

講義

光のコヒーレンス 6

コヒーレンスの量子論 (2)・光と原子の相互作用

上西克二

東北大学科学計測研究所 〒980 仙台市片平 2-1-1

(1986年6月3日受理)

Coherence of Light 6

Quantum Theory of Coherence (2) and the Interaction
between Light Field and Atoms

Katsuji KAMINISHI

Research Institute for Scientific Measurements, Tohoku University,
2-1-1, Katahira, Sendai 9803.4 多モード場のコヒーレント状態と表示^{*1}

単一モードの結果を多モード系に拡張することはそれほどむずかしくはない。単一モードでのコヒーレント状態は(45)に示されるように光子数状態の線形組合せである。一方、多モード系の光子数状態 $|n\rangle$ は各モードの状態の直積として(19)で表わされるので、多モード系のコヒーレント状態 $|\{v\}\rangle$ は、

$$|\{v\}\rangle = \prod_{k,s} |v_{k,s}\rangle, \quad (92)$$

と書くことができる。ここで、 $|v_{k,s}\rangle$ は一つのモード k,s に対するコヒーレント状態であり、(44)と同様の式

$$\hat{a}_{k,s} |v_{k,s}\rangle = v_{k,s} |v_{k,s}\rangle \quad (93)$$

を満足する。具体的には(52)同様次式で表わされる。

$$|v_{k,s}\rangle = \exp(v_{k,s} \hat{a}_{k,s}^\dagger - v_{k,s}^* \hat{a}_{k,s}) |0\rangle. \quad (94)$$

当然、任意のモード k,s に対して関係式

$$\hat{a}_{k,s} |\{v\}\rangle = v_{k,s} |\{v\}\rangle, \quad \langle \{v\} | \hat{a}_{k,s}^\dagger = v_{k,s}^* \langle \{v\} | \quad (95)$$

が成立する。これらの関係式を使って場に存在する平均光子数 $\langle n \rangle$ を計算した結果が次式である。

$$\langle n \rangle = \sum_{k,s} \langle \hat{n}_{k,s} \rangle = \sum_{k,s} |v_{k,s}|^2. \quad (96)$$

変位演算子 $\hat{D}(\{v\})$ は、(92)、(94)より

$$\hat{D}(\{v\}) = \prod_{k,s} \hat{D}(v_{k,s}), \quad (97)$$

と求まる。ここで一つのモード k,s に対する変位演算子が

$$\hat{D}(v_{k,s}) = \exp(v_{k,s} \hat{a}_{k,s}^\dagger - v_{k,s}^* \hat{a}_{k,s}) \quad (98)$$

であることは(94)より自明である。

コヒーレント状態の直交性を調べると、

$$\begin{aligned} |\langle \{v'\} | \{v''\} \rangle|^2 &= \prod_{k,s} |\langle v_{k,s}' | v_{k,s}'' \rangle|^2 \\ &= \exp[-\sum_{k,s} |v_{k,s}' - v_{k,s}''|^2] \\ &\leq \exp[-\langle n' \rangle - \langle n'' \rangle], \end{aligned} \quad (99)$$

となつて、多モード系でのコヒーレント状態は、単一モード同様に非直交性と一次従属性をもっていることがわかる。ゆえに、完全性の条件は、

$$\int |\{v\}\rangle \langle \{v\}| d^2\{v\} = \prod_{k,s} \int |v_{k,s}\rangle \langle v_{k,s}| d^2v_{k,s} = 1, \quad (100)$$

となり、 $d^2\{v\}$ は次式で与えられる。

$$d^2\{v\} = \prod_{k,s} d^2v_{k,s} / \pi. \quad (101)$$

密度演算子の対角形式のコヒーレント状態表示を

$$\hat{\rho} = \int \phi(\{v\}) |\{v\}\rangle \langle \{v\}| d^2\{v\} \quad (102)$$

と定義することは自然である。ここで $\phi(\{v\})$ は多モード場の位相空間密度であり、実数で、かつ、規格化条件

^{*1} 前回の講義の続きであるから式、図、および、文献番号は継続して用いる。以下に現われる番号より小さい番号は文献 0) を参照されたい。

$$\int \phi(\{v\}) d^2\{v\} = 1 \tag{103}$$

を満足する。逆に密度演算子がわかっているとき、位相空間密度を求める式は(80)の拡張として、

$$\begin{aligned} \phi(\{v\}) = & \prod_{k,s} \exp(|v_{k,s}|^2) \int \exp(|u_{k,s}|^2) \langle -u_{k,s} | \rho | u_{k,s} \rangle \\ & \times \exp(-u_{k,s} v_{k,s}^* + u_{k,s}^* v_{k,s}) d^2 u_{k,s} / \pi^2, \end{aligned} \tag{104}$$

である。位相空間密度 $\phi(\{v\})$ の具体例を次に示す。

(a) 純コヒーレント状態 $|\{v\}\rangle$

$$\phi(\{v\}) = \prod_{k,s} \delta^2(v_{k,s} - v_{k,s}'). \tag{105}$$

(b) 単一モード・レーザ光 (モード k_0, s_0 , 振幅 a_0)

$$\phi(\{v\}) = \frac{\delta(|v_{k_0, s_0}| - a_0)}{2\pi a_0} \prod_{k, s \neq k_0, s_0} \delta^2(v_{k,s}). \tag{106}$$

もちろん、多モード系に対しても光学的等価原理

$$\langle \mathcal{F}^{(N)}(\{\hat{a}\}, \{\hat{a}^+\}) \rangle = \langle \mathcal{F}^{(N)}(\{v\}, \{v^*\}) \rangle_{\phi} \tag{107}$$

が成り立つほか、正規順序の特性関数

$$C_N(\{v\}) = \langle \prod_{k,s} \exp(u_{k,s} \hat{a}_{k,s}^+) \exp(-u_{k,s}^* \hat{a}_{k,s}) \rangle \tag{108}$$

が定義できて、単一モードに対する 3.3.5 節と同様のことが議論できる。

3.5 相関関数

3.5.1 古典論と量子論の相関関数の関係

コヒーレント表示を使って、場を記述するベクトルの時空の異なる2点以上の相関関数 (correlation function; またはコヒーレンス関数 (coherence function) と呼ばれる) を調べよう。古典論で明らかのように⁸⁾、相関関数は多モード系の場で初めて実質的に意味のあるものである。式(7)で定義されたベクトル演算子 $\hat{V}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{V}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ をコヒーレント状態に作用すると、

$$\begin{aligned} \hat{V}(\mathbf{r}, t) |\{v\}\rangle &= \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) |\{v\}\rangle, \\ \langle \{v\} | \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t) \langle \{v\} | \end{aligned} \tag{109}$$

となる。ここで複素ベクトル $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ は、

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{k,s} f(\omega_k) v_{k,s} \mathbf{e}_{k,s} \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)\}, \tag{110}$$

で与えられ、 $\mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t)$ はその複素共役量であり、古典論¹⁾で議論した電場ベクトルを任意の場のベクトルへと一般化した解析的信号である。したがって、文献1)の(2)式を拡張した古典的な一般的相関関数 $\Gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$ は、

$$\Gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle V_i^*(\mathbf{r}_1, t_1) V_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \tag{111}$$

となるから、量子力学的相関関数は演算子の順序に注意

して、次式で表わせばよいことがわかる。

$$\Gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{V}_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \tag{111'}$$

ここで i, j はベクトルの空間成分を示す。したがって、規格化された相関関数である複素コヒーレンス度 (complex degree of coherence) は、次式で定義される。

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) &= \frac{\Gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)}{\sqrt{\Gamma_{ii}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_1, t_1) \Gamma_{jj}^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_2, t_2)}}. \end{aligned} \tag{112}$$

コヒーレント状態 $|\{v\}\rangle$ に対して計算すると、

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) &= V_i^*(\mathbf{r}_1, t_1) V_j(\mathbf{r}_2, t_2) \\ & / |V_i(\mathbf{r}_1, t_1)| \cdot |V_j(\mathbf{r}_2, t_2)|, \end{aligned} \tag{113}$$

が得られて、その絶対値 $|\gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)|$ は必ず1となる。すなわち、状態はつねにコヒーレントであり、コヒーレント状態と呼ばれるゆえんである。

3.5.2 光検出と相関関数

光の検出の理論の詳細は5章で扱うが、相関関数の量子力学的取扱い上重要な演算子の順序に関連する部分を議論しよう。光検出器は理想的なもの、すなわち、原子が双極子相互作用によって摂動的に光子を吸収して放出した光電子を測定するものとする。

場の演算子(7)のなかでも光の吸収に寄与する成分は消滅演算子を含む項 $\hat{V}_F(\mathbf{r}, t)$ ($F=E$ (電場), B (磁場), A (ベクトル・ポテンシャル)) である。光の吸収により系が $|i\rangle$ から $|f\rangle$ に遷移する確率振幅は $\langle f | \hat{V}_F(\mathbf{r}, t) | i \rangle$ に比例すること、および、光の検出過程では具体的な状態は特定されないことを考慮すると、検出される光強度 I_F は、

$$I_F = |M|^2 \text{Tr}[\hat{I}_F(\mathbf{r}, t) \rho] = |M|^2 \langle \hat{I}_F(\mathbf{r}, t) \rangle, \tag{114}$$

と表わされる¹⁸⁾。ここで $|M|^2$ は双極子モーメントの2乗に比例する定数であり、場の強度演算子 $\hat{I}_F(\mathbf{r}, t)$ は、

$$\hat{I}_F(\mathbf{r}, t) = \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{V}(\mathbf{r}, t), \tag{115}$$

と書くことができ、正規順序の演算子である。このため、 $\rho = |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}|$ に対する強度はゼロとなって、零点エネルギーは観測にはかからないことを意味する。当然、(114)で与えられる強度には零点エネルギーが含まれていないことがわかる。

次に2点 (\mathbf{r}_1, t_1) , (\mathbf{r}_2, t_2) で光子を検出する場合を考える。時刻の間に $t_2 > t_1$ なる関係がある場合について以上と同様の検討を進めると、いっしょに検出する確率 P_2 は、

$$P_2 = |M|^4 \sum_{l,m} \langle \hat{V}_l^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{V}_m^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$$

$$\times \hat{V}_m(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{V}_l(\mathbf{r}_1, t_1), \quad (116)$$

と求められる. この結果から明らかなように, 一般に高次の相関関数の場合には, 正規順序ばかりでなく時間順序も保たれることがわかる. 正規順序演算子 $::$ と時間順序演算子 \mathcal{G} を使えば, (116)は

$$P_2 = |M|^4 \langle \mathcal{G} : \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{I}(\mathbf{r}_2, t_2) : \rangle \quad (117)$$

と書き換えることができる. 明らかなように, (116)の右辺は正規順序のベクトル演算子の4次の相関関数

$$\begin{aligned} & \Gamma_{i_1 i_2 \dots i_N j_M \dots j_1}^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) \\ & = \langle \hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{V}_m^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{V}_m(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{V}_{i_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \end{aligned} \quad (118)$$

から構成されており, 多点での光子の一致計測と場のベクトルの高次の相関関数が緊密な関係をもっていることがわかる.

3.5.3 一般化された相関関数とその性質

式(118)をさらに拡張して一般化された $N+M$ 次の相関関数を次のように定義する.

$$\begin{aligned} & \Gamma_{i_1 i_2 \dots i_N j_M \dots j_1}^{(N,M)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2; \dots; \mathbf{r}_N, t_N; \\ & \quad \mathbf{r}_{M'}, t_{M'}; \dots; \mathbf{r}_{1'}, t_{1'}) \\ & = \langle \hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{V}_{i_2}^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2) \dots \hat{V}_{i_N}^\dagger(\mathbf{r}_N, t_N) \\ & \quad \times \hat{V}_{j_M}(\mathbf{r}_{M'}, t_{M'}) \dots \hat{V}_{j_1}(\mathbf{r}_{1'}, t_{1'}) \rangle. \end{aligned} \quad (119)$$

ここでは非線形効果の作用する場で重要となる $N \neq M$ の場合^{17,19)}を含めて議論を進めるが, 現実的には(118)のように $N=M$ の場合が多く, $2N$ 次の代りにたんに N 次の相関関数と呼ぶこともある^{17,18)}. 古典論同様⁸⁾記述を簡潔にするために, 4次元変数 x_i ; または $y_i = (\mathbf{r}_i, t_i)$ を使った簡略記法を用い, 式(119)を次のように書くことにする.

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(N,M)}(x_1 \dots x_N; y_M \dots y_1) \\ & = \langle \hat{V}^\dagger(x_1) \dots \hat{V}^\dagger(x_N) \hat{V}(y_M) \dots \hat{V}(y_1) \rangle. \end{aligned} \quad (119')$$

このように定義された $N+M$ 次の相関関数の典型的性質を以下に示す¹⁷⁻²¹⁾.

(a) 自由電磁場の置換不変性

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(N,M)}(x_1 \dots x_N; y_M \dots y_1) \\ & = \Gamma^{(N,M)}(\mathbf{P}[x_1 \dots x_N]; \mathbf{P}[y_M \dots y_1]). \end{aligned} \quad (120)$$

\mathbf{P} は対象となる要素の任意の置換を表す. 自由電磁場では独立な相関関数の数が多いことはないことを意味する.

(b) 複素共役量

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(N,M)*}(x_1 \dots x_N; y_M \dots y_1) \\ & = \Gamma^{(M,N)}(y_1 \dots y_M; x_N \dots x_1). \end{aligned} \quad (121)$$

(c) $2N$ 次の特殊性

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(N,N)}(x_1 \dots x_N; x_N \dots x_1) \\ & = \Gamma^{(N,N)*}(x_1 \dots x_N; x_N \dots x_1) \geq 0. \end{aligned} \quad (122)$$

光子検出に直接関連する相関関数は実数でかつ非負であ

ることがわかる.

(d) 絶対値

$$\begin{aligned} & |\Gamma^{(N,M)}(x_1 \dots x_N; y_M \dots y_1)|^2 \\ & \leq \Gamma^{(N,N)}(x_1 \dots x_N; x_N \dots x_1) \\ & \quad \times \Gamma^{(M,M)}(y_1 \dots y_M; y_M \dots y_1). \end{aligned} \quad (123)$$

$N \neq M$ の特殊な相関が存在する場合でも, 相関の大きさは偶数次の相関より小さいことを意味する.

このほかに, 非負確定性, 定常的帯域制限場および光子分布制限場の高次相関の制限等の性質をもつ¹⁷⁻²¹⁾. 自明のこととして, (112)と(d)から $|\gamma^{(1,1)}(x, x)| \leq 1$ が導かれる. 4次以上の高次の規格化された相関関数はやはりコヒーレンス度を表わすが, 規格化関数の選択が唯一ではない上に定義によってその物理的に意味するところも異なっており, その詳細は文献に譲る¹⁷⁻²⁰⁾.

3.5.4 相関関数の不変性

相関関数は種々の条件下で不変性を保つ. いかなる場合にどんな不変性をもっているかを調べてみよう.

(a) 定常場 (stationary field)

定常場では密度演算子とHamiltonianが交換し, $[\hat{H}, \rho] = 0$ が成り立つ. これを使って相関関数の時刻を τ 変移させるユニタリ変換を実行すると,

$$\begin{aligned} & \Gamma = \langle \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2) \dots \hat{V}(\mathbf{r}_1', t_1') \rangle \\ & = \langle \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1 + \tau) \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2 + \tau) \dots \hat{V}(\mathbf{r}_1', t_1' + \tau) \rangle, \end{aligned} \quad (124)$$

なる結果を得る. すなわち, 相関関数は絶対時間によらないことがわかる. したがって, 式(124)は,

$$\Gamma = \langle \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_1, 0) \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2 - t_1) \dots \hat{V}(\mathbf{r}_1', t_1' - t_1) \rangle \quad (124')$$

とも書くことができ古典論の相関関数と一致する.

(b) 空間均一場 (homogeneous field)

密度演算子が座標軸の並行移動に関して変化しない場では, 運動量 \mathbf{P} と交換するので次の結果を得る.

$$\begin{aligned} & \Gamma = \langle \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2) \dots \hat{V}(\mathbf{r}_1', t_1') \rangle \\ & = \langle \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0, t_1) \hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0, t_2) \dots \hat{V}(\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_0, t_1') \rangle. \end{aligned} \quad (125)$$

(c) 等方場 (isotropic field)

空間の一点を中心とした任意の回転に関して密度演算子不変である場では, 全角運動量 $\hat{\mathbf{J}}$ に対して $[\hat{\mathbf{J}}, \rho] = 0$ が成り立つ. あらゆるベクトルと空間座標が回転されるので多少複雑な結果となる.

$$\begin{aligned} & \langle \hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{V}_{j_1}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \\ & = \langle \mathcal{R}_{ii} \hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathcal{R}\mathbf{r}_1, t_1) \mathcal{R}_{jm} \hat{V}_m(\mathcal{R}\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (126)$$

ここで, \mathcal{R} は

$$\mathcal{R} \hat{V}(\mathcal{R}\mathbf{r}, t) = \exp(i\hat{\mathbf{J}} \cdot \delta\theta / \hbar) \hat{V}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\hat{\mathbf{J}} \cdot \delta\theta / \hbar),$$

(127)

で定義される微小回転ベクトル $\delta\theta$ に対するベクトル変換行列である。

相関関数の不変性が保たれている場合は必ずしも特殊な場とは限らない。たとえば、位相空間密度が $\phi(\{v\}) = \phi(\{|v|\})$ と表わされるときには、(45)、(102)を代入して計算すると、次式が証明できる。

$$[\hat{n}_{k,s}, \hat{\rho}] = 0. \quad (128)$$

したがって、(16)、(25)から $[\hat{H}, \hat{\rho}] = 0 = [\hat{P}, \hat{\rho}]$ が成立することになって、定常でかつ均一な場の条件を満たすことがわかる。3.3.4節に示したように、レーザー光や熱的光源はこのような例である。

3.6 光子統計

3.6.1 光子分布関数

多モード系における光子分布関数 $p(\{n\})$

$$p(\{n\}) = \text{Tr}[\hat{\rho} | \{n\} \rangle \langle \{n\} |] \quad (129)$$

を考えよう。これに(102)を代入して計算すると、

$$p(\{n\}) = \langle \prod_{k,s} \exp(-|v_{k,s}|^2) |v_{k,s}|^{2n_{k,s}} / n_{k,s}! \rangle_{\phi}, \quad (130)$$

を得る。ここで光学的等価原理の逆を適用すると、

$$p(\{n\}) = \langle \prod_{k,s} : \exp(-\hat{n}_{k,s}) \hat{n}_{k,s}^{n_{k,s}} / n_{k,s}! : \rangle \quad (130')$$

なる量子力学的表式が得られる。形式的には Poisson 分布であるが実際には必ずしも Poisson 分布ではない。たとえば単一モード・レーザー光の場合には(106)より

$$p(\{n\}) = (\exp(-a_0^2) a_0^{2n_{k_0, s_0}} / n_{k_0, s_0}!) \prod_{k, s \neq k_0, s_0} \delta n_{k,s} \quad (131)$$

となるし、後述する熱的光源の場合には

$$p(\{n\}) = \prod_{k,s} \langle n_{k,s} \rangle^{n_{k,s}} / [1 + \langle n_{k,s} \rangle]^{n_{k,s}+1} \quad (132)$$

となって各モードは Bose-Einstein 分布である。

次に(130)と多項式のベキ乗展開の公式を使って m 個の光子を見いだす確率 $P(m)$ を計算すると

$$P(m) = \langle \exp[-U(\{v\})] U(\{v\})^m / m! \rangle_{\phi}, \quad (133)$$

となる。ここで $U(\{v\})$ は

$$U(\{v\}) = \sum_{k,s} |v_{k,s}|^2 \quad (134)$$

である。(133)式もまた $U(\{v\})$ に関して形式的に Poisson 分布になっている。これに(96)を代入し光学的等価原理の逆を適用すると

$$P(m) = \langle : \exp(-\hat{n}) \hat{n}^m / m! : \rangle \quad (133')$$

を得る。ここで \hat{n} は全光子数演算子であり、この式は任意の輻射場で有効である。式(133)をさらに古典的形式に書き直すと、

$$P(m) = \int_0^{\infty} \mathcal{P}(U') \frac{U'^m \exp(-U')}{m!} dU', \quad (135)$$

となる。ここで $\mathcal{P}(U')$ は

$$\mathcal{P}(U') = \int \delta(U' - U(\{v\})) \phi(\{v\}) d^2\{v\} \quad (136)$$

である。すなわち、強度 U' の分布関数が(136)で与えられる場で、 m 個の光子が存在する確率は(135)であることを意味し、(136)が古典的強度分布関数と量子論での位相空間密度との関係を与える。

3.6.2 モーメントと母関数

光の場の統計性を表わす物理量の一つであるモーメント (moment) とその母関数を考えよう。モーメント $\langle \hat{n}^r \rangle$ の母関数 $M(\xi)$ が

$$M(\xi) = \langle \exp(\xi \hat{n}) \rangle \quad (137)$$

であることは、次式から容易にわかる。

$$\langle \hat{n}^r \rangle = \left[\frac{\partial^r}{\partial \xi^r} M(\xi) \right]_{\xi=0}. \quad (138)$$

したがって、累積率 (cumulant) の母関数は

$$K(\xi) = \ln M(\xi) \quad (139)$$

で与えられる。

一方、 r 次のファクトリアル・モーメント (factorial moment)

$$\langle \hat{n}^{(r)} \rangle = \langle \hat{n}(\hat{n}-1) \cdots (\hat{n}-r+1) \rangle \quad (140)$$

の母関数は

$$F(\xi) = \langle (1-\xi)^{\hat{n}} \rangle \quad (141)$$

であるが、密度演算子の表式(74)を多モード系に拡張した式を代入し、(129)、(133)、光学的等価原理の逆を適用することによって、

$$F(\xi) = \langle \exp(-U\xi) \rangle_{\phi} = \langle : \exp(-\hat{n}\xi) : \rangle, \quad (141')$$

と書き換えられる。(140)、(141')から $\langle \hat{n}^{(r)} \rangle = \langle : \hat{n}^r : \rangle$ が示され、正規順序のモーメント演算子がファクトリアル・モーメント演算子と一致することは興味深い。これは、正規順序の強度相関が場の光子を順次消滅することによって検出されることを考えれば理解できよう。

式(140)、(141')から光子数の揺らぎを計算すると、

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle n \rangle + \langle (\Delta U)^2 \rangle_{\phi} \quad (142)$$

を得る。この式で第1項は古典的な粒子の性質、第2項は古典的波動の性質を反映している。第2項の値は関数 ϕ に依存する量であり、たとえば、純コヒーレント状態やレーザー光に対してはゼロ、熱的光源を含めて多くの場に対しては正である。正のときは光子バンチング (photon bunching) 効果であるが、負のときには逆にアンチバンチング (anti-bunching) が起こっている場で、サブポアソン統計 (sub-Poisson statistics) に従う。この例は後に議論する原子の蛍光で見られる。負の下限は揺らぎがゼロとなる値 $-\langle n \rangle$ であり、Fock 状態に対

して与えられる。

3.7 熱的光源への適用

3.7.1 黒体輻射のコヒーレンス特性

以上論じたコヒーレンスの量子論では多くが一般論であった。ここでは具体的に熱的光源へ適用した結果を示そう。なかでも黒体輻射場は特殊な系であるが、厳密な理論の展開が可能であるばかりでなく、多くの自然界に存在する光源のコヒーレンス特性を推測する上で重要なものである。

熱平衡状態にある定常な場の密度演算子は、

$$\hat{\rho} = \exp(-\hat{H}/k_B T) / \text{Tr}[\exp(-\hat{H}/k_B T)], \quad (143)$$

で与えられる²²⁾。ここで、 k_B は Boltzmann 定数である。Hamiltonian (16) を代入して整理すると、

$$\hat{\rho} = \prod_{\mathbf{k}, s} [1 - \exp(-\hbar\omega_{\mathbf{k}}/k_B T)] \exp(-\hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}, s} / k_B T), \quad (144)$$

が得られる。結果は各モードの密度演算子の積となっていて、あらゆるモードが統計的には互いに独立であることを意味する。また、 $\hbar\omega_{\mathbf{k}}/k_B T$ は \mathbf{k} の方向や偏光 s には依存しないことから、黒体輻射は定常的であり、かつ、均一な等方性をもつ無偏光な場であることがわかる。モード \mathbf{k}, s の平均光子数 $\langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle$ を求めると、

$$\langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle = 1 / [\exp(\hbar\omega_{\mathbf{k}}/k_B T) - 1], \quad (145)$$

となるので、(144)は

$$\hat{\rho} = \prod_{\mathbf{k}, s} \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle^{\hat{n}_{\mathbf{k}, s}} / [1 + \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle]^{\hat{n}_{\mathbf{k}, s} + 1} \quad (144')$$

と書き換えられる。これから、光子統計分布 $p(\{n\})$ は容易に計算できて、

$$p(\{n\}) = \prod_{\mathbf{k}, s} \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle^{n_{\mathbf{k}, s}} / [1 + \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle]^{n_{\mathbf{k}, s} + 1}, \quad (146)$$

となり、Bose-Einstein 分布を示す各モード分布の積である。関数形は(132)と同一であるが、 $\langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle$ は、熱的光源では任意の値をとることができるのに対して(146)では(145)に限定されているところが本質的に異なる。各モードに対する光子数の揺らぎ、すなわち、分散 (variance) を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{n}_{\mathbf{k}, s})^2 \rangle &= \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle (1 + \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle) \\ &> \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle \end{aligned} \quad (147)$$

となり、黒体輻射場は光パッシングを示すことがわかる。

角周波数 $d\omega$ の範囲にある黒体輻射のエネルギー・スペクトル分布 $u(\omega)$ は、モード密度(11)と単位体積中のモード当りの光子数(145)から、

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}, \quad (148)$$

となって、Planck の公式が得られる。 $u(\omega)$ が最大とな

るのは $\hbar\omega_M \sim 2.8 k_B T$ のとき、すなわち $\lambda_M \sim 5.1 \times 10^{-3} / T$ である。たとえば $T = 3,000 \text{ K}$ では、 $\lambda_M \sim 1.7 \mu\text{m}$ となり、可視域 ($\sim 0.6 \mu\text{m}$) では $\langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle \sim 10^{-3}$ と単位体積当りの光子数は小さい値となって、非相対論的量子力学で扱える系ではほとんどのモードが空に近いことがわかる。相対論的量子力学の対象である $T \sim 30,000 \text{ K}$ の熱核反応の光源 (たとえば太陽の内部) で初めて $\langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle \sim 1$ が実現する。そのほか、Planck の公式から、たとえば、 ω で積分すれば全エネルギー密度が T^4 に比例するという Stefan-Boltzmann の公式が得られるなど、多くの黒体輻射の性質を導くことができる。

位相空間密度 $\phi(\{v\})$ は、(144)と(104)から

$$\phi(\{v\}) = \prod_{\mathbf{k}, s} \exp(-|v_{\mathbf{k}, s}|^2 / \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle) / \pi \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle \quad (149)$$

が得られ、各モードは Gauss 関数である。この式と光学の等価原理、および異なるモードが互いに独立であることを使って正規モーメント $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}', s'} \rangle$ を求めると、

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}', s'} \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'} \delta_{mn} \langle |v_{\mathbf{k}, s}|^{2n} \rangle_\phi, \quad (150)$$

が得られる。これから、 $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}, s} \rangle = 0 = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger \rangle = \langle \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) \rangle$ となることは明白である。また、相関関数 $\Gamma^{(N, M)}$ は、

$$\begin{aligned} \Gamma^{(N, M)}(x_1, x_2, \dots, x_N; y_M \dots y_1) \\ &= \delta_{NM} \sum_{\mathbf{P}} \langle V^*(x_1) V(y_1) \rangle_\phi \langle V^*(x_2) V(y_2) \rangle_\phi \dots \\ &\quad \times \langle V^*(x_N) V(y_N) \rangle_\phi \\ &\equiv \Gamma^{(N, N)} \end{aligned} \quad (151)$$

と求められる。この結果は、黒体輻射はそのすべての相関関数が2次の相関関数で記述できるという非常に特殊な場であることを示している。とくに、 $2N$ 次の相関関数は

$$\Gamma_{ij}^{(N, N)} = \langle \hat{V}_i^\dagger(x) \hat{V}_j^N(x) \rangle = N! \langle V_i^*(x) V_j(x) \rangle_\phi^N \quad (152)$$

と簡単な形に書くことができる。

式(7)と(151)から、2次の相関関数を計算すると、

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{(2, 2)}(x_1; x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k |f(\omega_{\mathbf{k}})|^2}{\exp(\hbar\omega_{\mathbf{k}}/k_B T) - 1} \\ &\quad \times (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) \\ &\quad \times \exp[i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \omega_{\mathbf{k}}(t_2 - t_1)]], \end{aligned} \quad (153)$$

と求められる。空間および時間変数は、差 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\tau = t_2 - t_1$ として含まれており定常性と一様性が満たされている。また、任意の空間回転を試みると、たとえば i, j 成分が l, m 成分へ変換される回転の場合 $\Gamma_{lm}^{(2, 2)} = \Gamma_{ij}^{(2, 2)}$ の結果が得られて、等方性も成り立つことが確認できる。導出の詳細は省略するとして²³⁾、(153)より黒体輻射場中のコヒーレンス度 $\gamma_{ij}(\mathbf{r}, \tau)$ の表式は次のように

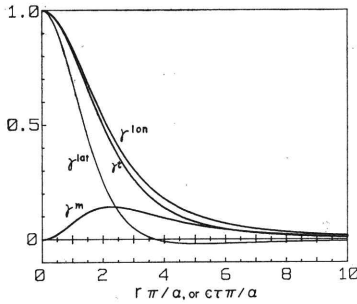


図3 黒体輻射の各種コヒーレンス度
縦空間コヒーレンス度 $\gamma^{lon} = \gamma_{zz}(r(=z), 0)$, 横
空間コヒーレンス度 $\gamma^{lat} = \gamma_{zz}(r(=\sqrt{x^2+y^2}), 0)$, 時間コヒーレンス度 $\gamma^t = |\gamma_{zz}(0, \tau)|$, 規格
化相互相関関数 $\gamma^m = \gamma_{xy}(r(x=y, z=0), 0)$

求められる。

$$\gamma_{ij}(r, \tau) = \frac{90\alpha^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\delta_{ij}}{(\alpha + ic\tau)^2 + r^2} + 2 \frac{r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{\{(\alpha + ic\tau)^2 + r^2\}^3} \right] \quad (154)$$

ここで $\alpha = \hbar c / k_B T$ である。これを具体的に数値計算した結果が図3である。図には縦空間コヒーレンス度、横空間コヒーレンス度、時間コヒーレンス度、 $x=y$ 方向に沿った $x-y$ 偏光の規格化相互相関関数を示した。上記特性から他の偏光成分に対する相関関数も同様に同じ曲線で示される。図から明らかなように、すべての相関関数は、最大スペクトル分布を示す波長 λ_M または周期 $1/\nu_M$ の0.3倍程度の半値幅をもち、たかだかそれらの数倍程度の範囲で有限な関数であることがわかる。図では相対的比較が可能ないようにスケールして描いてあるにもかかわらず、時間コヒーレンス度と縦空間コヒーレンス度とが一致していない点が注目される。これは干渉計測の常識からすると、一見奇妙である。しかし、(154)は、黒体輻射場中の時空2点に点状の検出器を設置して全方向から来る光を受けたとき観測される相関関数であり、一方、われわれが実際に観測するのは、黒体輻射体の穴から放出された光の相関関数であることを考えれば不思議ではない。事実、光源から十分に離れた2点で z 軸方向に伝播する平面波を観測して得られる2次の相関関数を(153)から計算すると、

$$\gamma_{zz}(z, \tau) = \gamma_{yy}(z, \tau) = (90\alpha^4/\pi^4) \sum_{n=1}^{\infty} \{n\alpha + i(cc-z)\}^{-4}, \quad (155)$$

が得られる。時空変数は差 $ct-z$ として式に含まれており、時間と空間の相関関数は完全に一致する。実際の

関数形は、横軸を $ct-z$ と読めば、図3の時間コヒーレンス度と同一である。

3.7.2 熱的光源

熱的光源 (thermal sources or chaotic fields) とは、たとえば、黒体輻射に適当なスクリーン、マスク、レンズ、反射鏡、回折格子、プリズム、分散素子、偏光子、位相板、光学回転子などのフィルターを施して得られるような場で、基本的には定常性と均一性をもち、関係式

$$\langle \hat{a}_{k,s}^\dagger \hat{a}_{k',s'} \rangle = \langle v_{k,s}^* v_{k',s'} \rangle_\phi = \delta_{kk'} \delta_{ss'} \langle |v_{k,s}|^2 \rangle_\phi \quad (156)$$

を満足するスペクトル純粋性の成り立つ場であり、最終的には位相空間密度が

$$\phi(\{v\}) = \prod_{k,s} \exp(-|v_{k,s}|^2 / \langle n_{k,s} \rangle) / \pi \langle n_{k,s} \rangle, \quad (157)$$

と多変数 Gauss 関数で与えられる場であると定義される。式中の平均光子数 $\langle n_{k,s} \rangle$ は任意の値をとってよい。したがって、光子分布関数 $p(\{n\})$ はすでに(132)に与えたように、Bose-Einstein 分布をなす各モードの積で表わされる。

次に、 z 方向に一様に伝播する光の4次の相関関数を考えよう。位相空間密度(157)から4次の相関関数は

$$\Gamma^{(2,2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \Gamma^{(1,1)}(x_1; x_1) \Gamma^{(1,1)}(x_2; x_2) + |\Gamma^{(1,1)}(x_1; x_2)|^2 \quad (158)$$

と書き換えられる。ここで

$$\Gamma^{(1,1)}(x_1; x_2) = (2\pi)^{-3} \int d^3k |f(\omega_k)|^2 \langle n_k \rangle \times \exp(-ikc\sigma) \quad (159)$$

であることは、(153)と同様の計算から求まる。式中の変数 σ は $(t_1 - t_2) - (z_1 - z_2)/c$ であるので、以下では $\Gamma(\sigma)$ と簡略記法を用いる。もっと具体的な関数形を見るために、場が Doppler 拡がりによるスペクトル分布

$$\langle n_k \rangle = \text{const.} \exp\{-i(\omega_k - \omega_0)/2\gamma^2\} \quad (160)$$

をもつ場合を考える。このとき $\Gamma^{(1,1)}(\sigma)$ は、

$$\Gamma^{(1,1)}(\sigma) = \Gamma^{(1,1)}(0) \exp(i\omega_0\sigma - \gamma^2\sigma^2/2), \quad (161)$$

となつて、最終的には

$$\Gamma^{(2,2)}(\sigma) = [\Gamma^{(1,1)}(0)]^2 [1 + \exp(-\gamma^2\sigma^2)] \quad (162)$$

を得る。もし(160)の代りに Lorentz 関数

$$\langle n_k \rangle = \text{const.} / [(\omega_k - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2] \quad (163)$$

で表わされるスペクトル分布であるときには、

$$\Gamma^{(2,2)}(\sigma) = [\Gamma^{(1,1)}(0)]^2 [1 + \exp(-\gamma|\sigma|)], \quad (164)$$

が得られる。図4に示されるようにいずれの場合でもコヒーレンス度は $\sigma=0$ で $2, \sigma \rightarrow \pm\infty$ で 1 となつて古典論で議論があった Hanbury-Brown Twiss 効果であ

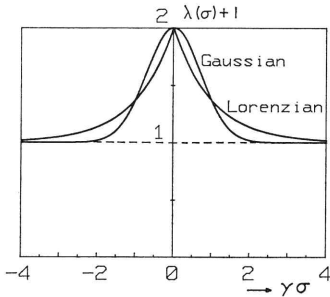


図 4 熱的光源の強度相関関数 $\lambda(\sigma)+1 \equiv \Gamma^{(2,2)}(\sigma)/\Gamma^{(2,2)}(0)$ (スペクトル分布が Gauss 関数の場合 (162) と Lorentz 関数の場合 (164))

る²⁴⁾. この結果は, Fourier 変換分光法の基礎になっている²⁵⁾.

4. 光と原子の相互作用

一般に相互作用のある系で光のコヒーレンスを論ずるときには, 種々の観点から光と物質の相互作用を考える必要がある. しかし, 多体系や非線形現象は扱わずに基礎的問題に話題を限定するときには, 原子との相互作用を考えれば十分である. 事実, 3.5.2 節で理想的な光検出器を考えた場合にもそうであったし, 5章で光の検出の量子論を議論するときにも原子による光の吸収として扱う. この章では, 最初に一般的な光と原子の相互作用の量子論を展開し, 次に, 光の放射と吸収過程を摂動論的に取り扱う. 光のコヒーレンスで量子力学固有の現象である光アンチバンチング効果は, 二準位原子から放出される蛍光で見いだされていることから, 最後に, その放出の理論を量子電気力学的取扱いに従って示す.

4.1 相互作用のある場

4.1.1 場の総合的 Hamiltonian

光と原子が相互作用している場を議論するには, いままで扱った Hilbert 空間を拡張して考える必要がある. すなわち, 部分系としての原子系 (A) と電磁場 (F), およびそれらの相互作用 (I) の各成分の Hamiltonian $\hat{H}_A, \hat{H}_F, \hat{H}_I$ から構成される総合的 Hamiltonian

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_I \quad (165)$$

を考えることである. したがって, 系全体の状態を示す密度演算子を ρ としたとき, 各部分系の密度演算子は

$$\rho_A = \text{Tr}_F \rho, \quad \rho_F = \text{Tr}_A \rho \quad (166)$$

と表わされて, 互いに相手の部分系の対角和として与えられる.

原子が電磁場中を運動しているときの系全体の Hamiltonian は

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t))^2 + \hat{V}(\mathbf{r}) + \hat{H}_F \quad (167)$$

と表わされる. ここで, 2章同様 Coulomb gauge $\text{div} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = 0$ を使って (167) を展開し整理すると,

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{V}(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\hat{n}_{\mathbf{k}, s} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\mathbf{k}} \\ & - \frac{e}{m} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) + \frac{e^2}{2m} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)^2, \end{aligned} \quad (168)$$

と (165) の形式に書き下すことができる. この式は非相対論的には厳密な式であるが, 多くの場合簡略化が可能である. 第一に, 光の波長が原子の直径に比べて十分に大きいので, 原子内の電子の感じる電磁場は一定と考える双極子近似 (dipole approximation) $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) |\Phi(\mathbf{r}_0)\rangle = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t) |\Phi(\mathbf{r}_0)\rangle$ が成立する. また, (168) の最後の項は非線形効果を議論するときには重要であるが²⁶⁾, そのエネルギーの大きさは数 μm に収束された MW 級のレーザー光場で \hat{H}_A と同程度になるので, 多くの系では無視してよい. したがって, Hamiltonian の各成分は

$$\begin{aligned} \hat{H}_A = & \hat{\mathbf{p}}^2/2m + V(\mathbf{r}) \\ \hat{H}_F = & \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\hat{n}_{\mathbf{k}, s} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (169)$$

$$\hat{H}_I = -\frac{e}{m} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$$

と整理される. 当然 \hat{H}_F は自由電磁場の Hamiltonian (16) と同一である.

4.1.2 電子場の量子化と演算子

原子系を電磁場と対等に扱えるようにするために, 電子場の第 2 量子化を簡潔に示す. 原子系の Hamiltonian \hat{H}_A に対して方程式

$$\hat{H}_A |\phi_j\rangle = W_j |\phi_j\rangle \quad (170)$$

を満足する固有状態と固有値を $|\phi_j\rangle, W_j$ とする. ここで, 固有状態は規格直交関係

$$\langle \phi_j | \phi_k \rangle = \delta_{jk} \quad (171)$$

を満足するものとする. 電磁場のモード展開と同様に一般の状態関数 $|\Psi\rangle$ は $|\phi_j\rangle$ の重ね合せとして

$$|\Psi\rangle = \sum_j \hat{b}_j |\phi_j\rangle \quad (172)$$

なる形に展開できたとき, そのエルミート共役は

$$\langle \Psi | = \sum_j \hat{b}_j^\dagger \langle \phi_j | \quad (173)$$

である. 式 (171)~(173) を用いて Hamiltonian (170) を書き換えると,

$$\hat{H}_A = \sum_j W_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \equiv \sum_j \hbar \omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \quad (174)$$

が得られる. (14) と (174) を比較してみると強い類似性を見いだすことができ, $\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_j$ を状態 $|\phi_j\rangle$ にある電子を生成したり消滅する演算子と考えればよいことがわ

かる。電子はスピン 1/2 をもつ Fermi 粒子であり、Pauli の排他律に従うので、生成・消滅演算子は、次の反交換関係を満たす^{3,22)}。

$$\{\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_k\} \equiv \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k \hat{b}_j^\dagger = \delta_{jk}, \quad (175)$$

$$\{\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_k^\dagger\} = 0 = \{\hat{b}_j, \hat{b}_k\}.$$

式(174)から明らかなように、状態 $|\psi_j\rangle$ を占める電子数演算子 \hat{N}_j は

$$\hat{N}_j = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \quad (176)$$

である。反交換関係(175)から容易に $\hat{N}_j^2 = \hat{N}_j$ が得られて、一つの原子状態の数固有値はつねに 0 か 1 であることが確かめられる。

ベクトル・ポテンシャル $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ はすでに(3)⁰⁾で与えられているので、(169)の中でまだ具体的な表式が求められていないものは $\hat{\rho}$ だけである。一般に、考えている系の Hamiltonian を \hat{H} として、演算子 $\hat{O}(t)$ の時間変化は Heisenberg の方程式

$$\dot{\hat{O}}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{O}(t), \hat{H}] \quad (177)$$

から計算することができる。これに(170)、(175)を代入して原子の運動量演算子 $\hat{\mathbf{p}}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} &= m\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{m}{i\hbar} [\hat{\mathbf{x}}, \hat{H}_A] \\ &= \frac{m}{ie\hbar} \sum_{k,l} \langle k | \boldsymbol{\rho} | l \rangle (\omega_l - \omega_k) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l \end{aligned} \quad (178)$$

なる結果を得る。ここで $\boldsymbol{\rho} = e\hat{\mathbf{x}}$ は電気双極子モーメント演算子である。

4.2 原子による光の放射・吸収

系の時間的変化を調べるには、密度演算子の時間変化を知る必要がある。ここでは相互作用表示を用いて摂動論的な取扱いを示す。非摂動 Hamiltonian $\hat{H}_0 = \hat{H}_A + \hat{H}_F$ を使って、Schrödinger 表示子の演算 $\hat{O}_S(t)$ と状態 $|\psi_S(t)\rangle$ を相互作用表示へ変換する関係式は

$$\begin{aligned} \hat{O}^I(t) &= \exp\{i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar\} \hat{O}_S(t) \\ &\quad \times \exp\{-i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar\}, \\ |\psi^I(t)\rangle &= \exp\{i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar\} |\psi_S(t)\rangle \end{aligned} \quad (179)$$

である。また、相互作用表示での密度演算子は運動方程式

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}^I(t), \hat{\rho}(t)] \quad (180)$$

に従う。これを形式的に積分を行ない書き換えると、

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \hat{\rho}(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 [\hat{H}^I(t_1), \hat{\rho}(t_0)] \\ &\quad + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [\hat{H}^I(t_1), [\hat{H}^I(t_2), \hat{\rho}(t_0)]] \\ &\quad + \dots, \end{aligned} \quad (181)$$

なる積分方程式を得る。明らかにこれは密度演算子の摂動展開式になっていることがわかる。

時刻 t_0 に初期状態 $|i\rangle$ にあった原子が光を吸収して終状態 $|f\rangle$ に励起される遷移確率 P_A を考える。(181)から計算するとき、密度演算子 $\hat{\rho}(t_0)$ は、直積 $\hat{\rho}_A(t_0) \otimes \hat{\rho}_F(t_0)$ で表わされること、および、原子系に対する部分系の期待値が問題であることを考慮すると、最初にゼロと異なる項として現われるのは第3項からの寄与で、最終的には

$$\begin{aligned} P_A(f, t; i, t_0) &= \langle f | \hat{\rho}_A(t) | f \rangle \\ &= \hbar^{-2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \text{Tr}_F [\langle f | \hat{H}^I(t_1) | i \rangle \\ &\quad \times \hat{\rho}_F(t_0) \langle i | \hat{H}^I(t_2) | f \rangle] \end{aligned} \quad (182)$$

と書き下すことができる。これは摂動展開の最初の項であるから短い時間の範囲内だけで正しい式である。

相互作用表示での相互作用 Hamiltonian の具体的な表式は(3)、(169)、(178)から、

$$\begin{aligned} \hat{H}^I(t) &= \sum_{l,m} \sum_{k,s} \left[\frac{i}{L^{3/2}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{1/2} (\omega_m - \omega_l) \langle m | \boldsymbol{\rho} | l \rangle \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{k,s} \right. \\ &\quad \times \exp\{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i(\omega_m - \omega_l - \omega_k)t\} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \hat{a}_{k,s} \\ &\quad \left. + \text{H. c.} \right], \end{aligned} \quad (183)$$

と求まる。これを(182)に代入し、光の周波数と同程度またはそれ以上で振動する成分は平均値が十分に小さくなるので無視し、 $\mu_{fi} = \langle f | \boldsymbol{\rho} | i \rangle$ として

$$\begin{aligned} P_A(f, t; i, 0) &= \frac{(\omega_f - \omega_i)^2}{2L^3} \sum_{k,s} \frac{|\mu_{fi} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{k,s}|^2}{\omega_k} \left[(1 + \langle n_{k,s} \rangle) \right. \\ &\quad \times \frac{4 \sin^2(\omega_f - \omega_i + \omega_k)t/2}{(\omega_f - \omega_i + \omega_k)^2} \\ &\quad \left. + \langle n_{k,s} \rangle \frac{4 \sin^2(\omega_f - \omega_i - \omega_k)t/2}{(\omega_f - \omega_i - \omega_k)^2} \right] \end{aligned} \quad (184)$$

と整理される。ただし、ここでは入射光にスペクトル幅がありがあると考えて導いた。第1項は光の放出を表わしており、自然放射と $\langle n_{k,s} \rangle$ に比例する誘導放射の2成分を含んでいる。第2項は光の吸収を表わす項で入射光子数 $\langle n_{k,s} \rangle$ に比例している。(184)が成立する範囲で長い時間 t を考えたとき、単位時間当りの遷移確率は

$$\begin{aligned} \frac{dP_A}{dt} &= \frac{(\omega_i - \omega_f)^3}{3\pi\hbar\epsilon_0 c^3} u(\omega_i - \omega_f) \\ &\quad + \frac{\pi |\omega_f - \omega_i|}{\hbar\epsilon_0 L^3} \sum_{k,s} |\mu_{fi} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{k,s}|^2 \langle n_{k,s} \rangle \\ &\quad \times \delta(|\omega_f - \omega_i| - \omega_k) \end{aligned} \quad (185)$$

と求められる。ここで、 $u(x)$ は単位ステップ関数であ

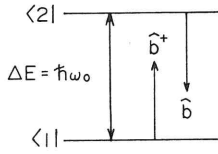


図 5 二準位原子のモデル

り、その係数は Einstein の A 係数である。外部光による原子の光の放射、吸収は原子の準位間のスペクトル拡がりの範囲内に限定されて起こること、遷移は時間に依らず一定の割合で起こることがわかる。

4.3 二準位原子による光の放出

4.3.1 二準位原子の状態ベクトルとエネルギー

図 5 に示すように、二準位原子はエネルギー差 $\hbar\omega_0$ と、完全直交系をなす基底状態 $|1\rangle$ と励起状態 $|2\rangle$ だけで記述できる特殊な系である。したがって、4.1.2 節で導入した原子系の演算子 $\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i$ ($i=1, 2$) を直接使う代りに

$$\hat{b}^+(t) = \hat{b}_2^\dagger(t)\hat{b}_1(t), \quad \hat{b}(t) = \hat{b}_1^\dagger(t)\hat{b}_2(t) \quad (186)$$

で定義される電子の準位を上げる演算子 \hat{b}^+ と降ろす演算子 \hat{b} を使えば記述可能である。このように定義された演算子 \hat{b}^+, \hat{b} 自身も反交換関係式(175)を満たす。また、これらは Pauli スピン演算子 \hat{R}_i と関係があって

$$\begin{aligned} \hat{R}_1(t) &= (\hat{b}^+(t) + \hat{b}(t))/2, & \hat{R}_2(t) &= (\hat{b}^+(t) - \hat{b}(t))/2i, \\ \hat{R}_3(t) &= [\hat{b}^+(t), \hat{b}(t)]/2 \end{aligned} \quad (187)$$

なる式で結ばれている。簡単な計算の結果、演算子 \hat{R}_i は

$$\begin{aligned} [\hat{R}_i(t), \hat{R}_m(t)] &= i\epsilon_{imn}\hat{R}_n(t), \\ \{\hat{R}_i(t), \hat{R}_m(t)\} &= \delta_{im}/2, \quad \sum_{i=1}^3 \hat{R}_i^2(t) = 1/2 \end{aligned} \quad (188)$$

を満足することが容易に確認できる。ここで ϵ_{imn} は反対称単位テンソルである。スピン演算子の期待値 $\langle \hat{R}_i \rangle$ を用いてベクトル $\mathbf{s}(t)$ を

$$s_i(t) = 2\langle \hat{R}_i(t) \rangle \quad (189)$$

と定義する。ここで示す運動方程式の表式法とは違って、もし \mathbf{s} の方程式として系を記述したとすると、その結果は Bloch の方程式の形に帰着する^{26, 27)}。そこで \mathbf{s} は Bloch ベクトルと呼ばれる。ベクトル \mathbf{s} と \hat{R}_i を使って密度演算子 $\hat{\rho}$ を求めると

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{i=1}^3 s_i(t)\hat{R}_i(t) + 1/2, \quad (190)$$

で与えられることがわかる。

点 $r=0$ に静止している二準位原子と光の相互作用を表わす Hamiltonian \hat{H}_I は、(169), (178), (186) から

$$\hat{H}_I = i\omega_0[\mu_{12}\hat{b}(t) - \mu_{12}^*\hat{b}^+(t)] \cdot \hat{\mathbf{A}}(0, t) \quad (191)$$

と求まる。ここで $\mu_{12} = \langle 1|\boldsymbol{\mu}|2\rangle$ は原子系の電気双極子モーメントの期待値である。この式と(169), (178), (187)から、総合的 Hamiltonian は、

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hbar\omega_0\left(\hat{R}_3(t) + \frac{1}{2}\right) + \sum_{k,s} \left(\hat{n}_{k,s} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k \\ &\quad + i\omega_0[\mu_{12}\hat{b}(t) - \mu_{12}^*\hat{b}^+(t)] \cdot [\hat{\mathbf{V}}_A(0, t) + \hat{\mathbf{V}}_A(0, t)] \end{aligned} \quad (192)$$

と書き表わすことができる。

4.3.2 運動方程式

状態ベクトルと Hamiltonian が得られたので運動方程式を求めよう。Heisenberg の方程式(177)を $\hat{b}(t)$ と $\hat{R}_3(t)$ に適用し、交換関係(175), (188)を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} \dot{\hat{b}}(t) &= i\omega_0\hat{b}(t) + (2\omega_0/\hbar)[\hat{R}_3(t)\mu_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{V}}_A(0, t) \\ &\quad + \mu_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{V}}_A(0, t)\hat{R}_3(t)], \end{aligned} \quad (193)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{R}}_3(t) &= -(i\omega_0/\hbar)[\mu_{12}\hat{b}(t) \cdot \hat{\mathbf{V}}_A(0, t) \\ &\quad + \hat{\mathbf{V}}_A(0, t) \cdot \mu_{12}\hat{b}(t) + \mu_{12}^*\hat{b}^+(t) \cdot \hat{\mathbf{V}}_A(0, t) \\ &\quad + \hat{\mathbf{V}}_A(0, t) \cdot \mu_{12}^*\hat{b}^+(t)] \end{aligned} \quad (194)$$

となる。ここで、ゆっくり変化する演算子 $\hat{b}_s(t)$ を

$$\hat{b}_s(t) \equiv \hat{b}(t)\exp(i\omega_0 t), \quad (195)$$

と定義して導入すると、(193)は多少簡単に書ける。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{b}}_s(t) &= (2\omega_0/\hbar)[\hat{R}_3(t)\mu_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{V}}(0, t) \\ &\quad + \mu_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{V}}^*(0, t)\hat{R}_3(t)]\exp(i\omega_0 t). \end{aligned} \quad (193')$$

これらは原子系の状態を記述する運動方程式である。

一方、電磁場の方程式は、電流密度の存在するときの Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial t} &= \nabla \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (196)$$

に従う。式中に現われる電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ は、電子の運動により発生されるもので、計算結果は

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= -i\omega_0 \left[\frac{2}{3} \mu_{12} \delta^3(\mathbf{r}) - \frac{\mu_{12}}{4\pi r^3} + \frac{3(\mu_{12} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi r^5} \right] \hat{b}(t) \\ &\quad + \text{H. c.}, \end{aligned} \quad (197)$$

と与えられる。式(196)からベクトル・ポテンシャル $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ に関する次の波動方程式を導くことができる。

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (198)$$

この方程式の解は、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\quad \times u(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) + \hat{\mathbf{A}}_{\text{free}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (199)$$

である。ここで、 $u(t)$ は単位ステップ関数であり、 $\hat{\mathbf{A}}_{\text{free}}(\mathbf{r}, t)$ は電流に依らずに最初から存在する自由電磁場を

表わす。原子発光を観測するのは、原子から十分に離れた点 $r \gg c/\omega_0$ であるので、 $1/r$ 展開の最低次の項を計算すればよく、また、発光強度が有限となる時刻領域 $t > r/c$ を考えればよい。(199)に(197)を代入し、関係式 $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ から求めた結果を改めて(196)に代入して時間積分を行なうと、最終的には

$$\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega_0^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\mu_{12}}{r} - \frac{(\mu_{12} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} \right] \hat{b}(t-r/c) + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{E}}^{\text{free}}(\mathbf{r}, t) \quad (200)$$

が得られる。この結果は古典的電気双極子振動で発生される電場と同一である。上式から明らかのように、 $\hat{b}(t)$ が求まれば、原子の放射する光の性質が決定できる。

方程式(193'), (194)を解くためには $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}(0, t)$, すなわち、 $\hat{a}(t)$ を決定することが必要である。Heisenberg の方程式(177)から $\hat{a}_{\mathbf{k}, s}(t)$ の従う方程式を求めると、

$$\dot{\hat{a}}_{\mathbf{k}, s}(t) = -i\omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}, s}(t) + \frac{\omega_0}{\hbar L^{3/2}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}} \epsilon_0} \right)^{1/2} \times [\mu_{12} \hat{b}(t) - \mu_{12}^* \hat{b}^+(t)] \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}, s} \quad (201)$$

となる。これを積分して $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}(0, t)$ を求め、双極子モーメントとの内積を計算すると

$$\mu_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}(0, t) = \mu_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{V}}_{\text{free}}(0, t) + \frac{|\mu_{12}|^2 \omega_0}{6\pi^2 \epsilon_0 c^2} \exp(i\omega_0 t) \times \int_0^\infty d\omega \int_0^t dt' \omega \times \exp\{-i(\omega - \omega_0)(t' - t)\} \hat{b}_s(t') \quad (202)$$

が得られる。ただし、計算の途中でスピンの和をとったほか、 \mathbf{k} の和を ω の積分に置き換えて求めた。同様に $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}(0, t)$ と双極子との内積を求め、これらを(193')に代入した後、反交換関係から導かれる $\hat{R}_s(t) \hat{b}_s(t) = -\hat{b}_s(t)/2$ 等の関係式を適用しながら積分を実行し、改めて時間積分を行なうと、

$$\hat{b}_s(t) = \hat{b}_s(0) \exp\{(-\beta + i\gamma)t\} + (2\omega_0/\hbar) \exp\{(-\beta + i\gamma)t\} \int_0^t dt_1 \hat{R}_s(t_1) \times \mu_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{V}}_{\text{free}}(0, t_1) \exp\{(\beta - i\gamma + i\omega_0)t_1\} \quad (203)$$

なる $\hat{b}_s(t)$ の解が得られる。ここで β, γ は

$$\beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{|\mu_{12}|^2 \omega_0^3}{\hbar c^3}, \quad (204)$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\omega_0} \int_0^\infty d\omega \omega P \left[\left(\frac{1}{\omega - \omega_0} \right) - \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} \right) \right]$$

である。式中のPは主値をとることを意味する。 2β は式(185)に現われた Einstein の A 係数であり、 γ が Lamb shift であることは次節で示す。式(194)に対する計算も

同様に行なうことができるが、その結果に改めて(203)を代入すれば

$$\hat{R}_s(t) + \frac{1}{2} = \left[\hat{R}_s(0) + \frac{1}{2} \right] \exp(-2\beta t) - (\omega_0/\hbar) [\hat{b}_s^+(0) \exp(-2\beta t) \times \int_0^t dt' \mu_{12} \cdot \hat{\mathbf{V}}_{\text{free}}(0, t')] \times \exp\{(\beta - i\gamma + i\omega_0)t'\} + \text{H. c.} - 2(\omega_0/\hbar)^2 \exp(-2\beta t) \left[\int_0^t dt' \times \exp\{(\beta - i\gamma + i\omega_0)t'\} \int_0^{t'} dt'' \times \mu_{12} \cdot \hat{\mathbf{V}}_{\text{free}}(0, t'') \hat{R}_s(t'') \mu_{12} \cdot \hat{\mathbf{V}}_{\text{free}}(0, t') \right] \times \exp\{(\beta - i\gamma + i\omega_0)t''\} + \text{H. c.} \quad (205)$$

となって、最終的な $\hat{R}_s(t)$ の解が求められる。

4.3.3 自然放出と蛍光

原子による自然放出を調べるには、密度演算子 $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{\mathbf{A}} \otimes | \{0\} \rangle \langle \{0\} |$ を作用させた対角和をとれば期待値が計算できる。(205)から容易に

$$\langle \hat{R}_s(t) \rangle + \frac{1}{2} = \left[\langle \hat{R}_s(0) \rangle + \frac{1}{2} \right] \exp(-2\beta t) \quad (206)$$

が得られる。これを $\hat{H}_{\mathbf{A}}$ で置き換えれば

$$\langle \hat{H}_{\mathbf{A}}(t) \rangle = \langle \hat{H}_{\mathbf{A}}(0) \rangle \exp(-2\beta t) \quad (207)$$

となって、原子系の励起状態、または、エネルギーの減衰過程が自然に導出された。減衰定数 2β は Einstein の A 係数であり、任意の $t (> 0)$ で正しい式である。一方、(200), (203)からは、

$$\langle \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\omega_0^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\mu_{12} - (\mu_{12} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}/r^2) \langle \hat{b}(0) \rangle \times \exp\{[-\beta - i(\omega_0 - \gamma)](t - r/c)\} \quad (208)$$

が得られて、伝播してきた光の電場が β (強度は 2β) で減衰し、かつ、その角周波数は $\omega_0 - \gamma$ であることがわかる。光のエネルギーは、原子の単位間のエネルギー差 ω_0 より γ だけ小さく、これは Lamb shift である。可視域の発光の典型値を使って γ を計算すると、 ~ 50 MHz となるが、たとえば水素の 2S 状態に対する値 ~ 1 GHz に比べるとかなり小さい。この違いは、実際の原子ではあらゆる状態からの寄与であるのに対し、 γ は一対の状態だけからの寄与であることから理解できる。

時刻 $t=0$ に基底状態 $|1\rangle$ にある原子がレーザーと相互作用して発する共鳴蛍光を調べるときには、密度演算子 $\hat{\rho} = |1\rangle \langle 1| \otimes | \{v\} \rangle \langle \{v\} |$ を作用させたときの期待値を計算すればよい。しかし、実際の計算はかなり煩雑である上に、純数学的計算力を要するだけであるから詳細

は文献に譲るとして²⁸⁾, その結果は

$$\begin{aligned} & \left\langle R_3(t) + \frac{1}{2} \right\rangle_G \\ &= \frac{\Omega^2}{4\beta^2 + 2\Omega^2 + 4\Delta^2} \\ & - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \frac{(2\beta + s_i)[(\beta + s_i)^2 + \Delta^2] \exp(s_i t)}{2(s_i - s_j)(s_i - s_k)s_i} \end{aligned} \quad (209)$$

で与えられる。ここで s_i は 3 次方程式

$$s^3 + 4\beta s^2 + (5\beta^2 + \Omega^2 + \Delta^2)s + \beta(2\beta^2 + \Omega^2 + 2\Delta^2) = 0 \quad (210)$$

の 3 根であり, レーザ一光の場を $\mathcal{E} \exp(-i\omega_L t)$ として, $\Delta = \omega_L - \omega_0 + \gamma$ は離調周波数 (detuning frequency), $\Omega = 2\omega_0 |\mu_{12} \cdot \mathcal{E}| / \hbar$ は Rabi 周波数である。式 (209) からは $[\langle R_3(t) \rangle_G + 1/2]$ の振舞いしか求めることはできないが, 蛍光強度を調べるには十分である。なぜなら, レーザ一と観測方向のなす角を θ として, (200) から

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_E(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle \hat{V}_E^+(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{V}_E(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \frac{|\mu_{12}|^4 \omega_0^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2 r)^2} (1 - \sin^2\theta/2) \\ & \times \left[\langle \hat{R}_3(t - r/c) \rangle + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (211)$$

と計算されるからである。とくに, $\Delta = 0$ のときには,

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_E(\mathbf{r}, t) \rangle_{\Delta=0} &= \frac{|\mu_{12}|^4 \omega_0^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2 r)^2} (1 - \sin^2\theta/2) \frac{\Omega^2}{2\beta^2 + 2\Omega^2} \\ & \times [1 - \exp(-3\beta t/2) (\cos Q\beta t - 3\sin Q\beta t/2Q)] \end{aligned} \quad (212)$$

と変数 β, Ω ($Q = \sqrt{\Omega^2/\beta^2 - 1/4}$) の比較的簡単な関数形で示される。いくつかの変数値に対する $[\langle \hat{R}_3(t) \rangle + 1/2]$ の時間発展を図 6 に示した。特徴的なことは, $t=0$ で必

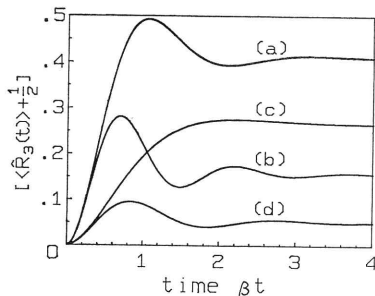


図 6 蛍光強度 (定数因子を除いた項 $[\hat{R}_3(t) + 1/2]$) の時間発展
 (a) $\Omega = 3\beta, \Delta = 0$; (b) $\Omega = 3\beta, \Delta = 3\beta$;
 (c) $\Omega = 1.5\beta, \Delta = 0$; (d) $\Omega = 1.5\beta, \Delta = 3\beta$.

ずゼロとなることである。

蛍光のスペクトル強度分布は, 電場演算子の 2 次の相関関数の Fourier 変換として求めることができる。その結果, AC Stark 効果, Rayleigh 散乱を含めてスペクトル強度分布を完全に説明できるが詳細は文献に譲る²⁸⁾。

4.3.4 蛍光の強度相関

単一モード・レーザ一光中に静止している二準位原子から放射される蛍光の強度相関関数を求めよう。強度相関関数は, (115) より $\langle \mathcal{I} : \hat{I}(t) \hat{I}(t+\tau) : \rangle$ に比例して観測される量であるので, 電場に関する 4 次の相関関数のなかでも

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}, t, \tau) &= \langle \hat{V}_E^+(\mathbf{r}, t) \hat{V}_E^+(\mathbf{r}, t+\tau) \\ & \times \hat{V}_E(\mathbf{r}, t+\tau) \hat{V}_E(\mathbf{r}, t) \rangle \end{aligned} \quad (213)$$

を計算すればよい。また, この式に電場ベクトル演算子 (200) を代入すると, 演算子 $\hat{b}(t)$ の相関 $\langle \hat{b}^+(t) \hat{b}^+(t+\tau) \rangle \times \langle \hat{b}(t+\tau) \hat{b}(t) \rangle$ を調べればよいことがわかる。

式 (205) で時間変数を入れ替えて 0 を t に, t を $t+\tau$ にした後, 両辺の左から $\hat{b}^+(t)$ 右から $\hat{b}(t)$ を掛けて整理すると

$$\begin{aligned} & \langle \hat{b}^+(t) \hat{R}_3(t+\tau) \hat{b}(t) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle \hat{b}^+(t) \hat{b}(t) \rangle - 2(\omega_0/\hbar)^2 \exp(-2\beta\tau) \\ & \times \left[\int_0^\tau dt' \exp\{(\beta - i\gamma + i\omega_0)t'\} \mu_{12} \cdot \mathbf{V}(0, t+t') \right. \\ & \times \int_0^{t'} dt'' \mu_{12} \cdot \mathbf{V}^*(0, t+t'') \langle \hat{b}^+(t) \hat{R}_3(t+t'') \hat{b}(t) \rangle \\ & \left. \times \exp\{(\beta + i\gamma - i\omega_0)t''\} + \text{c. c.} \right] \end{aligned} \quad (214)$$

が得られる。時刻 t に原子が基底状態にある系に対しての期待値を $\langle \rangle_{G,t}$ で表わすことにすると, (205) のこのような期待値は,

$$\begin{aligned} & \langle R_3(t+\tau) \rangle_{G,t} \\ &= -\frac{1}{2} - 2(\omega_0/\hbar)^2 \exp(-2\beta\tau) \\ & \times \left[\int_0^\tau dt' \exp\{(\beta - i\gamma + i\omega_0)t'\} \mu_{12} \cdot \mathbf{V}(0, t+t') \right. \\ & \times \int_0^{t'} dt'' \mu_{12} \cdot \mathbf{V}^*(0, t+t'') \langle \hat{R}_3(t+t'') \rangle_{G,t} \\ & \left. \times \exp\{(\beta + i\gamma - i\omega_0)t''\} + \text{c. c.} \right] \end{aligned} \quad (215)$$

と計算される。左辺全体を未知の関数とする積分方程式 (214) と (215) を比較してみると第 1 項だけが異なっていて積分核はまったく同一である。さらに特徴的なことは積分核に変数 τ が含まれていないことである。(214) の第 1 項は積分方程式にとっては定数であること, およ

び, τ が大きいときには第2項はゼロとなることを考慮すると

$$\langle \hat{b}^\dagger(x) \hat{R}_3(t+\tau) \hat{b}(x) \rangle = \langle \hat{R}_3(t+\tau) \rangle_{G,1} \langle \hat{b}^\dagger(x) \hat{b}(x) \rangle \quad (216)$$

が成立する. したがって, (213)は,

$$\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}, t, \tau) = \langle \hat{I}(t) \rangle \langle \hat{I}(t) \rangle_{G,0} \quad (217)$$

と書き換えられる. 平均強度 $\langle \hat{I}(t) \rangle$ は正の一定値であるので, 強度相関関数の性質は $\langle \hat{I}(t) \rangle_{G,0}$ によって決定される. この値は, (211)に(209)を代入することによって与えられ, $\Delta=0$ のときには(212)となる. すでに述べたように, 変数のあらゆる値に対して常に $\langle \hat{I}(0) \rangle_{G,0}=0$ であるから, 蛍光は光アンチバンチング効果を示すことがわかる.

今回は最終回で, 光検出および光子統計・光子相関を実験との関連を含めて扱う.

文 献

- 0) 上西克二: “光のコヒーレンス 5”, 光学, **15** (1986) 246-255.
訂正 (3)式 ($1/2\omega_k \epsilon_0$) を ($\hbar/2\omega_k \epsilon_0$) に.
- 18) R. J. Glauber: “The quantum theory of optical coherence,” *Phys. Rev.*, **130** (1963) 2529-2539; R. J. Glauber: “Quantum theory of coherence,” *Quantum Optics*, ed. S. M. Kay and A. Maitland (Academic Press, London, 1970) pp. 53-125.
- 19) J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan: *Fundamentals of Quantum Optics* (Benjamin, New York, 1968) p. 147.
- 20) C. L. Metha: “Degree of coherence of arbitrary order,” *Nuovo Cimento*, **45B** (1966) 280-282; C. L. Metha: “Degree of higher-order optical coherence,” *J. Math. Phys.*, **8** (1967) 1798-1807.
- 21) L. Mandel and C. L. Metha: “Higher-order cross-spectral densities of quantized fields,” *Nuovo Cimento*, **61B** (1969) 149-166.
- 22) A. メシア (小出昭一郎, 田村二郎 訳): 量子力学 I (東京図書, 東京, 1971) p. 285.
- 23) Y. Kano and E. Wolf: “Temporal coherence of black body radiation,” *Proc. Phys. Soc. (London)*, **80** (1962) 1273-1276; C. L. Metha and E. Wolf: “Coherence properties of black body radiation I: Correlation tensors of the classical field,” *Phys. Rev.*, **134** (1964) A1143-A1149; C. L. Metha and E. Wolf: “Coherence properties of black body radiation II: Correlation tensors of the quantized field,” *Phys. Rev.*, **134** (1964) A1149-A1153.
- 24) R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss: “Correlation between photons in two coherent beams of light,” *Nature*, **177** (1956) 27-29.
- 25) たとえば, G. A. Vanasse and H. Sakai: “Fourier spectroscopy,” *Progress in Optics VI*, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1967) pp. 259-310.
- 26) J. H. エバリー, L. アレン, 高辻正基: 量子光学入門 (東京図書, 東京, 1974) p. 21.
- 27) H. Haken: *Light, vol. 1* (North-Holland, Amsterdam, 1981) p. 119.
- 28) H. J. Kimble and L. Mandel: “Theory of resonance fluorescence,” *Phys. Rev. A*, **13** (1976) 2123-2144.

講義『光のコヒーレンス』

- 1 「インコヒーレント光源」(黒田和男) 14巻5号 pp. 393-399
- 2 「コヒーレンス関数の伝播・高次のコヒーレンス」(黒田和男) 14巻6号 pp. 485-491
- 3 「部分的コヒーレント照明下の結像(1)」(山本公明) 15巻1号 pp. 64-71
- 4 「部分的コヒーレント照明下の結像(2)」(山本公明) 15巻2号 pp. 150-158
- 5 「自由電磁場の量子論・コヒーレンスの量子論(1)」(上西克二) 15巻3号 pp. 246-255