

研究

放射光による貯蔵リングのビームプロファイル測定の解析

小 方 厚

高エネルギー物理学研究所 〒305 茨城県筑波郡大穂町

(1986年7月28日受理)

Analysis of Beam Profile Measurement of a Storage Ring
Using Synchrotron Radiation

Atsushi OGATA

National Laboratory for High Energy Physics,
Oho-machi, Tsukuba-gun, Ibaraki 305

Intensity distribution of an image formed by the synchrotron radiation is described from the viewpoint to use it as a beam profile monitor of a storage ring. The distribution of beam particles is supposed to be a normal (a Gaussian), whose modification caused by two kinds of optics, a pinhole and a focussing convex lens, are calculated in the phase space. The errors introduced by approximation during the equation derivations are numerically estimated for the TRISTAN AR beam profile monitor working in the Laboratory for High Energy Physics.

1. はじめに

加速器中のビーム断面の粒子分布を知ることは、ビームを応用するためにも、加速器を運転するためにも必要である。電子/陽電子貯蔵リングでは、シンクロトロン軌道放射光の分布をもって、粒子分布とみなしている¹⁻³⁾。たしかに、放射光そのものの分布と粒子分布との関係は単純である。しかし、なんらかの光学系によって得られた放射光の像と粒子分布との関係は単純とはいえない。その理由は二つある。第1は、放射光の方向がレーザー光のように平行ではなく、さりとて太陽光のように一様でもないためである。第2は、ビームが運動しながら放射光を出すため、得られた像は放射光をビーム軌道上で積分したものになるためである。

本報告では、2種類の光学系、すなわちピンホールカメラと凸レンズについて、幾何光学的に、像の分布を粒子分布を示すパラメータによって表わす。この種の計算はすでに Green⁴⁾ によって行なわれている。ただし、同文献は光源においてその位置と方向に相関がないこと(後述する式(2)で $\rho=0$ であること)を前提としている。垂直方向・水平方向のどちらか一方を問題にするのであれば、現実の光源でこれが満たされない場合でもこ

う考えてかまわない。しかしプロファイルモニタのように2次元分布を問題にするときにはより一般的な取扱いが必要である。

以下では Fig. 1 のように座標をとる。すなわち、放射光の進行方向を s 、ビーム軌道面で軌道と垂直・外側を x 、 s と x に垂直な上側を y とする。 $dx/ds=x'$ 、 $dy/ds=y'$ とする。 x と y に共通な記述を行なうときは z を用いる。

以下2章で光源について述べ、3章においてはピンホールカメラおよび凸レンズによって得られる像の分布を計算する。4章では考察を行なう。放射光そのものに関する解説は、文献 4)、5) を参照されたい。

2. 光源における分布

ビーム内の粒子のひろがりを決めるのは、まずベータトロン振動の振幅である。 x 方向の分布では、このほかに分散関数を考慮する必要がある、 y 方向では1個ずつの粒子が放出する光の角度分布を考慮する必要がある。ここでは、まずベータトロン振動による分布を考え、次に y 方向、 z 方向の順でそれを具体化する。

安定なビームでは、 $z'=(z, z')$ を変量とすると粒子分布は2次元正規分布とみなせる。 $z=x$ または y であっ

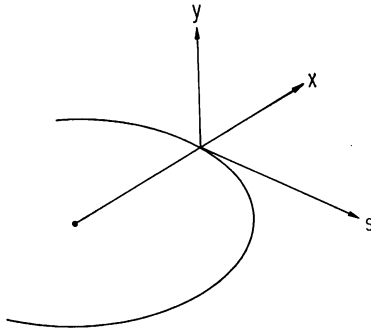


Fig. 1 Coordinates system in this paper.

て、以下“'”でベクトルあるいは行列の転置を表わす。2次元正規分布を

$$N^2(\mathbf{z}; \boldsymbol{\mu}_z, \boldsymbol{\Sigma}_z) = \frac{1}{2\pi |\boldsymbol{\Sigma}_z|^{1/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_z)' \boldsymbol{\Sigma}_z^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_z) \right\} \quad (1)$$

あるいは

$$\mathbf{z} \in N^2(\boldsymbol{\mu}_z, \boldsymbol{\Sigma}_z)$$

によって表わすことにする。 $\boldsymbol{\mu}_z = (\mu_x, \mu_x')$ は平均を表わすベクトル、 $\boldsymbol{\Sigma}_z$ は分散を表わす行列

$$\boldsymbol{\Sigma}_z = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho_x \sigma_x \sigma_x' \\ \rho_x \sigma_x \sigma_x' & \sigma_x'^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

である。 μ_x は閉軌道からのずれ (closed orbit distortion) に対応している。式(2)の各要素は

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \beta_x E_x, & \sigma_x'^2 &= \gamma_x E_x, \\ \rho_x &= -\alpha_x / (\beta_x \gamma_x) \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる。 $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ は Twiss パラメータと呼ばれるもので軌道上のビーム位置により異なる。 E_x はエミッタンスと呼ばれ、ビーム位置によらない。

2次元正規分布 $N^2(\mathbf{z}; \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_z)$ (以下閉軌道からのずれは無視する) は、 (z, z') 平面につりがねを伏せた形をしているが、その変曲点を結ぶと、楕円

$$\frac{1}{1 - \rho_x^2} \left(\frac{z^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho_x z z'}{\sigma_x \sigma_x'} + \frac{z'^2}{\sigma_x'^2} \right) = 1 \quad (4)$$

あるいは $\gamma_x z^2 + 2\alpha_x z z' + \beta_x z'^2 = E_x$ を得る。この楕円を Fig. 2 に示す。また、2次元正規分布を、一方の変量で積分すると、Fig. 2 に示すように1次元正規分布を得る。すなわち、1次元正規分布を

$$N^1(z; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (5)$$

で表わすと

$$\int_{-\infty}^{\infty} N^2(\mathbf{z}; \boldsymbol{\mu}_z, \boldsymbol{\Sigma}_z) dz' = N^1(z; \mu_x, \sigma_x^2) \quad (6a)$$

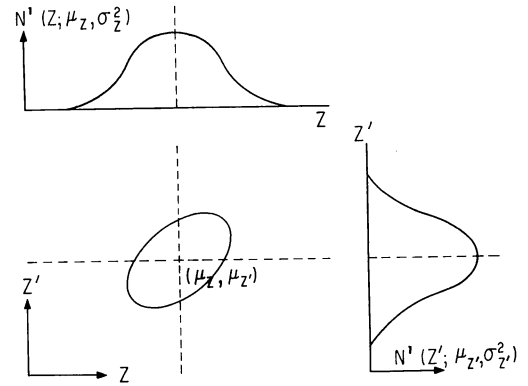


Fig. 2 Beam envelope and beam distributions in the phase space.

$$\int_{-\infty}^{\infty} N^2(\mathbf{z}; \boldsymbol{\mu}_z, \boldsymbol{\Sigma}_z) dz = N^1(z'; \mu_x', \sigma_x'^2) \quad (6b)$$

を得る。式(1)の分布を入力として、式(6a)の出力を与えるのが望ましいプロファイルモニタである。

y 方向の分布について具体的に考えよう。

$$\mathbf{y}_0 \in N^2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{y0})$$

ただし

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{y0} &= \begin{bmatrix} \sigma_{y0}^2 & \rho_{y0} \sigma_{y0} \sigma_{y0}' \\ \rho_{y0} \sigma_{y0} \sigma_{y0}' & \sigma_{y0}'^2 \end{bmatrix} \\ \sigma_{y0} &= \beta_y E_y, & \sigma_{y0}' &= \gamma_y E_y \\ \rho_{y0} &= -\alpha_y / (\beta_y \gamma_y) \end{aligned} \quad (7)$$

の分布に従う個々の粒子が、それぞれ放射光を出す。この放射光の角度分布は厳密にはベッセル関数で表わせるが、これも平均 y_0' 、分散 σ_s^2 の1次元正規分布

$$N^1(y'; y_0', \sigma_s^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp \left\{ -\frac{(y' - y_0')^2}{2\sigma_s^2} \right\} \quad (8)$$

で近似する。ただし

$$\sigma_s = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^{1/3} \quad (9)$$

$$\lambda_c (\text{nm}) = 0.559 \frac{R (\text{m})}{E^3 (\text{GeV})}, \quad \gamma = 1957 E (\text{GeV})$$

とする⁶⁾。 R はビーム軌道の曲率半径、 E はビームエネルギー、 λ_c は放射光の臨界波長である。

結局、光源における放射光の分布は、たたみ込み積分

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} N^2(\mathbf{y}_0; \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{y0}) N^1(y'; y_0', \sigma_s^2) dy_0' &= N^2(\mathbf{y}; \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_y) \\ &= \frac{1}{2\pi \sigma_y \sigma_y' \sqrt{1 - \rho_y^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho_y^2)} \left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\rho_y y y'}{\sigma_y \sigma_y'} + \frac{y'^2}{\sigma_y'^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ただし $(y_0, y_0') = (y, y') = \mathbf{y}'$ とおき、また

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y0}^2, \quad \sigma_y'^2 = \sigma_{y0}'^2 + \sigma_s^2$$

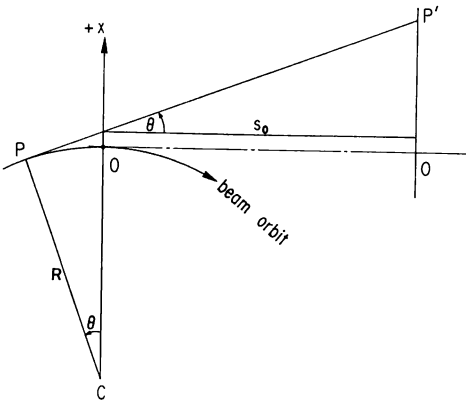


Fig. 3 Beam orbit and radiation trajectory in the orbit plane.

$$\rho_v^2 = \rho_{v0}^2 \sigma_{v0}^2 / (\sigma_x^2 + \sigma_{v0}^2) \quad (11)$$

とした。

x 方向の分布は、粒子の運動量にばらつきがなければ $N^2(x_0; 0, \Sigma_{x0})$ である。ただし

$$\Sigma_{x0} = \begin{bmatrix} \sigma_{x0}^2 & \rho_{x0} \sigma_{x0} \sigma_{x0'} \\ \rho_{x0} \sigma_{x0} \sigma_{x0'} & \sigma_{x0'}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{x0}^2 = \beta_x E_x, \quad \sigma_{x0'}^2 = \gamma_x E_x,$$

$$\rho_{x0} = -\alpha_x / (\beta_x \gamma_x) \quad (12)$$

粒子の運動量にばらつき $\Delta p/p$ があると、さらに x, x' にそれぞれ 1 次元正規分布 $N^1(x; x_0, \sigma_x^2), N^1(x'; x_0', \sigma_{x'}^2)$ が重なる。ただし

$$\sigma_x = \eta \Delta p/p, \quad \sigma_{x'} = \eta' \Delta p/p \quad (13)$$

である。 η は分散関数 (dispersion function) と呼ばれ、軌道上の場所により異なる。 y 方向の場合と異なり、放射光のひろがりには考慮しなくてよいので、光源における x 方向の分布は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N^2(x_0; 0, \Sigma_{x0}) N^1(x; x_0, \sigma_x^2) N^1(x'; x_0', \sigma_{x'}^2) dx_0 dx_0'$$

$$= N^2(x; 0, \Sigma_x) \quad (14)$$

ただし

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho_x \sigma_x \sigma_{x'} \\ \rho_x \sigma_x \sigma_{x'} & \sigma_{x'}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x0}^2 + \sigma_x^2, \quad \sigma_{x'}^2 = \sigma_{x0'}^2 + \sigma_{x'}^2,$$

$$\rho_x^2 = \rho_{x0}^2 \sigma_{x0}^2 \sigma_{x0'}^2 / (\sigma_{x0}^2 + \sigma_x^2)(\sigma_{x0'}^2 + \sigma_{x'}^2)$$

Fig. 3 は (x, s) 平面を示したもので、式 (14) はビームが点 O にあるときにあてはまる。このとき x, x' の平均はともにゼロである。ビームが軌道上 P にあるときの x, x' の平均を $\mu_x, \mu_{x'}$ とすれば、粒子分布 (すなわち放射光分布) は

$$N^2(x; \mu_x, \Sigma_x) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_{x'} \sqrt{1 - \rho_x^2}}$$

$$\times \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho_x^2)} \left\{ \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho_x(x - \mu_x)(x' - \mu_{x'})}{\mu_x \sigma_{x'}} + \frac{(x' - \mu_{x'})^2}{\mu_{x'}^2} \right\} \right] \quad (15)$$

としなければならない。Fig. 3 からわかるように

$$\mu_x = -R(1 - \cos \theta), \quad \mu_{x'} = \tan \theta \quad (16)$$

である。Twiss パラメータは (したがって σ_x 等も) 軌道上の場所の関数である。しかし後述するように、粒子が偏向磁場中で出す放射光を観測するのだから、Twiss パラメータの軌道依存性は考慮する必要がない。また、実際の光学系では、 $\theta \ll 1$ であるから、式 (16) を

$$\mu_x = 0, \quad \mu_{x'} = \theta \quad (17)$$

あるいは

$$\mu_x = -R\theta^2/2, \quad \mu_{x'} = \theta \quad (18)$$

で近似する。文献 1), 4) では式 (18) の近似を採用しているが、ここでは計算の見通しが立ちやすく、また実際的にも許容しうるので式 (17) の近似を採用する。

3. 光 学 系

現在実績のある光学系は凸レンズ (実際は望遠鏡³⁾) とピンホールカメラ⁷⁾ の 2 種類である。レンズを用いる方法は可視領域、ピンホールカメラは X 線領域の放射光を対象とする。可視光を対象とする方法は加速器の真空ダクト中の金属ミラーで可視成分のみを反射させ、サファイア窓でダクト外に導く。この可視光をそのまま TV カメラの受光面に結像させる。レンズ、カメラ等を加速器の放射線から安全な場所に置くために、可視光の光路をミラー、プリズム等で変更することも自由にできる。

このように可視光は操作性はよいが、分解能は回折によって制限される。フラウンホーファ回折による限界は、光源からレンズの開口半径を見込む角を θ_F として

$$r_1 = 0.61\lambda/\theta_F \quad (19)$$

であるとされている。しかし、放射光の y 方向では、もともと開き角が小さいので、式 (19) と次式

$$r_2 = 0.61\lambda/\sigma_x \quad (20)$$

の大きいほうが効く²⁾。 $\lambda = 600 \text{ nm}$, $\theta_F = 10^{-2}$ としてみると、 $r_1 = 0.0366 \text{ mm}$ である。これに対し式 (9) により式 (20) を変形すると $r_2 = 0.983R^{1/3}\lambda^{2/3}$ となり、 $R = 23.3 \text{ m}$ (トリスタン AR の値) としてみると、 $\lambda = 600 \text{ nm}$ では $r_2 = 0.199 \text{ mm}$ となる (同じ高エネルギー-研のトリスタン MR では $R = 246 \text{ m}$, $r_2 = 0.438 \text{ mm}$ である)。

これらの加速器では r_2 のほうが1桁大きい。また σ_y は 1~2mm であるので、 r_2 はプロファイルモニタの使い方によっては無視できない。

この回折限界を逃れるには、より λ の小さい成分を使えばよい。 $\lambda = \lambda_c$ の成分を使い、AR, MR のビームエネルギーをそれぞれ 6.5, 35 GeV とすると、 r_2 はそれぞれ 0.368, 0.134 μm となってしまう。ただし X 線領域を相手にすることになるので、レンズ・ミラーのような便利な部品は使えない。ピンホールカメラの像を蛍光板上に作り、それを TV カメラで見ることになる。ただし、ブラッグ反射を利用した X 線用ミラーをピンホールカメラと組み合わせることは、著者らがテスト中である。

以下では、ピンホールカメラと凸レンズにつき、えられる像の分布を計算する。ここでは、2次元正規分布の次の性質を使う⁸⁾。

「 2×2 行列 A を用い、式(1)の変量 z を

$$z_1 = Az \tag{21}$$

と1次変換すると、 z_1 は $N^2(z_1; A\mu_z, A\Sigma_z A')$ なる分布をなす。すなわち

$$z_1 \in N^2(A\mu_z, A\Sigma_z A') \tag{22}$$

である」。

3.1 ピンホールカメラ

光源において、ベクトル $(z, z)'$ なる光線は、光源・ピンホール間距離を s とすると、ピンホール位置で

$$z_p = Az, A = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

と変換される。すなわち、ピンホールへの入射高は

$$z_p = z + sz' \tag{24}$$

である。大ききゼロのピンホール (理想的ピンホール) は、 $z_p = 0$ すなわち

$$z + sz' = 0 \tag{25}$$

を満たす光線だけを通す。

ピンホール・スクリーン間距離を t とすると、スクリーンにおける光線は、光源における光線と

$$z_1 = A_p z, A_p = \begin{bmatrix} 1 & s+t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

なる関係がある。これから得られる入射高を、式(25)により変形すると

$$z_1 = z + (s+t)z' = tz' = -(t/s)z \tag{27}$$

を得る。式(27)はピンホール像が倒立で、倍率 t/s であることを示している。また、式(25)を式(26)により変換すると、スクリーンにおける関係

$$z_1 - tz_1' = 0 \tag{28}$$

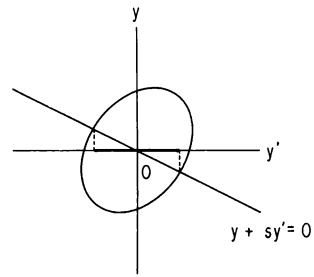


Fig. 4 Beam and pinhole in the y - y' plane.

を得る。

y 方向の像について具体的に考えよう。まず光線が Fig. 3 において点 O にあるときは、式(10)の y を式(26)を用いて $y_1 = A_p y$ と変換することになり、結果は式(22)である。これに式(28) すなわち $z_1' = z_1/t$ を代入するとスクリーンにおける像の分布が

$$i(y_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_{y'}} \sqrt{1-\rho_y^2} \times \exp\left[-\frac{y_1^2}{2(1-\rho_y^2)} \left\{ \frac{s^2}{t^2\sigma_y^2} + \frac{2s\rho_y}{t^2\sigma_y\sigma_{y'}} + \frac{1}{t^2\sigma_{y'}^2} \right\}\right] dr' d\theta \tag{29}$$

と求められる。 r' は開口角、 θ は身道角 (Fig. 3) である。この分布は s が十分大きく、 $\rho_y = 0$ のときに限り

$$i(y_1) \propto \exp\left\{-\frac{y_1^2}{2(t^2/s^2)\sigma_y^2}\right\} dr' d\theta \tag{30}$$

となり、正規分布になる。

これは Fig. 4 から理解できる。 (y, y') 平面にたちかえると、ここではピンホールは直線 $y + sy' = 0$ である。ビームはこの平面で楕円で表わされる。直線のうち楕円の内部にある部分だけがピンホール像に寄与できる。この線分の y 軸への投影は、楕円自体の y 軸への投影よりも短い。 s が十分大きければ、直線は y 軸と一致し、さらにこのとき $\rho_y = 0$ であれば、線分は楕円自体の投影と一致する。

式(29), (30)は光源が Fig. 3 において点 O にあるときを示していた。点 O とピンホールの距離を s_0 とすると、ビームが軌道上の任意の点 P にあるときは、 $s \sim s_0 + R \sin \theta \sim s_0 + R\theta$ とすべきであるが、以後 $s_0 \gg R\theta$ とみなし、 $s \sim s_0$ (一定) とすることにしよう。式(29), (30)は単位角度あたりの光源の作る分布だから、スクリーン上の y 方向の強度分布はこれを θ で積分した

$$j(y_1) dr' = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} i(y_1) dr' d\theta = i(y_1) dr' \Delta\theta \tag{31}$$

である。Δθ の値は後述するように、x 方向の強度から求められる。

軌道上の任意の 1 点による x 方向の像は、式(15)に式(17)を代入し、式(26)で変換し、さらに式(28)により x' を消去すると

$$i(x_1; \theta)dr' = \frac{dr'}{2\pi\sigma_x\sigma_{x'}\sqrt{1-\rho_x^2}} \times \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2(1-\rho_x^2)}\left(\frac{s^2}{t^2\sigma_x^2} + \frac{2s\rho}{t^2\sigma_x\sigma_{x'}} + \frac{1}{t^2\sigma_{x'}^2}\right) + \frac{\theta^2\sigma_x^2t^2 - 2\theta x_1\sigma_x t(s\rho\sigma_{x'} + \sigma_x^2)}{2(1-\rho_x^2)t^2\sigma_x^2\sigma_{x'}^2}\right\} \quad (32)$$

と求められる。スクリーンの像はこれを θ で積分した

$$j(x_1)dr' = \int_{-\infty}^{\infty} i(x_1; \theta)d\theta dr' = \frac{dr'}{2\pi\sigma_x\sigma_{x'}\sqrt{1-\rho_x^2}} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2(1-\rho_x^2)}\left(\frac{s^2}{t^2\sigma_x^2} + \frac{2s\rho}{t^2\sigma_x\sigma_{x'}} + \frac{1}{t^2\sigma_{x'}^2}\right)\right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^2\sigma_x^2t^2 - 2\theta x_1\sigma_x t(s\rho\sigma_{x'} + \sigma_x^2)}{2(1-\rho_x^2)t^2\sigma_x^2\sigma_{x'}^2} d\theta \quad (33)$$

であるが、公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(A\theta^2 + 2B\theta)\} d\theta = \frac{\pi}{A} \exp\left(\frac{B^2}{A}\right) \quad (34)$$

を用いて変換すると

$$j(x_1)dr' = \frac{dr'}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2(t^2/s^2)\sigma_x^2}\right\} \quad (35)$$

となる。この分布は ρ_x と σ_{x'} に影響されない。

y 方向の場合とのちがいは Fig. 5 から理解できる。この図は光源の相平面を示しており、ピンホールは式(25)の直線である。ビームを表わす楕円はビームが移動すると x' 軸上を移動する。ピンホール直線は楕円をいたるところで切ることができるので、式(33)の積分は式(6 a)の積分と同じ効果をもつことができる。

また、x 方向の全強度と y 方向の全強度は当然等しく

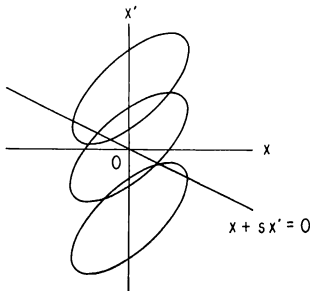


Fig. 5 Beam and pinhole in the x-x' plane. The beam moves along the x' axis as it moves along the orbit in the real world.

なければならない。すなわち、式(31)、(35)について、

$$\int_{-\infty}^{\infty} j(x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} j(y_1)dy_1 \quad (36)$$

でなければならない。これから式(31)の Δθ を求めることができる。

3.2 凸レンズ

凸レンズの光源・スクリーン間の変換行列は、s を光源・レンズ間距離、t をレンズ・スクリーン間距離、p を焦点距離の逆数として

$$A = \begin{bmatrix} 1-pt & s+t-pt \\ -p & 1-ps \end{bmatrix} \quad (37)$$

である⁹⁾。焦点が合っている状態では

$$s+t-pt=0 \quad \text{すなわち} \quad p=(s+t)/(st) \quad (38)$$

で、変換行列は

$$A_t = \begin{bmatrix} -t/s & 0 \\ -(s+t)/(st) & -s/t \end{bmatrix} \quad (39)$$

となる。

ところで、式(6 a)を式(22)に適用すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} N^2(z_1; A\mu_x, A\Sigma_x A') dz_1' = N^1(z_1', (A_{11})\mu_x + (A_{12})\mu_{x'}, (A\Sigma_x A')_{11}) \quad (40)$$

であるが、A として式(39)の A_t をとると

$$N^1(z_1; -(t/s)\mu_x, (t^2/s^2)\sigma_x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t/s)\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(z_1 + (t/s)\mu_x)^2}{2(t^2/s^2)\sigma_x^2}\right\} \quad (41)$$

を得る。z として式(10)の y をとると、Fig. 3 の点 O からの像の y 方向分布が

$$I(y_1) = N^1(y_1; 0, (t^2/s^2)\sigma_y^2) d\theta = \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}(t/s)\sigma_y} \exp\left\{-\frac{y_1^2}{2(t^2/s^2)\sigma_y^2}\right\} \quad (42)$$

と求められる。ただし、式(40)の積分範囲が近似的に (-∞, ∞) とみなせるためには、レンズの y 方向の径が十分大きくなければならない。実際の y 方向の像は式(42)の θ に関する積分であって、式(38)が近似的に成り立つという条件下で、式(31)同様に

$$J(y_1) = I(y_1)\Delta\theta \quad (43)$$

となる。積分範囲が小さいときについては後述する。

x 方向は、式(15)の変量を、式(37)を変換行列として 1 次変換し、x' について積分し、さらに θ について積分したものになる。すなわち

$$J(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x'_{\min}}^{x'_{\max}} N^2(x_1; A\mu_x(\theta), A\Sigma_x A') dx' d\theta \quad (44)$$

x' の積分範囲は次のように考えることができる。レンズの位置における x は、スクリーン位置の x₁ により

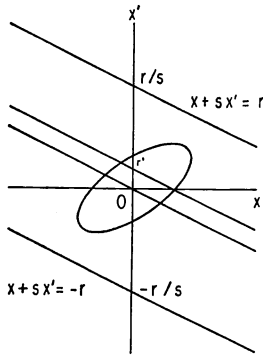


Fig. 6 Beam and aperture in the x - x' plane. The region limited by two lines $x + sx' = \pm r$ can contribute to the image.

$$x_L = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_1$$

すなわち $x_L = x_1 - tx_1'$ (45)

と書ける。レンズの x 方向の径を $2r$ とすると

$$-r \leq x_1 - tx_1' \leq r$$

すなわち

$$(x_1 - r)/t \leq x_1' \leq (x_1 + r)/t \quad (46)$$

を満たす光線がスクリーン像に寄与できる。したがって式(44)はレンズ面のレンズ中心からの x' 方向の距離 r' をパラメータにとり

$J(x_1)$

$$= \int_{-r/s}^{r/s} dr' \int_{-\infty}^{\infty} N^2(x_1; \mathbf{A}\mu_x(\theta), \mathbf{A}\Sigma_x \mathbf{A}') \Big|_{x_1' = x_1/t + r'} d\theta \quad (47)$$

と変形してから評価してもよい。これを **Fig. 6** に即して考えると、光源における位相面では、式(46)の代りに $-r \leq x + sx' \leq r$ を満たす領域、すなわち2直線 $x + sx' = \pm r$ にはさまれた領域の光線がスクリーン像に寄与する。そこでこれらの直線に平行な1本の直線の作る像を、 x' 軸切片 r' をパラメータとして計算し、その結果を r' について $(-r/s, r/s)$ の範囲で積分したことになる。

ふたたび式(38)が成り立つものとして、変換行列として式(39)の \mathbf{A}_t をとろう。すると式(47)の θ に関する積分は ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_t$ として) 式(33)から式(35)を導いたのと同じ手法で行なえ、結果も、当然のことであるが、式(35)と同じである。結局式(47)は

$$J(x_1) = \frac{2(r/s)}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2(t^2/s^2)\sigma_x^2}\right\} \quad (48)$$

となる。また式(43)の $\Delta\theta$ は $2(r/s)/(t/s)$ である。

さて、 y 方向についても、レンズ径が小さいときは、式(47)と同様な方法で計算しなければならない。やはり $\mathbf{A} = \mathbf{A}_t$ とすれば

$$\begin{aligned} I(y_1) &= \int_{-r/s}^{r/s} N^2(y_1; 0, \mathbf{A}_t \Sigma \mathbf{A}_t') \Big|_{y_1' = y_1/t + r'} dr' d\theta \\ &= \frac{r/s}{2\pi\sigma_y\sigma_{y'}} \sqrt{1-\rho_y^2} \exp\left\{-\frac{y_1^2}{2(1-\rho_y^2)} \left(\frac{1}{t^2} \frac{s^2}{\sigma_y^2} + \frac{2s\rho_y}{\sigma_y\sigma_{y'}} + \frac{1}{\sigma_{y'}^2}\right)\right\} \times \int_{-r/s}^{r/s} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{y'}^2(1-\rho_y^2)}\right. \\ &\quad \left. \times \left\{\frac{t^2 r'^2}{s^2} - \frac{2y_1 r'(s\rho_y\sigma_{y'} + \sigma_y)}{s\sigma_y}\right\}\right] dr' d\theta \quad (49) \end{aligned}$$

である。 $r/s \ll 1$ として被積分関数をテーラー展開し、第1項だけをとると、式(29)と同様の結果

$$\begin{aligned} I(y_1) &= \frac{r/s}{2\pi\sigma_y\sigma_{y'}} \sqrt{1-\rho_y^2} \exp\left\{-\frac{y_1^2}{2(1-\rho_y^2)} \left(\frac{1}{t^2} \frac{s^2}{\sigma_y^2} + \frac{2s\rho_y}{\sigma_y\sigma_{y'}} + \frac{1}{\sigma_{y'}^2}\right)\right\} d\theta \quad (50) \end{aligned}$$

$$J(y_1) = I(y_1) \Delta\theta \quad (51)$$

を得る。ところで ρ_y は式(11)で定義したものであったが、大型加速器で可視光を対象とするときは $\sigma_s \gg \sigma_{y0}$ なので、 $\rho_y \sim 0$ とみなせる場合が多い。また、 $s^2/\sigma_y^2 \gg 1/\sigma_{y'}^2$ であるから、式(51)はこの近似下で

$$I(y_1) \propto \exp\left\{-\frac{y_1^2}{2(t^2/s^2)\sigma_y^2}\right\} \Delta\theta \quad (52)$$

すなわち、正規分布に従う。

4. 考 察

以上の議論ではいくつかの近似を導入したが、これらの近似が実際の光学系ではどの程度影響するかを評価しておこう。最初に Twiss パラメータの軌道依存性について補足しておく。放射光はビームの軌道が曲がる時、すなわち、ビームが偏向磁場中にある時に発生する。ところで、偏向磁場中の任意の点にある粒子を位相面上で z 、同じ磁場中を l だけ進んだときを z_l で表わすと分散関数の影響を除けば

$$z_l = \mathbf{T}z, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (53)$$

と近似できる¹⁰⁾。Twiss パラメータも軌道上で式(53)と同じまが合うように変化する。ところでここに現われた変換行列 \mathbf{T} は、すでに式(23)および式(26)で用いたものであって、自由空間の光の進行を表わすものであった。これから次のことがいえる。ビームが出した光は進行するに従い位相面上で変化する。しかしビームが偏向磁場中にあるかぎり、光が到達した各点で、ビームも光と同じように変化している。したがって Twiss パラメー

タが軌道上で変化するために、放射光が作る像にボケが生じるという心配はない。ただし式(16)を式(17)と近似してしまったために、 x 方向には誤差が生じるが、これはボケというよりもブレというのが妥当であろう。

以下では光学系の例として、高エネルギー物理学研究所のトリスタン AR 加速器のプロファイルモニタのものをとりあげ、数値的に検討する。ここでは凸レンズ(市販のカメラ用 1,000 mm の望遠レンズ)を用いている。

この光学系では y 方向の視角 r/s は実際はレンズ径ではなく真空ダクトの高さで決まっており、1.25 mrad 程度である。 $\lambda=600$ nm, $E=5$ GeV とすると、式(9)から $\sigma_s=1.83$ mrad となり、この状況では式(42)ではなく式(50)をあてはめるべきである。式(50)を式(52)と近似できるかどうかは次の問題である。まず σ_{v0} はフルカプリングの場合(すなわち最大の場合)でも σ_s の数分の1であり、通常は σ_s の数%である。また σ_s は mm, $\sigma_{v'}$ は mrad のオーダーであり、この光学系では $s=8$ m なので、数%以下の誤差で $1/\sigma_{v'}^2$ を s^2/σ_v^2 に対して無視できる。結局式(52)を採用したときの誤差は数%である。より正確な見積りは具体的に Twiss パラメータに基づいて行なう必要があるが、これは加速器の運転方法により異なる。

次に x 方向であるが、まず視角 r/s はやはり実質的には真空ダクトの形状で定まっており、真空ダクト中に入れた金属ミラーの放射線損傷から ~ 2.5 mrad と推定される。式(16)を式(17)と近似したことは、 x 方向に $R\theta^2/2$ の誤差をもたらすが、AR の軌道半径 $R=23.3$ m を用いると、これは $72 \mu\text{m}$ となる。AR の σ_x は $1.5 \sim 2.5$ mm なので、数%の誤差になる。前述のようにこれはブレを生ずるがこのブレは Fig. 3 が示すように、軌道外側には存在せず内側で著しい。

以上の考察からわかるように、レンズを用いた光学系の視野は、 y 方向には大きく(式(42)が成り立つため)、 x 方向には小さい(誤差が小さくなるため)ことが望ましい。 y 方向に十分大きくとれないときは、次善の策として y 方向にも小さくしてしまうことであり、こうすれば式(50)ひいては式(51)が成り立つ。これはレンズの前に絞りを置くことで実践されるが、二つの問題を考慮する必要がある。第1は光量の問題で、第2は式(19)で示した回折の問題である。

以上の計算と実践の結果を以下にまとめる。まず X 線・ピンホールの組合せでは、式(29)が示すように、 y 方向の分布が求められない(ピンホールをスキャンする機構があれば可能である)。

可視光・凸レンズの組合せは、回折限界が問題である(式(19), (20))。 y 方向の視野が十分大きければ、 y 方向の分布は完全に求められる。一方、 y 方向の視野を絞れば、 y 方向の分布が近似的に求まる(式(42), (50), (51))。 x 方向の視野を大きくすると、軌道の曲率がもたらす誤差 $R\theta^2/2$ が大きくなる。

なお、実際にトリスタン AR においてビームプロファイル測定を行なった結果は、文献 11) にまとめられている。

最後に、トリスタン AR 用プロファイルモニタ製作にあたりご助力いただいたトリスタンビームグループの諸氏、ならびに本報告の内容を検討していただいた加速器理論グループの諸氏にお礼申し上げます。

文 献

- 1) A. P. Sabersky: "The geometry and optics of synchrotron radiation," Part. Accel., 5 (1973) 199-206.
- 2) A. Hofmann: "Electron and proton beam diagnostics with synchrotron radiation," IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-28 (1981) 2132-2136.
- 3) A. Ogata and Y. Mizumachi: "Optical beam diagnostics in TRISTAN accumulation ring," Proc. 5th Symp. Accelerator Sci. and Tech. (KEK, Tsukuba, 1984) pp. 151-153.
- 4) G. K. Green: "Spectra and optics of synchrotron radiation," BNL Report 50522 (Brookhaven National Laboratory, 1976).
- 5) 石井武比古: "シンクロトロン放射光学: 第1講 シンクロトロン放射概論", 分光研究, 35 (1986) 82-95.
- 6) J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1976) pp. 672-679.
- 7) A. Hofmann and K. W. Robinson: "Measurement of cross section of a high-energy electron beam by means of the X-ray portion of the synchrotron radiation," IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-18 (1973) 937-938.
- 8) 北川敏男編: 多変量解析論 (共立, 東京, 1967) pp. 8-12.
- 9) A. Gerrard and J. M. Burch: *Introduction to Matrix Methods in Optics* (Wiley, London, 1975) pp. 24-75.
- 10) K. G. Steffen: *High Energy Beam Optics* (Interscience, New York, 1965) p. 101.
- 11) A. Ogata, T. Ieiri, K. Nakajima and Y. Mizumachi: "Transverse and longitudinal beam profile measurement using optical techniques in TRISTAN accumulation ring," IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-32 (1985) 1944-1946.