同時に粒子である。光のコヒーレンスは、光の波としての性質に重点を置いた見方からすれば、可干渉性、すなわち、振幅と位相の揃い具合、または、揺らぎの度合いを示すものである¹⁾。ところが、実際の光検出過程では、波そのものを観測するのではなく、光電変換や光化学変化など光の粒子としての振舞いを利用している。とくに、微弱光や高速現象などの場合のように、検出器の帯域幅限界に比べて光子数の検出頻度が小さい場合には、つねに粒子としての光子を観測することになる。光子の粒子性としての性質に重点を置いて光のコヒーレンスを論ずるならば、4次元の時空間における光子場の揺らぎ具合、すなわち、着目する時空間点における光子の生成・消滅と光子統計および各点間の光子相関等を考えることを意味する。このような問題に対する正しい議論は、光の場を含めた全物理系の量子力学的取扱いによって可能となるので、量子電気力学に基づく光のコヒーレンス理論を必要とする。

Diracによれば²⁾、あらゆる物理系は、量子力学的には状態ベクトルで完全に記述できる。一方、状態ベクトルは、考えている物理系全体の Hamiltonian がわかれば一義的に決定される。したがって、量子論的に光のコヒーレンスを議論するとき最初に要求されることは、光

源、光の場、検出器、原子や熱浴等光の場に影響を及ぼす系自身と、それらの間の相互作用の Hamiltonian を知ることである。とはいっても、すべてを含む複雑な系をつねに取り扱う必要があるとは限らず、そのなかでも他に比べて作用が小さく無視できる項は初めから落としてもよいし、全系を同時に取り扱う必要がない場合には部分系から出発すれば十分である。

系の物理的性質を調べるために、何かを観測しようとしたとき予測される値は、その物理量に対応するエルミート演算子(オブザーバブルと呼ばれる)の状態ベクトルの固有値(または期待値)として与えられるが、期待値は具体的な状態ベクトルの表示や方程式の表示、計算方法には依存しない^{*1)}。しかし、現実問題としては、具体的に観測すべき量が決められれば、それに応じていちばんよい、または、そうするほうが好ましいという表示や計算方法が必然的に決まってしまう場合が多く、対象としている問題が何であるかによって種々の表示が使われることになる。このような事情から、以下その時々議論している具体的な物理内容に応じて種々の量子力学的記述法を使うが、紙数の関係上これら量子力学の基礎は^{2,3)}既知として扱う。また、詳細な式の導出は避けて、結果と

*1) 座標表示, 運動量表示, シュレーディンガー表示, ハイゼンベルグ表示, 相互作用表示, 波動関数, 密度行列, 光子数状態, 位相状態, コヒーレント状態など。

その物理的意味をおもに論ずることとする。

以上の観点から以下順次、自由電磁場の量子論、コヒーレンスの量子論、光と原子の相互作用、光検出および光子統計・光子相関、と非相対論的取扱いで量子力学的光のコヒーレンス論を進める。内容としては、比較的基礎的なものを中心に置き、実験や応用に関連するもの⁴⁾を扱って、おもに純理論的美しさに関与する事項は追及しないほか、レーザーの量子論⁵⁾、非線形光学⁶⁾、最近研究が活発に行なわれているスクウィズド状態 (squeezed state)⁷⁾ 等には触れない。もちろん、光のコヒーレンスに関連する問題の多くは古典論で十分説明できるものであり^{1,8-10)}、必要以上に複雑な量子力学的取扱いをすることは意味がないが、量子力学的に取り扱って素直に理解できるものはとくに断りなく量子論で話を進める。

2. 自由電磁場の量子論

2.1 量子化された自由電磁場

いま、一辺が L の立方体の真空中にある周期的境界条件を満足する量子化された自由電磁場を考えよう。場は Maxwell の方程式 (MKS 単位を用いる) に従うので、電荷のない電磁場 (スカラーポテンシャル $\phi=0$) においては、量子化された電場ベクトル $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ と磁場ベクトル $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ は、ベクトルポテンシャル $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ がわかれば、関係式

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t), \quad \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

から容易に導くことができる。ここで $\hat{}$ は量子化された Hilbert 空間の演算子を示す記号である。任意に選べる gauge として Coulomb gauge $\text{div} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = 0$ を採ると、場の方程式は、結局、波動方程式

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2)$$

で表わされる。ここで、 c は光速である。場には周期的境界条件が課されているので、方程式 (2) の解は、最終的には平面波モード展開を使って、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \\ = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, s} \left[\left(\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}, s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \text{H.c.} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

と求められる。ここで H.c. は、第 1 項のエルミート共役項を意味する。 \mathbf{k} は波数ベクトルで成分 $k_i = (2\pi/L)n_i$ ($n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; i = 1, 2, 3$) からなり、 $\omega_{\mathbf{k}} = ck$ とベクトルの絶対値 k と角周波数 $\omega_{\mathbf{k}}$ は比例している。 $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, s}$ ($s = 1, 2$) は、モード \mathbf{k} に対する互いに直交し、かつ、

光の進行方向 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$ に対し横成分をなし、一般には複素数の右手系の一対の単位偏光ベクトルである。 $*$ を複素共役記号、 δ_{ij} を Kronecker の δ 記号として、次の関係式を満たすものとして定義される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, s} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, s'}^* &= \delta_{ss'}, \\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, s} &= 0, \\ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 1} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 2} &= \mathbf{k}/k \equiv \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \quad (4)$$

これらの関係式は $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, s}$ に関してユニタリー変換を行っても成立するので、(3) 式の偏光としては、互いに直交した組合せ、たとえば、 z 軸に進む光に対して x - y 直線偏光とか、左・右円偏光の組合せであれば任意に選んでよく、当面の系にいちばん都合のよい偏光の組合せを考えればよいことを意味する。また、(3) 式中の $\hat{a}_{\mathbf{k}, s}$ とそのエルミート共役 $\hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger$ はモード \mathbf{k} 、偏光指数 s をもつ光子の消滅と生成演算子で、交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}, s}, \hat{a}_{\mathbf{k}', s'}^\dagger] &\equiv \hat{a}_{\mathbf{k}, s} \hat{a}_{\mathbf{k}', s'}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}', s'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, s} = \delta_{ss'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}, s}, \hat{a}_{\mathbf{k}', s'}] &= [\hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}', s'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

を満足する。ここで、 δ^3 は 3 次元の各成分に対する Kronecker の δ 記号である。 $\hat{a}_{\mathbf{k}, s}$ はエルミート演算子ではないので直接オブザーバブルにはならないが、光の場のオブザーバブルと密接な関連をもつことが 3 節で明らかとなる。

式 (1), (3) から、 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ は

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \\ = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, s} \left[i \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}, s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \text{H.c.} \right], \\ \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \\ = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, s} \left[i \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}, s} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \text{H.c.} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

と導かれる。具体的なベクトル $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ の表式 (3), (6) を用いる代わりに、もっと一般的に電磁場を記述するベクトル $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ を

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, s} f(\omega_{\mathbf{k}}) \hat{a}_{\mathbf{k}, s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \text{H.c.} \\ &\equiv \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (7)$$

と定義することができる。ここで、 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ は上記 3 ベクトルの任意の一つを表わし、 $f(\omega_{\mathbf{k}})$ はゆっくりと変化する関数であり、 $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ は古典論での解析的信号に対応するもので、その性質は表 1 に示される。

場のベクトル $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ を構成している消滅・生成演算子は (5) に示されるようにすべてが交換するとは限らないので、ベクトルの各成分も交換しない可能性がある。指数関数の無限和 (または積分) が δ 関数になることと

表1 演算子 $\hat{V}(\mathbf{r}, t)$ と $\hat{V}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ の性質

	$\hat{V}(\mathbf{r}, t)$	$\hat{V}^\dagger(\mathbf{r}, t)$
関与する演算子	消滅	生成
周波数	正	負
複素 t 平面での解析性	下半面	上半面

(4)から導かれる関係式 $\sum_{s=1}^2 (\epsilon_{k,s})_i (\epsilon_{k,s}^*)_j = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ を用いて (5), (6) から電磁ベクトル各成分の時空交換関係を求めると,

$$[\hat{E}_i(\mathbf{r}, t), \hat{E}_j(\mathbf{r}', t')] = [\hat{B}_i(\mathbf{r}, t), \hat{B}_j(\mathbf{r}', t')] \\ = i \frac{\hbar c}{\epsilon_0 L} \left[\frac{\partial_{ij}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} \right] \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (8)$$

$$[\hat{E}_i(\mathbf{r}, t), \hat{B}_j(\mathbf{r}', t')] \\ = -i \frac{\hbar}{\epsilon_0} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial t} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'),$$

を得る。ただし, ϵ_{ijk} は反対称単位テンソル (antisymmetric unit tensor) であり, $\Delta(\mathbf{r}, t)$ は

$$\Delta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} [\delta(r+ct) - \delta(r-ct)] \quad (9)$$

である。これらの式より4次元時空間の光円錐 $r = \pm ct$ 上にない任意の2点のあらゆる場のベクトル各成分は必ず交換すること, すなわち, 同時に観測可能である。式(8), (9)の関数の性質を検討すると光円錐上の成分でもかなりの成分が交換すること, とくに, 時空間の同一点上の微小拡がり空間の平均値を観測することを考えた場合には, 各ベクトルのあらゆる成分が互いに交換して実質的に場のすべてのベクトル $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ が不確定性なしに同時に確定できることがわかる。

ここで, L が波長 λ よりはるかに大きく無限大に近づく極限を考えよう。この場合には, 展開したモード分布が密集した状態になるので, 単位体積当りのモード密度 $m(\omega)$ を考えることができる。すなわち, $|\mathbf{k}|$ から $|\mathbf{k}| + \Delta|\mathbf{k}|$ の範囲内にある単位体積当りの一つの偏光に対するモード数 $m(k)$ は, \mathbf{k} の3次元微分を d^3k として,

$$m(k)d^3k = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3 \\ = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} d^3k \quad (10)$$

であるから, 周波数 ω だけに着目するときには, 二つの偏光成分を含めて,

$$m(\omega)d\omega = 2 \cdot \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} dk = \frac{8\pi\omega^2}{(2\pi c)^3} d\omega \quad (11)$$

とモード密度 $m(\omega) = (8\pi\omega^2)/(2\pi c)^3$, または, 周波数 ν で表わせば $m(\nu) = 8\pi\nu^2/c^3$ が求められる。また, 式(10)から次のモードに関する和と積分の変換関係式が得られる。

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} () = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d^3k () \quad (12)$$

2.2 Hamiltonian と光子数状態

量子化された電磁場の Hamiltonian (エネルギー) は,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{L^3} \left[\epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r}, t) \right] d^3x \quad (13)$$

と書ける。ここで d^3x は \mathbf{r} の3次元微分である。式(6)を(13)式に代入し(5)を使って整理すると

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, s} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\mathbf{k}}, \quad (14)$$

を得る。ここで, エルミートの光子数演算子 $\hat{n}_{\mathbf{k}, s}$

$$\hat{n}_{\mathbf{k}, s} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, s}, \quad (15)$$

を定義すると, (14)は,

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\hat{n}_{\mathbf{k}, s} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\mathbf{k}} \quad (16)$$

となる。 $\hbar \omega_{\mathbf{k}}$ はモード \mathbf{k} の光子1個のエネルギーであり, $1/2$ の項は零点エネルギーを表わす。零点エネルギーは, 原子準位に関する Lamb shift など場固有の真空揺らぎとの相互作用¹³⁾を考えるとき以外には無視してよく, 以下では(16)式の $1/2$ の項は落として取り扱うことにする。そのときには, Hamiltonian は全空間に存在する種々の光子のエネルギーの和から成っている。 $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ は, モード \mathbf{k} , 偏光 s 成分の光子数演算子であるので, 空間に存在する全光子数演算子 \hat{n} は, 次式で定義される。

$$\hat{n} = \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{n}_{\mathbf{k}, s}. \quad (17)$$

以上のように光子数演算子が電磁場を表わす一つの重要な物理量になっていることから, 光子数を直接量子数とする光子数状態 (number state; Fock 状態とも呼ぶ) を考えよう。 $\hat{n}_{\mathbf{k}, s}$ の固有状態を $|n_{\mathbf{k}, s}\rangle$, その固有値を $n_{\mathbf{k}, s}$ とすると,

$$\hat{n}_{\mathbf{k}, s} |n_{\mathbf{k}, s}\rangle = n_{\mathbf{k}, s} |n_{\mathbf{k}, s}\rangle \quad (18)$$

である。 $\{n\}$ を全モードの占める光子数の組を表わす記号とすると, 全系の量子状態 $|\{n\}\rangle$ は, 各モードの状態の直積として

$$|\{n\}\rangle \equiv |n_{k_1, s_1}, n_{k_2, s_2}, \dots\rangle = \prod_{\mathbf{k}, s} |n_{\mathbf{k}, s}\rangle, \quad (19)$$

と表わされる。また, (17)~(19)より

$$\hat{n} |\{n\}\rangle = \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{n}_{\mathbf{k}, s} |\{n\}\rangle = \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} |\{n\}\rangle$$

$$=n|n\rangle \quad (20)$$

となって, $|n\rangle$ は全光子数演算子 \hat{n} の固有関数である. 光子数状態に生成・消滅演算子を作用させたときの効果は, (5), (15), (18), (19)式より計算できて

$$\begin{aligned} & \hat{a}_{k,s}^\dagger |n_{k_1,s_1}, \dots, n_{k,s}, \dots\rangle \\ &= \sqrt{(n_{k,s}+1)} |n_{k_1,s_1}, \dots, n_{k,s}+1, \dots\rangle \\ & \hat{a}_{k,s} |n_{k_1,s_1}, \dots, n_{k,s}, \dots\rangle \\ &= \sqrt{n_{k,s}} |n_{k_1,s_1}, \dots, n_{k,s}-1, \dots\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

を得る. したがって, 任意の光子数状態は

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \prod_{k,s} \frac{(\hat{a}_{k,s}^\dagger)^{n_{k,s}}}{\sqrt{n_{k,s}!}} |0\rangle \\ &\equiv \prod_{k,s} \frac{(\hat{a}_{k,s}^\dagger)^{n_{k,s}}}{\sqrt{n_{k,s}!}} |\text{vac}\rangle \end{aligned} \quad (22)$$

と書くことができる. ここで, $|0\rangle = |\text{vac}\rangle$ はすべてのモードの光子が存在しない真空状態 (vacuum state) を表わす. 式(22)から交換関係(5)をつかって正規直交性

$$\langle n | m \rangle = \prod_{k,s} \delta_{n_{k,s}, m_{k,s}} \quad (23)$$

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1 \quad (24)$$

を証明できる. ゆえに, 光子数状態は完全系をなすことがわかり, 以後行なう種々の状態の計算で基底 (base) として用いることができる.

2.3 量子化された場の種々の物理量

2.3.1 エネルギー

場のエネルギー (Hamiltonian) は, すでに(16)式で与えた. 前述のごとく零点エネルギーを除いて考えることができる場合には次式を使ってよい.

$$\hat{H} = \sum_{k,s} \hat{n}_{k,s} \hbar \omega_k \quad (16')$$

2.3.2 運動量

古典的な電磁場の運動量密度は Poynting ベクトルの $1/c^2$ で与えられるが, 量子力学的な全運動量 $\hat{\mathbf{P}}$ を考えるときには, 一般には $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ と $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ が交換しないことから古典論を多少修正して電場と磁場を対称な形で導入してエルミート演算子になるようにすることが重要である.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{L^3} d^3x [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)] \\ &= \sum_{k,s} \hbar \mathbf{k} \hat{n}_{k,s} \end{aligned} \quad (25)$$

計算の途中で(14)式同様 $1/2$ の項が出るが, この場合は意識的に落とさなくても (繰込みを考えなくても) モード \mathbf{k} に関する和に正と負が含まれるので自動的に消去される. 式(16), (25)より, 交換関係 $[\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}] = 0$ が導かれるので, 全運動量 $\hat{\mathbf{P}}$ は運動の不変量である. また, 式

(25)は個々の光子が運動量 $\hbar \mathbf{k}$ をもっていることを意味する. このことは, レーザー光でもって原子の運動量を減らし併進運動を凍結する¹²⁾のに利用できる理由である.

2.3.3 角運動量

点 \mathbf{r}_0 に関する全角運動量 $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0, t)$ は

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0, t) &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{L^3} d^3x (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &\quad \times [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) - \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)] \\ &\equiv \hat{\mathbf{J}}_S + \hat{\mathbf{J}}_L \end{aligned} \quad (26)$$

である. 第1項は, \mathbf{r}_0 を含まない内部角運動量 $\hat{\mathbf{J}}_S$ (スピン) を表わす項であり, 第2項は全角運動量のうち, \mathbf{r}_0 を含む軌道角運動量 $\hat{\mathbf{J}}_L$ を表わす項である. スピン $\hat{\mathbf{J}}_S$ は, 具体的に計算できて,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}_S &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{L^3} d^3x [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s,s'} i \hbar (\epsilon_{k,s} \times \epsilon_{k,s'}^*) \left(\hat{a}_{k,s}^\dagger \hat{a}_{k,s} + \frac{1}{2} \delta_{ss'} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

となる. ここで, 直交する偏光状態として右回り円偏光 $\epsilon_{k,1}$ と左回り円偏光 $\epsilon_{k,-1}$ を選ぶと,

$$\epsilon_{k,s} \times \epsilon_{k,s}^* = -is \delta_{ss'}, \quad (28)$$

が成立するので, (27)は次のようになる.

$$\hat{\mathbf{J}}_S = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} (\hat{n}_{\mathbf{k},1} - \hat{n}_{\mathbf{k},-1}). \quad (29)$$

ここで, $\hbar \mathbf{k}$ は右回りの1個の光子の角運動量である. したがって, 全スピン角運動量 $\hat{\mathbf{J}}_S$ は, 右回りと左回りの光子数の差で表わされ, 運動の不変量であることがわかる. スピンのベクトル \mathbf{k} 上への射影 (ヘリシティ \hat{H}_e) は,

$$\hat{H}_e = \sum_{\mathbf{k}} \hbar (\hat{n}_{\mathbf{k},1} - \hat{n}_{\mathbf{k},-1}), \quad (30)$$

となって, 光子のスピン角運動量の固有値は $\pm \hbar$, すなわち, 光子のスピンは1である. 光子のスピンが1であるにもかかわらず, ± 1 だけで0とならないのは光子の質量がゼロであることに起因する³⁾. 矩形の箱の境界条件下での軌道角運動量 $\hat{\mathbf{J}}_L$ については多少複雑な状況にある¹³⁾が, 特殊な問題なので省略する.

2.3.4 位相

量子力学的に電磁場の位相を定義することはそれほど単純ではない. 古典論との対応性で位相 ϕ をオブザーバブルな演算子として議論すると, たとえば Heitler の教科書に見られるような結果¹⁴⁾が導かれるが, すぐに明らかになるように平均の光子数 $\langle n \rangle$ が十分に1より大きいときだけ正しい. 以下の議論を単純にするために単一モードで考えよう.

位相 ϕ そのものではなく、 $e^{\pm i\phi}$ 全体を演算子とする指数関数演算子 \hat{E}_{\pm} を場の生成・消滅演算子 $\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}$ と関係付けて次のように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\hat{n}+1} \hat{E}_-, \\ \hat{a}^{\dagger} &= \hat{E}_+ \sqrt{\hat{n}+1}. \end{aligned} \tag{31}$$

さらに、 \hat{E}_+, \hat{E}_- を使って定義されるエルミート演算子 \hat{C}, \hat{S}

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \frac{1}{2}(\hat{E}_- + \hat{E}_+), \\ \hat{S} &= \frac{1}{2i}(\hat{E}_- - \hat{E}_+) \end{aligned} \tag{32}$$

を導入する。 \hat{C} と \hat{S} はオブザーバブルであり、容易に想像できるように、位相表示をとったとき固有値 $\cos \phi$ と $\sin \phi$ 、その固有状態 $|\cos \phi\rangle, |\sin \phi\rangle$ からなる位相状態 (phase state) を与えるコサインまたはサイン関数の性質をもつ演算子である。しかし、このような表示はそれほど実用的ではない。交換関係(5)と(31)から、 \hat{C}, \hat{S} と \hat{n} との交換関係を計算すると

$$\begin{aligned} [\hat{C}, \hat{n}] &= i\hat{S}, \\ [\hat{S}, \hat{n}] &= -i\hat{C}, \end{aligned} \tag{33}$$

を得る。ゆえに、これらの期待値の間には

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{C})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} \langle \hat{S} \rangle^2, \\ \langle (\Delta \hat{S})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2 \end{aligned} \tag{34}$$

の不確定関係があり、これを書き換えれば

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle \frac{\langle (\Delta \hat{C})^2 \rangle + \langle (\Delta \hat{S})^2 \rangle}{\langle \hat{C} \rangle^2 + \langle \hat{S} \rangle^2} \geq \frac{1}{4} \tag{35}$$

なる不確定関係が得られる。正しい不確定関係(35)は、位相自身がオブザーバブルと考えて古典論の類推から導かれた式¹⁴⁾ $\langle (\Delta n)^2 \rangle \langle (\Delta \phi)^2 \rangle \geq 1/4$ とは異なっている。しかし、古典論の極限では同じ結果になることを次に示そう。

次節3.の結果を先取りすることになるが、古典場との対応性が強く、場を表わす複素変数 $v = \langle n \rangle^{1/2} e^{i\phi}$ を固有値とするコヒーレント状態 $|v\rangle$ に対するいくつかの計算結果を次に示す。

$$\begin{aligned} \langle \hat{C} \rangle_v &= \langle n \rangle^{1/2} e^{-\langle n \rangle} \phi_1(\langle n \rangle) \cos \phi, \\ \langle \hat{S} \rangle_v &= \langle n \rangle^{1/2} e^{-\langle n \rangle} \phi_1(\langle n \rangle) \sin \phi, \\ \langle (\hat{C}^2 + \hat{S}^2) \rangle_v &= 1 - \frac{1}{2} e^{-\langle n \rangle}, \\ \langle (\hat{C}\hat{S} - \hat{S}\hat{C}) \rangle_v &= \frac{1}{2} i e^{-\langle n \rangle}. \end{aligned} \tag{36}$$

ここで

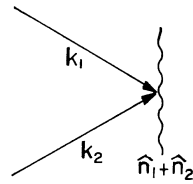


図1 二光束干渉

$$\begin{aligned} \phi_1(\langle n \rangle) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^{\nu}}{\nu! (\nu+1)!} \\ &\rightarrow \begin{cases} 1 + \langle n \rangle / \sqrt{2} & (\langle n \rangle \rightarrow 0), \\ e^{\langle n \rangle} / \langle n \rangle & (\langle n \rangle \rightarrow \infty). \end{cases} \end{aligned} \tag{37}$$

これらの結果から、光子数 $\langle n \rangle \gg 1$ (およそ10以上) を満足するときには古典論の近似が成り立ち、古典的位相 ϕ を考えてよく、 \hat{C} と \hat{S} はその $\cos \phi$ と $\sin \phi$ に帰着することがわかる。また、少なくとも $\langle n \rangle \sim 1$ では、定量的に古典論の近似からの差異が認められることから、光子数が1以下の電磁場の位相の問題を正しく議論するには、演算子 \hat{C}, \hat{S} を使った量子力学的取扱いが必要である。このような系での具体的な位相のイメージは判然とはしないが、あえて位相と呼ぶならば、不確定関係(35)は光子数と位相を同時に正確には決定できないことを示している。

次に、図1に示すように2モードが存在する二光束干渉では二つの波の位相差を測定することが問題となる。位相表示では \hat{C} と \hat{S} の固有値がコサイン関数とサイン関数になることから、位相差の演算子 $\hat{C}_{12}, \hat{S}_{12}$ の定義として、

$$\begin{aligned} \hat{C}_{12} &\equiv \hat{C}_1 \hat{C}_2 + \hat{S}_1 \hat{S}_2, \\ \hat{S}_{12} &\equiv \hat{S}_1 \hat{C}_2 - \hat{S}_2 \hat{C}_1 \end{aligned} \tag{38}$$

を選ぶことは自然である。全光子数 $\hat{n} = \hat{n}_1 + \hat{n}_2$ との交換関係を計算すると、

$$[\hat{C}_{12}, \hat{n}] = [\hat{S}_{12}, \hat{n}] = 0 \tag{39}$$

が得られて、いかなる条件下でも位相差と光子数は同時に正しく確定できることがわかる。言い換えるならば、光子数(強度)を測定することによって厳密な位相差(干渉縞)が決定可能なことを意味する。事実、十分に減光した $\langle n \rangle < 1$ 独立した二つのレーザー光間の干渉が調べられた¹⁵⁾。各表示に対する光子数と位相の関係を表2にまとめて示した。

2.3.5 場の真空揺らぎ

2.2節に示したように、量子力学的取扱いでは場の光子数演算子の固有値がゼロとなるときでも零点エネルギーが存在するという古典論とは異なる結果を生じる。この非古典的效果について多少考察して見よう。

表 2 種々の表示における光子数と位相

使用する状態	光子数	位相
光子数状態 $ n\rangle$	$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle=0$	$\langle(\Delta\hat{C})^2\rangle=1/2$
位相状態 $ \cos\phi\rangle$	$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle=\infty$	$\langle(\Delta\hat{C})^2\rangle=0$
コヒーレント状態 $ \nu\rangle$	$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle=\langle\hat{n}\rangle$	(36)式
位相差状態 $ \cos\phi_{12}\rangle$	$\langle(\Delta\hat{n})_{\text{tot}}^2\rangle=0$	$\langle(\Delta\hat{C}_{12})^2\rangle=0$

場に光子がない真空状態 $|\text{vac}\rangle = |0\rangle$ の生成・消滅演算子の期待値は, (21), (22) より

$$\langle 0 | \hat{a}_{k,s} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{k,s}^\dagger | 0 \rangle = 0 \quad (40)$$

となるので, 場の演算子 $\hat{F}(\mathbf{r}, t)$ に関する期待値は, (7), (11) を使って

$$\langle \hat{F}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{vac}} \equiv \langle 0 | \hat{F}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle = 0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_{\text{vac}} &= \langle 0 | \hat{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{F}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, s} |f(\omega\mathbf{k})|^2 \\ &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k |f(\omega\mathbf{k})|^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (42)$$

を得る. ゆえに, 場の揺らぎ $\langle(\Delta\hat{F})^2\rangle_{\text{vac}}$ は

$$\langle(\Delta\hat{F})^2\rangle_{\text{vac}} = \langle\hat{F}^2\rangle_{\text{vac}} - \langle\hat{F}\rangle_{\text{vac}}^2 = \langle\hat{F}^2\rangle_{\text{vac}} \neq 0 \quad (43)$$

と求まる. (42), (43) は基本的には無限大に発散する量であるが, 実際に揺らぎを観測するときには, 検出によって時空の有限要素の平均値を見ることになるので発散せず有限の値となる. たとえば, 一片が d 程度の大きさの空間と時間 $T=d/c$ の平均を考えると, 場の単位体積当りの平均光子数を $\langle n \rangle$ として電場 $\hat{E}(\mathbf{r}, t)$ に関する信号対雑音比 $\langle\hat{E}^2\rangle_{\text{source}}/\langle\hat{E}^2\rangle_{\text{vac}}$ を計算すると $\sim 8\pi^2 d^4 \langle n \rangle / \lambda$ を得る. $d \sim \lambda$ 程度の小さい検出器の場合には, 可視域のあらゆる熱的光源では $\langle n \rangle < 1$ なので体積 $4\pi^2 d^3$ 中の光子数は 1 よりずっと小さく, 信号の大きさに対して揺らぎのほうはずっと大きいことを意味する. いずれにしても, われわれが普通用いる光検出器では, 後述のごとく原子内電子の光の吸収による直接遷移過程を利用するので, 場の真空揺らぎを直接観測することはない. 原子単位の Lamb shift¹¹⁾ や, レーザー発振とかパラメトリック増幅器で量子雑音源としての自然放出⁶⁾ 等を通じて間接的に場の真空揺らぎと電子の相互作用を観測しているのである.

3. コヒーレンスの量子論

3.1 電磁場のコヒーレント状態

電磁場を量子化した場合の特殊性, 古典論との対応性および種々の物理量の表式とその性質はすでに明らかになった. 続いて, これらの結果に基づいた光のコヒーレ

ンス論を展開するが, 議論を単純にするため最初単一モードを扱いその後多モードを考える. まず最初にコヒーレント状態を定義し, それが古典論的な波動に対応する状態ベクトルであることを示す.

式(7)から明らかのように, 古典論的には消滅演算子 \hat{a} は電磁波の振幅に, 光子数演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ は光強度に対応している. 二つの演算子は古典量との対応性をもつ点では共通であるが, \hat{n} はオブザーバブルであるのに対し, \hat{a} は非エルミート演算子で直接観測可能量ではない. したがって, \hat{a} に対する固有値 ν と固有ベクトル $|\nu\rangle$ (コヒーレント状態: coherent state と呼ぶ)

$$\hat{a}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle, \quad \langle\nu|\hat{a}^\dagger = \nu^*\langle\nu| \quad (44)$$

を考えたとき, ν は複素数となり, 一方, $|\nu\rangle$ は光子状態 $|n\rangle$ とは違って一般には完全系を構成する保障はない. 式(44)で定義されるコヒーレント状態の性質を調べるために, $|n\rangle$ による展開を実行すると

$$|\nu\rangle = e^{-|\nu|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (45)$$

を得る. ただし, 式の導出途中で現われる規格化上任意に選べる位相因子 $e^{i\phi}$ は 1 と選んだ. 式(45)から, コヒーレント状態はあらゆる光子数状態の和として表わされ, いかなる状態もミスすることなくすべて含まれていることがわかる. しかし, すべてが等価に取り込まれているわけではなく, コヒーレント状態の光子数分布関数 $p(n) = |\langle n|\nu\rangle|^2$ は

$$p(n) = \frac{|\nu|^{2n}}{n!} e^{-|\nu|^2} \quad (46)$$

と計算される. いま, 場の平均光子数 $\langle n \rangle$ は

$$\langle n \rangle = \langle\nu|\hat{a}^\dagger \hat{a}|\nu\rangle = |\nu|^2 \quad (47)$$

であるから, (46)は

$$p(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle} \quad (46')$$

と書ける. これからコヒーレント状態の光子数分布は Poisson 分布であること, および真空状態でない ($\nu \neq 0$) 限りは $p(n) \neq 0$ であることがわかる. 実質的に古典場と見做せる $\langle n \rangle \gg 1$ のときの分布は図 2 に示され, おおのの平均値と半値幅が同じ値の Gauss 分布とほぼ一致している.

次に, 波の複素振幅の揺らぎ $\langle(\Delta\hat{a})^2\rangle$ を(44)から求めると

$$\langle(\Delta\hat{a})^2\rangle = \langle\hat{a}^2\rangle - \langle\hat{a}\rangle^2 = \nu^2 - \nu^2 = 0 \quad (48)$$

を得て, コヒーレント状態では複素振幅の揺らぎはないことがわかる. 一方, 調和振動子の類似性から量子力学的に正準共役 (canonical conjugate) な演算子 \hat{q}, \hat{p}

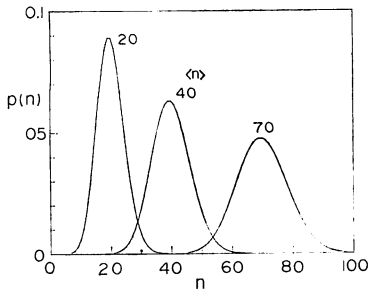


図2 平均光子数 $\langle n \rangle = 20, 40, 70$ に対する Poisson 分布関数 $p(n)$

$$[[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar]$$

$$\hat{q} \equiv \left(\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}\right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} \equiv i\left(\frac{\hbar\omega\epsilon_0}{2}\right) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (49)$$

を導入し、それらの揺らぎを(44)から計算すると

$$\langle v | (\Delta \hat{q})^2 | v \rangle = \frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}, \quad \langle v | (\Delta \hat{p})^2 | v \rangle = \frac{\hbar\omega\epsilon_0}{2} \quad (50)$$

が得られともに正の有限値である。(50)を書き換えると

$$\sqrt{\langle (\Delta \hat{q})^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle} = (1/2)\hbar \quad (51)$$

となって、コヒーレント状態は最小不確定状態になっていることがわかる。これは、場の平均光子数 $\langle n \rangle$ がゼロでない ($v \neq 0$) 励起状態にあるにもかかわらず、真空状態 $|\text{vac}\rangle = |v=0\rangle$ と同じ最小不確定性を保っているという点で重要である。すなわち、コヒーレント状態の wave packet は、伝播中に波形崩れを起こさずいつも一定の広がりを保持し続けていることを意味し、複素振幅の揺らぎがない事実とあわせてコヒーレント状態は古典論的な電磁場の波動を表現するのに最適な状態となっている。あらゆる光検出器は光子を吸収する作用をもつが、(44)より消滅演算子の作用によってコヒーレント状態は変化しない性質をもつことも古典的対応性のイメージに合致している。

式(22)を(45)に代入し、互いに交換しない演算子 \hat{A} , \hat{B} に対する関係式 $e^{(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A}, \hat{B}]}$ と(5)を使って $|v\rangle$ の具体的な関数形を計算すると次式を得る。

$$|v\rangle = e^{v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a}} |0\rangle. \quad (52)$$

この式から、コヒーレント状態 $|v\rangle$ は演算子 $\hat{D}(v)$

$$\hat{D}(v) \equiv e^{v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a}} \quad (53)$$

の作用によって真空状態 $|\text{vac}\rangle = |0\rangle$ が変位した状態であることがわかる。すなわち、 $\hat{D}(v)$ は最小不確定性を保ったまま状態を変位させるという重要な性質をもち、変位演算子 (displacement operator) と呼ばれる。 $\hat{D}(v)$ のその他の性質を知っておくことは、コヒーレント状態の性質もわかるので純物理学的に重要である。また、

2.3 節に示したように、物理量は定数係数を除いて \hat{a} , \hat{a}^\dagger だけを含む演算子で表わされ、一方、コヒーレント状態も真空状態と \hat{a} , \hat{a}^\dagger だけを含む変位演算子であるので、種々の物理量のコヒーレント状態に対する期待値を計算するときにも役に立つ。その性質は以下の4項目にまとめられる。

(a) ユニタリー性

$$\hat{D}^\dagger(v)\hat{D}(v) = \hat{D}(v)\hat{D}^\dagger(v) = 1, \quad \hat{D}(-v) = \hat{D}^\dagger(v). \quad (54)$$

(b) 変位性

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(v)\hat{a}\hat{D}(v) &= \hat{a} + v, & \hat{D}^\dagger(v)\hat{a}^\dagger\hat{D}(v) &= \hat{a}^\dagger + v^*, \\ \hat{D}^\dagger(v)\mathcal{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)\hat{D}(v) &= \mathcal{F}(\hat{a} + v, \hat{a}^\dagger + v^*). \end{aligned} \quad (55)$$

(c) 再生性

$$\hat{D}(v)\hat{D}(v') = e^{i\phi'}\hat{D}(v+v'). \quad (56)$$

(d) 直交性

$$\text{Tr}[\hat{D}(v)\hat{D}^\dagger(v')] = \pi\delta^2(v-v'). \quad (57)$$

ここで、 $\mathcal{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ は \hat{a} と \hat{a}^\dagger の関数、 $\phi' = (1/2)(v v'^* - v^* v')$ は純虚数の位相因子、 Tr は対角和 (trace) 記号、 $\delta^2(\gamma)$ は複素数 γ に対して実数部および虚数部おのおの δ 関数の積 $\delta(\text{Re } \gamma)\delta(\text{Im } \gamma)$ である。また、(56) から $\hat{D}(v)|v'\rangle = e^{i\phi'}|v+v'\rangle$ となることは自明である。

3.2 コヒーレント状態の生成と時間変換

3.2.1 古典的電流により発生する電磁場の状態

演算子としてではなく、普通の電流密度ベクトル $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ で表わされる古典的な電流が生成する電磁場がいかなる状態となるかを検討しよう。相互作用 Hamiltonian $\hat{H}_I(t)$ は、Maxwell の方程式と(3)より

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= -\int_{L^3} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) d^3x \\ &= i\hbar[-u^*(t)\hat{a} + u(t)\hat{a}^\dagger] \end{aligned} \quad (58)$$

と求められる。ここで、 $u^*(t)$ は

$$u^*(t) = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{L^{3/2}} \left(\frac{1}{2\omega\epsilon_0}\right)^{1/2} \int_{L^3} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3x \quad (59)$$

である。相互作用が働く系で状態 $|\psi(t)\rangle$ を調べるには、相互作用表示を用いると容易に求められる

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, 0)|\psi(0)\rangle \quad (60)$$

で与えられる。この式に現われるユニタリー演算子 $\hat{U}(t, 0)$ は、異なる t に対する $\hat{H}_I(t)$ が互いに交換する場合には、

$$\hat{U}(t, 0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t) dt\right] \quad (61)$$

と書けるが、この問題の場合には異なる t に対する $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ は交換しないので $\hat{H}_I(t)$ も交換せず、(61)のように単純に積分形には書けない。そこで最初交換関係が

影響しない微小時間 Δt 内の $\hat{U}(t+\Delta t, t)$ を求める。計算結果は、変位演算子 $\hat{D}(u(t)\Delta t)$ となる。次に総合的時間変遷を Δt のユニタリー変換の積み重ね演算として取り扱い、演算子の時間順序 (time ordering)*2 に注意しながら (55) を使った計算を $\Delta t \rightarrow 0$ の下で行なうことによって

$$\hat{U}(t, 0) = \hat{D}(v(t)); v(t) = \int_0^t u(t') dt' \quad (62)$$

が得られる。ゆえに、(60) より状態 $|\phi(t)\rangle$ は $\hat{D}(v(t))|0\rangle = |v(t)\rangle$ となって、古典的な振動電流分布により発生する電磁波はコヒーレント状態をなすことがわかる。これは、コヒーレント状態と古典場が同じものであることを示している。

3.2.2 コヒーレント状態の変転

Schrodinger 表示で波動関数 $|\psi_s(t)\rangle$ の時間変転は、

$$|\psi_s(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle \quad (63)$$

である。 $|\psi(0)\rangle$ は $t=0$ の波動関数、 \hat{H} は Hamiltonian である。相互作用がないとき、Hamiltonian は単一モードに対する (14) 式で与えられるので、コヒーレント状態 $|\psi(0)\rangle = |v\rangle$ の時間変転は

$$|\psi_s(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} |ve^{i\omega t}\rangle, \quad (64)$$

と計算される。すなわち、コヒーレント状態は、時間とともに一つの状態から他の状態へと変転していくが、時間経過とは関係なくコヒーレント状態のままであることを示している。

3.3 コヒーレント表示

3.3.1 コヒーレント状態の期待値

一般には、3.1 節で述べた変位演算子を有効に用い、消滅・生成演算子の交換関係式を使えば、コヒーレント状態に対するいかなる演算子の期待値も求めることができる。ところで、今後現われる多くの演算子がそうであるように、級数展開できて、かつ、展開項が $c_{nm}(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m$ のように \hat{a}^\dagger が必ず \hat{a} の左側にある正規順序 (normal order) になっている演算子 $\mathcal{F}^{(N)}(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ であるときには、その期待値は容易に求めることができ、

$$\langle v' | \mathcal{F}^{(N)}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) | v'' \rangle = \langle v' | v'' \rangle \mathcal{F}^{(N)}(v'^*, v''), \quad (65)$$

なる複素関数が得られる。すなわち、もし任意の状態の密度演算子がコヒーレント状態で表わすことができたときには、その状態に対する正規順序演算子の期待値は演算子を直接扱わずに複素変数の解析計算だけで済むことになる。

3.3.2 表示としてのコヒーレント状態

コヒーレント状態の直交性 $\langle v | v' \rangle$ を調べよう。式 (23) と (55) を使って計算すると

$$\begin{aligned} \langle v | v' \rangle &= e^{-|v|^2/2 - |v'|^2/2 + v^*v'} \\ &= e^{(v^*v' - vv'^*)/2} e^{-|v-v'|^2/2} \end{aligned} \quad (66)$$

が得られる。第1因子は絶対値が1となる指数変数が純虚数の位相項であるが、第2因子は実数でつねに正である。すなわち、コヒーレント状態は直交しない。しかし、たとえばレーザーが発振するかしないかの境界状態にある場のように、 $\langle n \rangle$ が数千となっているとき¹⁶⁾には v の値が%のオーダーで違っていても (66) の右辺は1よりずっと小さく、古典近似が成り立つ場ではほとんど直交していると考えてよい。ある状態 $|\psi\rangle$ を直交性が成り立つ状態に射影したとき、その絶対値の2乗はお互いに排他的確率を構成するが*3、 $|\langle v | \psi \rangle|^2$ は一般には非直交性のためにそうはならないことに注意が必要である。

コヒーレント状態が完全性の条件

$$\frac{1}{\pi} \int d^2v |v\rangle \langle v| = 1, \quad (67)$$

を満足することは、(55) と光子数状態の完全性から容易に確認できる。ここで複素微分 $d^2v = d[\text{Re}(v)]d[\text{Im}(v)]$ である。状態 $|\psi\rangle$ と演算子 \hat{O} は、(67) から

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int |v\rangle \langle v | \psi \rangle d^2v, \quad (68)$$

$$\hat{O} = \frac{1}{\pi^2} \iint \langle v | \hat{O} | v' \rangle |v\rangle \langle v' | d^2v d^2v' \quad (69)$$

と表わすことができる。特別な場合として $|\psi\rangle = |v'\rangle$ では

$$|v'\rangle = \frac{1}{\pi} \int |v\rangle e^{(v^*v' - vv'^*)/2} e^{-|v-v'|^2/2} d^2v \quad (70)$$

となって、コヒーレント状態は一次独立でないことがわかる。そのため、 $|\psi\rangle$ の表式 (68) は唯一ではなくて無限にあることになって、コヒーレント状態は過完全 (over-complete) である。逆に、過完全であるがゆえに (67) で因子 π が必要なのである。

3.3.3 密度演算子とその対角表示

電磁場を表わす完全な状態 $|\psi\rangle$ が既知の場合の密度演算子は外積として

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (71)$$

と表わされる。しかし、系が混合状態であっておのこの状態 $|\psi_i\rangle$ がある確率が p_i である場合には、

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (72)$$

*2 消滅演算子の新しい時間成分が必ず左に、生成演算子では右に位置するようにすること。

*3 たとえば、 $|\langle n | \psi \rangle|^2$ は光子数分布関数を意味し、 $|\langle q | \psi \rangle|^2$ は空間密度を表わす。

で与えられる。密度演算子の対角和 (trace) は, $\text{Tr } \rho = \sum p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| = 1$ と規格化されており, 任意の演算子 \hat{O} の期待値は

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_i p_i \langle \phi_i | \hat{O} | \phi_i \rangle = \text{Tr}(\hat{O} \rho) = \text{Tr}(\rho \hat{O}) \quad (73)$$

となる。密度演算子を両側から光子数状態の完全性の条件(67)で挟むと

$$\rho = \sum_n \sum_m \langle n | \rho | m \rangle | n \rangle \langle m | \quad (74)$$

と書いて, 光子数状態による密度演算子の展開表式が得られる。干渉効果がない特殊な状態を除いて, (74)の右辺が対角形式だけで表わされることはない。コヒーレント状態に対しても(74)と同様な非対角成分を含む表現が可能である¹⁷⁾, ここでは議論しない。むしろコヒーレント状態の場合には, 状態が過完全になっている特殊性から, 一般に対角形式の展開表現

$$\rho = \int \phi(v) |v\rangle \langle v| d^2v, \quad (75)$$

を使うことができる⁴⁾。ここで $\phi(v)$ は位相空間密度 (phase space density) である。式(75)の左辺はエルミートな密度演算子であることから実数であり, かつ, 規格化条件

$$\int \phi(v) d^2v = 1, \quad (76)$$

を満たす性質をもつことがわかる。 $\phi(v)$ は位相空間 v の重み関数ではあるが, 後に示すように負の値を取ることがあって, 真の確率分布ではない。ただし, 次節に例示されるように, 古典論の近似が成り立つ多くの光子場では非負となって確率分布関数と一致する。負の値になるのは量子電気力学的効果を議論しなければならない系で起こるが, 量子力学的には $\phi(v)$ がオブザーバブルでないので系を表わすのに必ずしも適当な関数とはいえない。

3.3.4 位相空間密度

コヒーレント状態を基底として場をコヒーレント表示するには, 複素変数関数ではあるがそれ自身では実関数となる位相空間密度 $\phi(v)$ が決定できればよいことがわかった。ここでは, $\phi(v)$ がいかに求められるかを調べよう。簡単に求まる例は ρ が反正規順序 (anti-normal order) 関数

$$\rho = \mathcal{F}^{(\Lambda)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_n \sum_m c_{nm} \hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^m, \quad (77)$$

で表わされる場合で, 次式で与えられる。

*1 (75)は密度演算子の P 表示とも呼ばれ, $\phi(v)$ の代りに $P(v)$ を用いる表式もある。この表示は, コヒーレント状態は直交しないため, 厳密な意味での対角表示ではない。また, 対角表示が非対角成分を含む表示と結果的には等価であることが示される¹⁷⁾。

$$\phi(v) = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}^{(\Lambda)}(v, v^*), \quad (78)$$

任意の ρ に対する表示は, (75)より

$$\langle -u | \rho | u \rangle = e^{-|u|^2} \int \phi(v) e^{-|v|^2} e^{uv^* - u^*v} d^2v, \quad (79)$$

が得られ, $uv^* - u^*v$ が純虚数で右辺が関数の2次元 Fourier 変換積分であることから Fourier 逆変換を行ない整理すると,

$$\phi(v) = \frac{1}{\pi^2} e^{|v|^2} \int e^{|u|^2} \langle -u | \rho | u \rangle e^{-uv^* + u^*v} d^2u \quad (80)$$

となる。この結果をいくつかの例に適用してみよう。

(a) 純コヒーレント状態

状態 $|v\rangle$ だけが存在する場合には $\rho = |v\rangle \langle v|$ であり

$$\phi(v) = \delta^2(v - v') \quad (81)$$

を得る。これは, 複素振幅 v' なる波だけが存在するという古典的分布関数と同じである。

(b) レーザー光

単一モードレーザー光は振幅 a_0 が一定で位相 ϕ だけが random walk している状態であるから^{5,8)}, ϕ について一様な密度分布 $1/2\pi$ をもちその密度演算子 ρ は

$$\begin{aligned} \rho &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} |a_0 e^{i\phi}\rangle \langle a_0 e^{i\phi}| d\phi \\ &= \int \frac{\delta(|v| - a_0)}{2\pi a_0} |v\rangle \langle v| d^2v \end{aligned} \quad (82)$$

である。ゆえに $\phi(v)$ は

$$\phi(v) = \frac{\delta(|v| - a_0)}{2\pi a_0} \quad (83)$$

となって, これは振幅 a_0 が一定で位相は random walk している古典場の分布と同じである。

(c) 熱的光源

熱的光源は振幅, 位相ともに random walk している系と考えられ, $\text{Tr } \rho = 1$, $\text{Tr}(\rho \hat{n}) = \langle n \rangle$ の条件の下でエントロピー $S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ が最大となっており, Lagrange の未定乗数法を用いて次のように ρ の表式が求められる。

$$\rho = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \left[\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right]^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \quad (84)$$

これを(80)に代入して計算すると簡単な結果

$$\phi(v) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} e^{-|v|^2 / \langle n \rangle} \quad (85)$$

が得られ, $|v|$ に関して Gauss 分布である。これも古典的結果と同じである。

(d) 光子数状態

場が唯一の状態 $|n\rangle$ をとるときには, $\rho = |n\rangle\langle n|$ であるから,

$$\phi(v) = \frac{e|v|^2}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial v^* \partial v^n} \delta^2(v), \quad (87)$$

が得られる。これは古典的に記述できるいかなる状態にも対応せず確率分布関数という意味付けは不可能である。

3.3.5 光学的等価原理と特性関数

コヒーレント状態に対する正規順序演算子 $\mathcal{F}^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^*)$ の期待値は(65)で与えられるが, コヒーレント表示で一般の状態に対する期待値は,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^*) \rangle &= \text{Tr}[\rho \mathcal{F}^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^*)] \\ &= \int \phi(v) \mathcal{F}^{(N)}(v, v^*) d^2v \\ &\equiv \langle \mathcal{F}^{(N)}(v, v^*) \rangle_{\phi} \end{aligned} \quad (87)$$

となる。量子力学的期待値は光学的に古典場に等価な位相空間 v でのアンサンブル平均に一致しており, これを光学的等価原理と呼ぶ。

光学的等価原理は, 演算子計算をしなくても複素変数だけの解析計算をすれば期待値が求まるということにとどまらず, 演算子関数そのものの計算にも役立つ。たとえば, 特性関数 $C_N(u)$

$$C_N(u) = \int \phi(v) e^{uv^* - u^*v} d^2v \quad (88)$$

を考えると, 光学的等価原理によって

$$C_N(u) = \langle e^{u\hat{a}^\dagger - u^*\hat{a}} \rangle, \quad (89)$$

$$\langle \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \rangle = \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial u^* \partial (-u^*)^m} C_N(u) \right]_{u=0}, \quad (90)$$

が容易に得られる。逆に正規順序の特性関数(89)を知っていれば, (88)の Fourier 逆変換により, 位相空間密度

$$\phi(v) = \frac{1}{\pi^2} \int C_N(u) e^{-uv^* + u^*v} d^2u, \quad (91)$$

なる別の表式が得られる。

以上単一モードを議論した。次回は多モードの場を扱う。

文 献

- 1) 黒田和男: "光のコヒーレンス 1", 光学, **14** (1985) 393-399.
- 2) P. A. M. Dirac (朝永振一郎, 玉木英彦, 木庭二郎, 大塚益比古, 伊藤大介訳): 量子力学, 4th ed. (岩波書店, 東京, 1968) p. 30.
- 3) たとえば, ヴェ・ベレステツキー, イェ・リフシツ, エリ・ピタエフスキー (井上健男訳): 相対論的量子力学 I (東京図書, 東京, 1969) p. 28; L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Pergamon Press, Oxford, 1965).
- 4) 上西克二: "光子統計・光子相関によるコヒーレント相互作用の測定", 光学, **12** (1983) 146-153.
- 5) たとえば, M. Sergent, III, M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr.: *Laser Physics*, (Addison Wesley, London, 1974); H. Haken: *Light*, Vol. 2 (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- 6) N. Bloembergen: *Nonlinear Optics* (Benjamin, New York, 1965); M. D. Levenson: *Introduction to Nonlinear Laser Spectroscopy* (Academic Press, New York, 1982).
- 7) D. F. Walls and P. Zoller: "Reduced quantum fluctuations in resonance fluorescence," *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981) 709-711; 山本喜久: "非古典的光子", 応用物理, **54** (1985) 671-676.
- 8) 黒田和男: "光のコヒーレンス 2", 光学, **14** (1985) 485-491.
- 9) 山本公明: "光のコヒーレンス 3", 光学, **15** (1986) 64-71.
- 10) 山本公明: "光のコヒーレンス 4", 光学, **15** (1986) 150-158.
- 11) たとえば, H. A. Bethe and E. E. Salpeter: *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (Springer-Verlag, Berlin, 1957) p. 89.
- 12) D. E. Pritchard: "Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy," *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983) 1336-1339.
- 13) D. Lenstra, and L. Mandel: "Angular momentum of the quantized electromagnetic field with periodic boundary conditions," *Phys. Rev. A*, **26** (1982) 3428-3437.
- 14) W. Heitler (沢田克郎訳): 輻射の量子論, 3rd ed. (吉岡書店, 京都, 1958) p. 55.
- 15) R. L. Pfleeger and L. Mandel: "Further experiments on interference of independent photon beams at low light levels," *J. Opt. Soc. Am.*, **58** (1968) 945-950.
- 16) S. Singh and L. Mandel: "Method for determining absolute photon number in a laser," *J. Opt. Soc. Am.*, **79** (1982) 304-305.
- 17) R. J. Glauber: "Coherence and incoherence states of the radiation field," *Phys. Rev.*, **131** (1963) 2766-2788; L. Mandel and E. Wolf: "Coherence properties of optical fields," *Rev. Mod. Phys.*, **37** (1965) 231-285.

講義『光のコヒーレンス』

- 1 「インコヒーレント光源」(黒田和男) 14巻5号 pp. 393-399
- 2 「コヒーレンス関数の伝播・高次のコヒーレンス」(黒田和男) 14巻6号 pp. 485-491
- 3 「部分的コヒーレント照明下の結像(1)」(山本公明) 15巻1号 pp. 64-71
- 4 「部分的コヒーレント照明下の結像(2)」(山本公明) 15巻2号 pp. 150-158