



フーリエ変換ホログラム素子の最適設計

浜野 康和・大頭 仁

早稲田大学理工学部応用物理学科 〒160 東京都新宿区大久保 3-4-1

(1986年10月9日受理)

Optimum Design for Holographic Fourier Transform Optical Element

Yasukazu HAMANO and Hitoshi OHZU

Department of Applied Physics, School of Science and Engineering, Waseda University,
3-4-1, Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo 160

A new method for Fourier transform holographic optical elements is proposed. The method is based on the fact that the analytical optimum phase transfer function is derived in an iterative from using a variational principle so as to minimize mean-squared wave-front error. By an iteration method, the optimum transform functions are obtained both for a holographic optical element with and without a lens. The performance of these elements is evaluated.

1. はじめに

ホログラム光学素子（以下 HOE と略す）として、フーリエ変換ホログラムの研究が、さまざまな方法で進められている。研究の重点を大きく二つに分けると、HOE の最適な位相伝達関数を求めることが、その製作方法である。前者に関しては、まず数値的手続きをよぶのが挙げられる。Fairchild ら¹⁾は位相伝達関数を多項式に展開し、その係数を最適化ルーチンにより求めている。Ishii ら²⁾もフーリエ変換 HOE ではないが反射型ホログラムレンズの研究で類似のアプローチを用いている。解析的な手続きによるものは、Winick ら³⁾の研究が挙げられるが、出射波として望まれる波面と実際の波面との間の 2 乗平均波面収差を定義し、それを最小にすることにより位相伝達関数を求めている。彼らは入射波の数を有限個に限定し、解析的に解き、最適な解は複雑な計算を行なうことによって求めるようしている。Kedmi ら⁴⁾は同様の考え方だが、入射波を連続なパラメータの関数として考え、いくぶん粗な近似を使って解析的手法のみで解いている。次に製作方法に関しては、計算機ホログラム（以下 CGH と略す）を用いた 2 段階記録方式が多く行なわれている^{2,4)}。CGH には干渉縞タイプのものが使われ、現在は μm 以内で制御できる電子ビームやレーザービームの描画装置などがあり、正確に高解像度記録ができるため精度のよいものが製作可能

となっている。

本研究ではこれらの研究を参考にし、より最適なフーリエ変換 HOE の設計を行なったものである。またフーリエ変換素子に、大きな屈折力を要求する場合 HOE だけだと困難であり、その解決法として単レンズと HOE の組み合わせたものを提案し、その HOE の設計をも行なった。この場合の HOE はフーリエ変換単レンズの収差補正の役割ももつ。

2. 最適設計の方法

Winick ら³⁾は、位相 $\phi_{n,\text{in}}(y)$ で表わされる N 個の入射波が位相伝達関数 $\phi_{\text{HOE}}(y)$ のホログラム素子により位相 $\phi_{n,\text{out}}(y)$ の N 個の出射波となり、その出射波と望まれる出射波との 2 乗平均波面収差 E^2 を最小にするような $\phi_{\text{HOE}}(y)$ を解析的に出す方法を提案している。本研究では、この離散的パラメータの有限個の入射波、出射波を連続パラメータ β （方向余弦）をもつ無限個の波で考えることにする。入射波、出射波の位相の関係は次の(1)式で表わされる。簡単のため、すべて一次元とする。

$$\phi_{\text{out}}(y, \beta) = \phi_{\text{in}}(y, \beta) + \phi_{\text{HOE}}(y) \quad (1)$$

次に、2 乗平均波面収差 E^2 は

$$E^2 = \eta \iint P(y, \beta) \times [\phi_{\text{out}}(y, \beta) - \phi(y, \beta) + R(\beta)]^2 dy d\beta \quad (2)$$

で定義される。ただし、

$$\phi(y, \beta) = \phi_{\text{in}}(y, \beta) + \phi_{\text{H}}(y, \beta) \quad (3)$$

である。

また、重み関数は考えないことにする。 η は規格化定数であり、 $P(y, \beta)$ は開口関数であり、その入射する部分を 1、その他を 0 とする。 $R(\beta)$ は $\phi_{\text{out}}(y, \beta)$ の波面を $R(\beta)$ だけ移動させて波面収差を最小にする摂動項である。積分領域は、関数 $P(y, \beta)$ を用いていることにより y, β に関して全領域と考えてよい。(1)式および(3)式を(2)式に代入すると次のように表わせる。

$$G(\phi_{\text{HOE}}, R) \equiv \iint P(y, \beta) \times [\phi_{\text{HOE}}(y) - \phi_{\text{H}}(y, \beta) + R(\beta)]^2 dy d\beta \quad (4)$$

$$E^2 = \eta \cdot \min G(\phi_{\text{HOE}}, R) \quad (5)$$

ここで G は ϕ_{HOE} と R を変数にもつ汎関数である。 G を最小にする $\phi_{\text{HOE}}(y)$ を求めるため、(4)式の変分をとると、

$$\begin{aligned} & G(\phi_{\text{HOE}} + \delta\phi_{\text{HOE}}, R + \delta R) - G(\phi_{\text{HOE}}, R) \\ &= 2 \iint P(y, \beta) [\phi_{\text{HOE}}(y) - \phi_{\text{H}}(y, \beta) \\ &\quad + R(\beta)] \delta\phi_{\text{HOE}}(y) dy d\beta \\ &\quad + 2 \iint P(y, \beta) [\phi_{\text{HOE}}(y) - \phi_{\text{H}}(y, \beta) \\ &\quad + R(\beta)] \delta R(\beta) dy d\beta + O((\delta\phi)^2, (\delta R)^2) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。 G が最小値をとる場合の必要条件は、(6)式の右辺第1項、第2項が $\forall \delta\phi_{\text{HOE}}, \forall \delta R$ で 0 となることである。すなわち次式を満たさなければならない。

$$\int P(y, \beta) [\phi_{\text{HOE}}(y) - \phi_{\text{H}}(y, \beta) + R(\beta)] d\beta = 0 \quad (7)$$

$$\int P(y, \beta) [\phi_{\text{HOE}}(y) - \phi_{\text{H}}(y, \beta) + R(\beta)] dy = 0 \quad (8)$$

(7), (8)式より $R(\beta)$ を消去すると、

$$\begin{aligned} \phi_{\text{HOE}}(y) &= \frac{1}{\int P(y, \beta) d\beta} \left\{ \int P(y, \beta) \phi_{\text{H}}(y, \beta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\int P(y, \beta) dy} \int P(y, \beta) [\phi_{\text{H}}(y, \beta) \right. \\ &\quad \left. - \phi_{\text{HOE}}(y)] dy \right\} d\beta \end{aligned} \quad (9)$$

となる。これは、左辺の ϕ_{HOE} を ϕ_{n+1} 、右辺のそれを ϕ_n とした場合、反復計算となる。最適な $\phi_{\text{HOE}}(y)$ が求まるためには ϕ_n が収束しなければならない。それを調べるために、次式のように定数 C を定義する。

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A [\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y)]^2 dy \\ &= C \int_{-A}^A [\phi_n(y) - \phi_{n-1}(y)]^2 dy \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 A はホログラム素子の入射瞳の半径である。任意の $n(n \geq 2)$ に対して、このときの定数 C が $C \leq 1$ となれば $\phi_n(y)$ は収束するといえる。(9)式より

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(y) - \phi_n(y) &= \frac{1}{\int P(y, \beta) d\beta} \int P(y, \beta) \left\{ \int P(y, \beta) \right. \\ &\quad \left. \times [\phi_n(y) - \phi_{n-1}(y)] dy \right\} d\beta \end{aligned} \quad (11)$$

となるが、両辺 2乗した後、積分して(10)式と同じ形にして、定数 C に当たるものを実際の場合について計算してみればよい。しかし、変形の際定数 C に当たるものを大きく押えていくことになり評価しきれない可能性がある。その場合には、(10)式の C の値を実際(9)式の数値計算を反復して行ないながら逐次求め、さらに $\phi_n(y)$ の収束状況を調べる必要がある。結果的に $\phi_n(y)$ が収束している場合 $\phi_{\text{HOE}}(y)$ が求まることになるが、これは十分条件ではなく必要条件から出した結果なので、性能評価の際注意すべきである。 $\phi_{\text{HOE}}(y)$ は相対位相であり、したがって定数値を加えても同様に最適な $\phi_{\text{HOE}}(y)$ である。

つまり、連続パラメータをもつ入射波を定義し、望まれる出射波と実際の出射波との 2乗平均波面収差を最小にするような $\phi_{\text{HOE}}(y)$ を解くことになる。結果は(9)式のように反復計算となり、これが収束することにより位相伝達関数 $\phi_{\text{HOE}}(y)$ が求まる。

3. フーリエ変換ホログラム素子の設計と評価

3.1 数値計算

Fig. 1 のようにフーリエ変換光学系を考える。フーリエ変換作用の基本は、object から回折した光をいろいろな方向余弦 β をもつ平面波の重ね合わせで考え、それぞれの波面が HOE の後焦点面で $y' = f \cdot \beta$ に収束することである⁵⁾。方向余弦 β の平面波に対応する位相伝達関数は次のように表わせる。

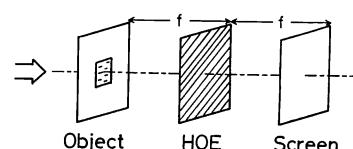


Fig. 1 The optical system for Fourier transformation with a holographic optical element.

$$\phi_H(y, \beta) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\sqrt{(y - f \cdot \beta)^2 + f^2} + y \cdot \beta \right] \quad (12)$$

波長 λ は 514.5 nm とする。 $P(y, \beta)$ は物体の大きさ、 物体と HOE の距離、 および空間周波数の最大値によって決める関数である。 本論文では物体の大きさ 10 mm, f 50 mm, HOE の直径 30 mm, β は物体の中心と HOE の瞳の端を結ぶ直線と、 光軸との角度の正弦を上限とした。 このとき $P(y, \beta)$ は次のようになる。

$$P(y, \beta) = \text{rect}\left(\frac{y}{30}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y - f \cdot \tan \theta_1}{10}\right) \quad (13)$$

$$\tan \theta_1 = \beta / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (14)$$

次に、 反射計算を行ないながら C の変化、 位相伝達関数 $\phi_n(y)$ の収束状況を調べてみる。 反復計算の際の積分計算は、 スプライン関数補間を用いて行なった。

Fig. 2 が定数 C の変化であり反復計算 40 回ぐらいうからにはもうほとんど収束して $C=1$ となっている。 $\phi_n(y)$ も一定の関数に収束しており、 目的の $\phi_{HOE}(y)$ が求められていることがわかった。 また、 初期値を変えて行なってみたが、 C の値は類似の変化をし、 $\phi_n(y)$ は同じものに収束した。

3.2 結果と評価

次に、 求められた $\phi_{HOE}(y)$ を使ってその性能評価を行なう。 Winick らの方法で $\phi_{HOE}(y)$ を求めるまでの計算が彼ら自身理論どおり行なっていないほど複雑であることより、 本研究は彼らの方法とは定性的に比較を行なうこととする。 本方法の(9)式に当たるもののが次式のとおりである。

$$\phi_{HOE}(y) = \frac{1}{\sum_{n=1}^N P_n(y)} \sum_{n=1}^N P_n(y) [\phi_{H,n}(y) - R_n] \quad (15)$$

ここで、 P_n が 0 と 1 の値をとる開口関数であるゆえ、

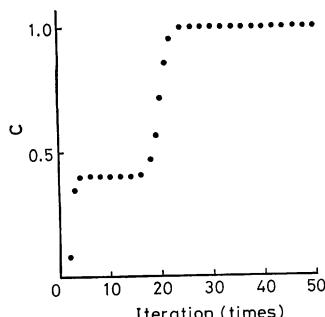


Fig. 2 Relation between constant C and times of iteration.

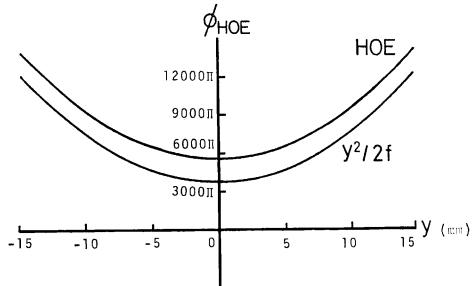


Fig. 3 Phase transfer function $\phi_{HOE}(y)$. The difference between two curved lines becomes smaller for the large $|y|$ value.

$\phi_{HOE}(y)$ は Σ の要素数の 2 倍の点で不連続となる。 本方法では要素数無限大と考えており連続となる。 また計算方法においては、 本方法では単に数値 2 重積分を反復して行なうのみでありプログラミングが簡単である。 要するに彼らが、 HOE に入射すると考える平面波を離散的にとったため考慮に入れられなかった平面波を本方法では考慮に入れ、 結果的に位相伝達関数を連続関数に導くことができた点と計算方法を単純化した点で異なる。

先に述べた Kedmi ら⁴⁾の方法は本方法と同様連続パラメータを使っていくぶん粗な近似により解析解を導いている。 その結果は近軸における最適な関数と同様の $\phi_{HOE}(y) = (2\pi/\lambda) \cdot (y^2/2f)$ (以下 ϕ_k と記す) となっており、 本研究ではこの関数と結果を比較することにする。

Fig. 3 が求められた関数である。 図から明らかのように $|y|$ が大きくなるとわずかに ϕ_k と相違していることがわかる。 **Fig. 4** は物体から θ° の傾きをもつ平面波が出て、 HOE に入射する場合のスクリーン上でのスポットダイヤグラムである。 これらは物体面上で物体の端から端まで等間隔に 21 点とり、 それぞれの点からの光線追跡により導き出される。 横軸の中心を各点の平均値となるようにし、 また各点に適当な幅をもつシンク関数の 2 乗を対応させそれらを合成することにより近似的に密度を表わすようにしている。 傾きごとにシフトさせて表わしているが(a), (b)は同条件で描写している。 (a), (b)を比較すると大きな傾きになると本方法のほうがわずかに収束がよいようだが、 これは **Fig. 5 (a)** の RMS スポットサイズより明白となる。 数値的には、 スポットの収束度は $0^\circ \sim 8^\circ$ 付近までは同程度であり、 8° より大きな傾きでは RMS 値で 10% 以内でスポットが小さくなっていることがわかる。 この図で θ が 10° 附近から値が急激に落ちているのは、 光線追跡を行なう際

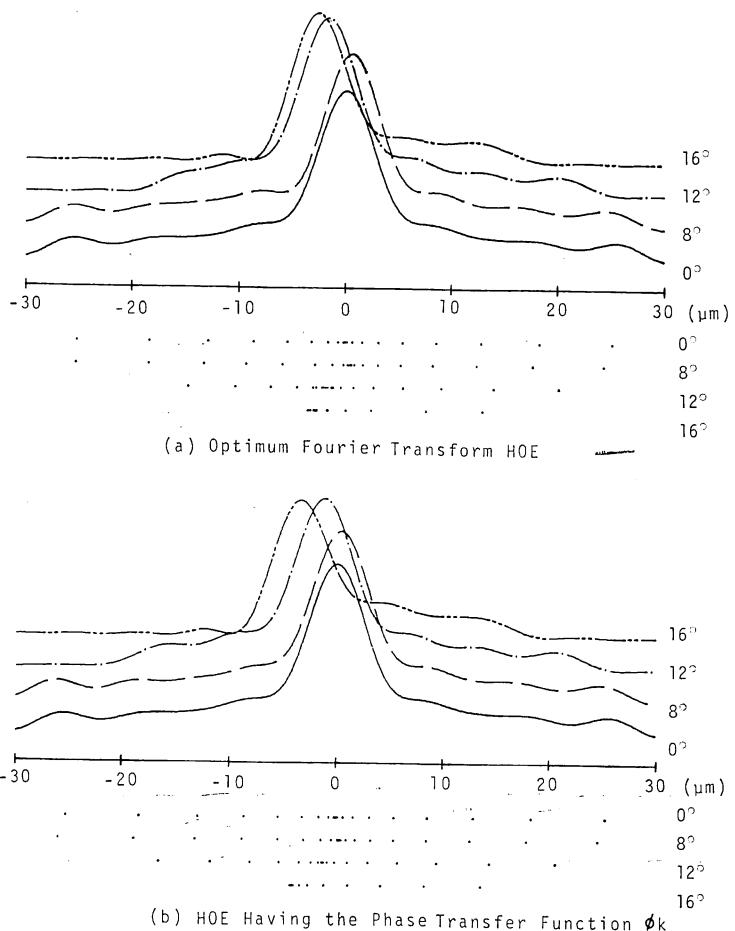


Fig. 4 Spot diagrams predicted by ray tracing and densities of the points. The densities are approximately calculated by using the convolution between a function expressing these points and square of sinc function.

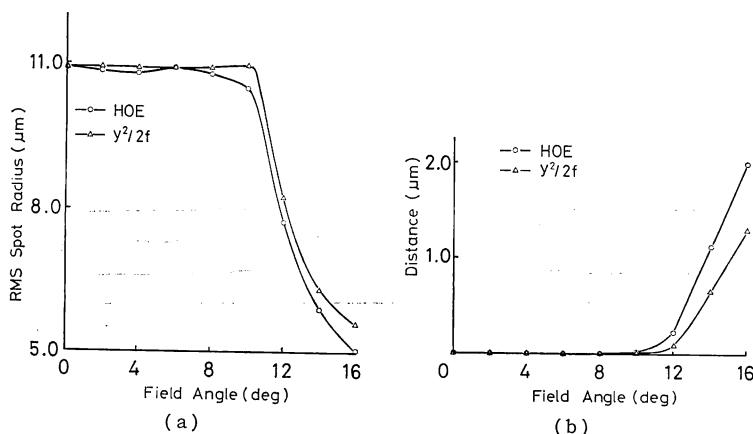


Fig. 5 Performances versus field angles θ . A plane-wave with field angle θ on the object plane goes through a holographic optical element and reaches screen. (a) is values of RMS spot radius. (b) is the distance between real point and result point which is center of spot on screen.

HOE の瞳 $P(y, \beta)$ にさえぎられる本数が増すため、スクリーン上でのばらつきが少なくなるためである。

Fig. 5 (b) はスポット中心の理想点からのずれを表わしており、 θ の大きな値ではスポットの位置が正確な点からはずれていくことがわかるが、これに関しては空間周波数の測定の場合などには歪曲を考慮に入れておけばよ

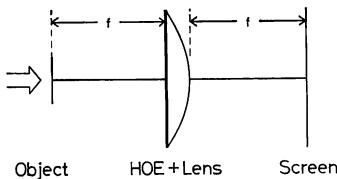


Fig. 6 The optical system for Fourier transformation with a lens and a holographic optical elements.

い。すなわち、近似的解析解と比較した結果同等以上の性能をもつことより本方法の有効性が確認される。計算時間についても $\phi_{\alpha}(y)$ を 129 点のサンプリングでスプライン関数補間を使って行なうと、(9)式の反復計算 50 回、計 100 秒程度（約 15 MIPS の大型計算機の cpu-

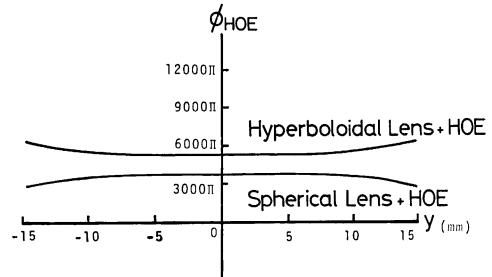


Fig. 7 Phase transfer function $\phi_{\text{HOE}}(y)$.

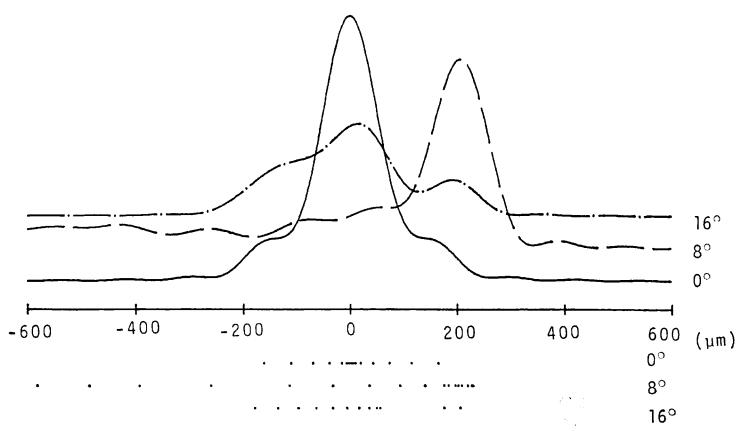
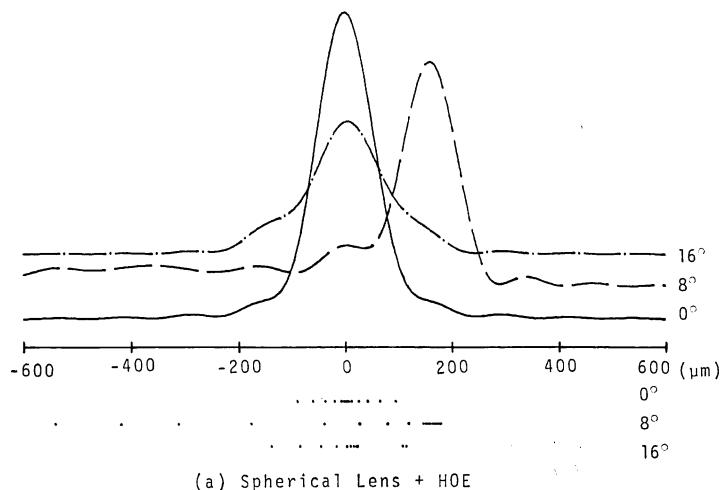


Fig. 8 Spot diagrams predicted by ray tracing and densities of the points. The densities are approximately calculated by using the convolution between a function expressing these points and square of sinc function.

time) で求められた。

4. フーリエ変換用単レンズの収差補正

前節で述べたように、 y の大きな値に対してはホログラム素子の干渉縞の間隔は $2\mu\text{m}$ 以内であり、実際に製作するのはむずかしい。また、HOE の屈折力にも限度があると考えられる。

そこで、次に、レンズと HOE の結合したものを考え、HOE はレンズの収差補正の働きをさせることにする。

Fig. 6 の光学系での HOE の位相伝達関数 $\phi_{\text{HOE}}(y)$ を求める。 $\phi_{\text{H}}(y, \beta)$ は物体から方向余弦 β で出た波面がスクリーン上で点に収束するように位相を補正する関数であり、光線追跡によって求める。その際 y, β ともに等間隔に 129 点サンプリングを行なって $\phi_{\text{H}}(y, \beta)$ を

求めた。他の詳細については前述のとおりである。レンズ材質の屈折率 $n = 1.491$ 、焦点距離 $f = 50\text{ mm}$ 、厚さ 10 mm の平凸球面レンズと $n = 1.491$ 、離心率 $e = 1.491$ 、 $f = 50\text{ mm}$ 、厚さ 10 mm の双曲面レンズの 2 種類について(9)式の反復計算を行なって $\phi_{\text{HOE}}(y)$ を求めた。どちらの場合も定数 $C \leq 1$ であり、収束した $\phi_{\text{HOE}}(y)$ を求めることができた。**Fig. 7** が求められた $\phi_{\text{HOE}}(y)$ である。**Fig. 8, 9** がその性能を表わしている。球面レンズでは θ の値全体にわたってかなり性能がよくなっているが、双曲面レンズでは、 0° 付近ではレンズの収差が非常に少ないため逆に悪くなり、全体的にも球面レンズの場合ほど性能がよくなっていない。また、どちらとも HOE だけの場合より性能がかなり劣っている。これらのこととは、すべての $\phi_{\text{H}}(y, \beta)$ に対してそのどれにも近い $\phi_{\text{HOE}}(y)$ を導き出しているため、 $\phi_{\text{H}}(y, \beta)$ が β に関して変化が大きいものほど全体としての性能が落ちる、ということで説明がつくと思われる。

どのような面のレンズと HOE を組み合わせれば最適になるかが、次の問題と思うが、定性的には y に関する関数 $\phi_{\text{H}}(y, \beta)$ がパラメータ β に対して変動が最も少なくなる面を考えればよいことになる。

5. 結 語

本研究では、連続パラメータをもつ個々の位相伝達関数を定義し、そのパラメータのすべての値に対して 2 乗平均波面収差を最小にする位相伝達関数を、変分法の利用の結果である反復計算によって求めた。すべて 1 次元の場合について行なったが、2 次元への拡張については、数値計算の際、なるべく少ないサンプル点で、かつ扱う関数の精度のよい 2 次元補間値が必要となり、2 次元のスプライン関数を使うことが考えられる。

本研究に対し、本学小松進一教授から多大の有益な助言をいただいたことに感謝する。

文 献

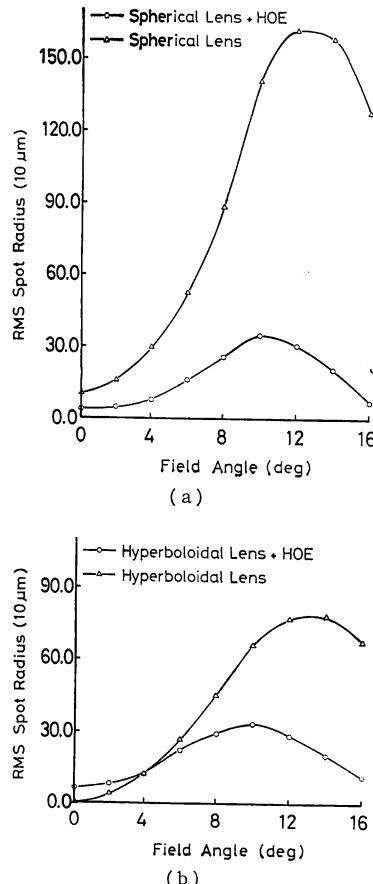


Fig. 9 Performances versus field angles θ . A plane-wave with field angle θ on the object plane goes through a holographic optical element and lens and reaches screen. (a) is the case of spherical lens. (b) is the case of hyperboloidal lens.

- 1) R. C. Fairchild and J. R. Fienup: "Computer-generated aspheric holographic optical elements," Opt. Eng., **21** (1982) 133-140.
- 2) Y. Ishii and K. Murata: "Reflection holographic lens having nonspherical wavefront designed by a microcomputer," Opt. Commun., **47** (1983) 303.
- 3) K. A. Winick and J. R. Fienup: "Optimum holographic elements recorded with nonspherical wave fronts," J. Opt. Soc. Am., **73** (1983) 208.
- 4) J. Kedmi and A. A. Friesem: "Optimal holographic Fourier-transform lens," Appl. Opt., **23** (1984) 4015.
- 5) K. von Bieren: "Lens design for optical Fourier transform systems," Appl. Opt., **10** (1971) 2739.