

研究

球面収差のある場合の正弦条件

渋谷 真人・真島 清人・浪川 敏之

日本光学工業(株)光学部 〒140 東京都品川区西大井 1-6-3

(1986年11月29日受理)

The Sine Condition in the Presence of Spherical Aberration

Masato SHIBUYA, Kiyoto MASHIMA and Toshiyuki NAMIKAWA

Optical Designing Department, Nippon Kogaku K. K.,
1-6-3, Nishi-Ohi, Shinagawa-ku, Tokyo 140

Previous authors have discussed the sine condition in the presence of spherical aberration. However, their interpretations do not coincide with each other completely. In this work, considering the pupil curvatures and the meaning of pupil coordinates, present authors derive the new sine condition. The Staebble-Lihotzky condition guarantees the constancy of shape of the pencil, but the new condition corresponds to the constancy of lateral aberration on the Gaussian image plane. Finally, these conditions are compared numerically with each other by tracing rays through real optical systems.

1. はじめに

球面収差のある場合の正弦条件について、多くの研究がなされているが、必ずしも統一的な見解があるとはいえない。正弦条件の意味するところが不明確であったり、また、その意味を誤解していることが、多く見受けられる。

有名な Staebble-Lihotzky の正弦条件は^{1,2)}、主光線に対する光線束の形が不変である条件であり^{3,4)}、物点が光軸に垂直に動いたときに波面収差が不変である(横収差は波面収差を瞳座標で微分することにより求まるので、瞳全面の波面収差が物点移動に対して不変ならば、横収差も不変)条件とは異なる。また、Hopkins^{5,6)}は波面収差が不変である条件として正弦条件を求めているが、瞳座標の意味が不明確である。Hopkins 自身、後に瞳座標の取り方に注意を促しているが^{7,8)}、瞳座標が明確に定義されなければ、波面収差も横収差も不明瞭な値となる。われわれは、瞳座標に注意し、さらに瞳面の湾曲の性質に着目して、波面収差が不変なための条件を導出した。

最後に、実際の光学系で光線追跡を行ない、Staebble-Lihotzky の条件、Hopkins の条件、および新正弦条件

を比較した。新正弦条件が、コマ収差のない状態を最もよく表わすこと、および、Staebble-Lihotzky の条件が、光線束の形が不変である状態に対応していることが、数値的にも確認された。

2. 新正弦条件の導出

2.1 無収差結像における瞳面の湾曲

無収差結像状態における瞳の M 湾曲(メリディオナル光束の集光点の湾曲を M 湾曲、サジッタル光束のそれを S 湾曲と呼ぶことにする)を求める。Fig. 1 に示すように、軸上物点 O、および近軸軸外物点 Q より、メリディオナル面内に射出する光線を考える。Hopkins が canonical coordinate を提唱することにより指摘しており⁷⁾、また著者の一人も考察しているように⁸⁾、瞳座標の取り方は重要である。それによれば、軸上物点からの光線と、軸外物点からの光線とが、結像に関して同一の意味(働き)をもつとき、それらの光線が光軸とのなす角度 θ 、 θ' が次式を満足する。

$$\sin \theta' - \sin \Delta = \sin \theta \quad (1)$$

ここで、 Δ は Q からの主光線と光軸のなす角である。(1)式の関係は、像側テレセントリックな、収差のよく補正された光学系において、実際に成立することが確認

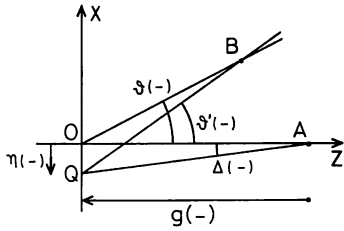


Fig. 1 Meridional plane in the object space. B is on the meridional pupil surface.

されている⁸⁾. **Fig. 1** より, $\overline{OQ} = \eta$ が十分に小さいとして,

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \tan \Delta = \sin \Delta = -\eta/g \\ \cos \Delta &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる. また, 二つの光線は次の二つの式で表わせる.

$$X = -Z \cdot \tan \theta \quad (3)$$

$$X = \eta - Z \cdot \tan \theta' \quad (4)$$

(1)および(2)式を用いて, (4)式は次のように変形される. 以下の変形において, η の2乗より高次の項を無視している.

$$\begin{aligned} X &= \eta - Z \cdot \sin \theta' / \cos \theta' \\ &= \eta - Z \cdot (\sin \theta + \Delta) / \sqrt{1 - (\sin \theta + \Delta)^2} \\ &\doteq \eta - \frac{Z}{\cos \theta} \cdot \left(\sin \theta - \frac{\eta}{g} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式と(3)式より,

$$Z = -g \cdot \cos^3 \theta \quad (6)$$

となり, (6)式と(3)式より,

$$X = g \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \quad (7)$$

となる. (6)および(7)式は交点Bの軌跡を表わしている. また, (6), (7)式より, θ を消去すると, 次式のようなになる.

$$Z^2 + X^2 = g^2 \cdot \cos^4 \theta = \{g^2 \cdot Z^4\}^{1/3} \quad (8)$$

これらの関係は, 無収差のときには, 射出瞳についても成立する. また, **Fig. 1** において, $|OB| = -g \cdot \cos^2 \theta$ が成立している.

2.2 新正弦条件

Fig. 2 に, 球面収差がある場合の様子が示されている. O' は O の近軸像点である. 軸上物点からの光線と, それに対応する近軸外物点からの光線との像側における交点(射出瞳)は, 球面収差のない場合の点 B' から B'' に変位するが, その量はただか, 球面収差程度であり, さらに球面収差が射出瞳から近軸像点までの距離 $g' = \overline{A'O'}$ よりも十分小さければ, 直線 $B''O'$ の光軸とのなす角 ξ' について, $\cos \delta = 1$, $\sin \delta = \delta$ を用いることにより次式が成立する.

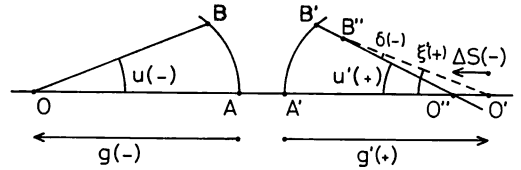


Fig. 2 Meridional ray from an on-axis object point in the presence of spherical aberration. O' is the Gaussian image of O .

$$\begin{aligned} \sin \xi' &= \sin (u' + \delta) \\ &= \sin u' + \delta \cdot \cos u' \\ &= \sin u' + \frac{\Delta S \cdot \sin u'}{B''O'} \cdot \cos u' \\ &= \sin u' + \frac{\Delta S \cdot \sin u'}{g' \cdot \cos u'} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, δ は $B''O'$ と $B''O''$ とのなす角, ΔS は球面収差である.

次に, 軸上物点 O から像点 O' への波面収差 W_0 と近軸外物点 Q から像点 Q' への波面収差 W_Q とを比較する. **Fig. 3** において, 実線の円は点 O または O' を中心とする参照球面であり, 破線の円は点 Q または Q' を中心とする参照球面である. [] を光路長を示す記号とすると,

$$W_0 = [BB'']_{OB} - [CoCo']_{OA}$$

$$W_Q = [BB'']_{QB} - [CqCq']_{QA}$$

となり, B と B'' とが近接二光束の交点であることより, $[BB'']_{OB} = [BB'']_{QB}$ であり,

$$W_Q - W_0 = -[CqCq']_{QA} + [CoCo']_{OA}$$

となる. $\eta = \overline{OQ}$, $\eta' = \overline{O'Q'}$ が微量であり, A と A' とが共役であることより, $[AA']_{QA} = [AA']_{OA}$ であり,

$$\begin{aligned} W_Q - W_0 &= -\{[CqA]_{QA} + [A'Cq']_{QA}\} \\ &\quad + \{[CoA]_{OA} + [A'Co']_{OA}\} \\ &= [CoA]_{OA} - [CqA]_{QA} + [A'Co']_{OA} \\ &\quad - [A'Cq']_{QA} \\ &= [QCq]_{QA} - [OCc]_{OA} + [Cq'Q']_{QA} \\ &\quad - [Co'O']_{OA} \\ &= [QB] - [OB] + [B'Q'] - [B'O'] \end{aligned}$$

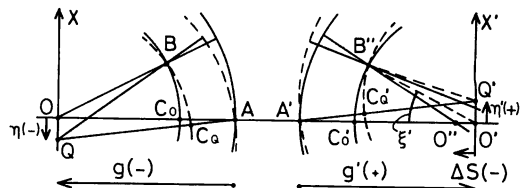


Fig. 3 Reference surfaces. Solid lines represent surfaces centered at O or O' . Dotted lines represent surfaces centered at Q or Q' .

$$=n \cdot \eta \cdot \sin u - n' \cdot \eta' \cdot \sin \xi' \quad (10)$$

となる。ここで、 n は物側屈折率、 n' は像側屈折率である。アイソプラナチックな条件

$$W_0 - W_Q = 0 \quad (u \text{ に関係なく成立})$$

に、(9)、(10)式を代入して、新正弦条件が次式で表わされる。

$$\Delta S = g \cdot \cos u' \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'} - 1 \right) \quad (11)$$

ここで、 $\beta = \eta'/\eta$ は、近軸倍率である。

3. 新正弦条件の意味

(11)式が、すべての光線(開口角)について成立していれば、コマ収差がなく、結像はアイソプラナチックとなる。しかしながら、特定の光線(開口角)についてのみ成立している場合には、アイソプラナチックではない。(11)式が特定の開口角 u について成立していると、(9)、(10)式を用いて、

$$\beta = \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin \xi'} \quad (12)$$

となるが、これは、 O からの角度 u をもった微小平面波が、 O' に対して、角度 ξ' をもった微小平面波として結像に寄与していると解釈できる。それゆえ、特定の光線について、正弦条件(11)式が成立すれば、光線 $OBB''O'$ と、光軸の回りに微小回転した同様の光線との結像を考えることにより、サジタル光束による倍率が近軸倍率 β に等しいことになる。

この点について、瞳のS湾曲を考えることにより、以下のように説明できる。Fig. 4 に、軸上物点 O からの YZ 面内への光線と、それに対応する軸外物点 Q からのスキュー光線とを考える。おのおのの光線の単位ベクトルを、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} とし、主光線の単位ベクトルを \mathbf{a}_0 、 \mathbf{b}_0 とすると、 \mathbf{a} の Y 軸への方向余弦 ν 、および Fig. 1 に示してある Δ を用いて

$$\mathbf{a}_0 = (0, 0, 1)$$

$$\mathbf{a} = (0, \nu, \sqrt{1-\nu^2})$$

$$\mathbf{b}_0 = (-\sin \Delta, 0, \sqrt{1-\sin^2 \Delta})$$

となる。さらに、瞳座標の意味より、((1)式参照)

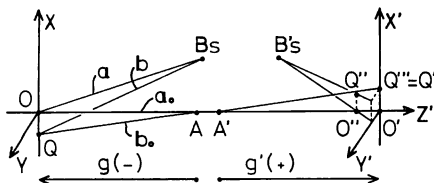


Fig. 4 Skew rays. B_s and B'_s are both on the saggital pupil surfaces and on the YZ -plane.

$$(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0)_{x,y} = (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)_{x,y}$$

となる。ここで、 $()_{x,y}$ は、 X 成分および Y 成分を示す。これらの式より、

$$\mathbf{b} = (-\sin \Delta, \nu, \sqrt{1-\nu^2-\sin^2 \Delta})$$

となるが、物体高 η が十分小さいと考え、 η/g の1次の項までとると、

$$-g \cdot \mathbf{a} = (\eta, 0, 0) - g \cdot \mathbf{b}$$

となる。これは、点 O より半径 $|g|$ の YZ 平面内の円周上の点 B_s で、二つの光線が交わることを示している。像側でも同様のことが成立し、その点を B'_s とする。球面収差のある場合、 B'_s は変位するが、それを無視し、二つの光線 $O B_s B'_s O''$ と $Q B_s B'_s Q''$ とを考える。さらに、光線 $O B_s B'_s O''$ と、光軸の回りに微小回転した同様の光線を考え、クラジウスの公式⁹⁾を適用すると、 $\nu = \sin u$ として、

$$\frac{O''Q''}{OQ} = \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'}$$

となる。次に、直線 $B'_s Q''$ を $X'Z'$ 平面上に射影して考えると、 B'_s が O' を中心とし、半径 g' の円周上にあることより、 X' 軸との交点 Q''' は次式の関係を満たす。

$$\frac{O'Q'''}{OQ} = \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'} \cdot \frac{g' \cdot \cos u'}{g \cdot \cos u' + \Delta S}$$

正弦条件(11)式が成立すれば、

$$\frac{O'Q'''}{OQ} = \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin \xi'} = \beta$$

となり、スキュー光線近傍の X 方向倍率が、近軸倍率に等しいことがわかる。すなわち、 Q''' は近軸像点 Q' に一致する。

実際、(11)式が特定の開口角の光線についてのみ成立している場合、その開口角のメリディオナル面内のコマ収差は存在するが、スキュー光線の X 方向の倍率は、近軸倍率と一致することが、光線追跡によって確かめられる。

4. Staebble-Lihotzky の条件

Staebble-Lihotzky の条件^{1,2)} について考えてみる。この条件は、主光線の回りの光線束の形が不変であることを意味している。Fig. 5 に示すように、射出瞳中心 A' を通り、メリディオナル面に垂直な軸の回りに微小角 Δ' 回転すると、対応する光線の交点 B' が $A'O'$ を直径とする円周上にある。なぜなら、平面内において、直線のある点の回りに微小回転したときの、回転前後の二つの直線の交点は、回転中心の点から直線へおろした垂

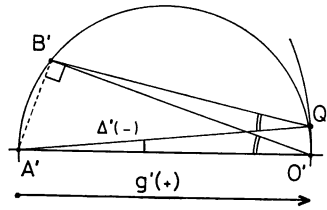


Fig. 5 Infinitesimal rotation of the pencil of rays around the axis passing A' and perpendicular to the meridional plane.

線の足の位置と一致するからである。また、Q'はA'O'を半径とし、A'を中心とする円周上にある。B'がA'O'を直径とする円周上にあることより、(9)式のかわりに、

$$\sin \xi' = \sin u' + \frac{\Delta S \cdot \sin u'}{g'} \quad (13)$$

が成立し、2.2節と同様の論法をすすめると、Staeble-Lihotzky の条件^{1,2,10)}、

$$\Delta S = g' \cdot \left(\frac{n \cdot \sin u}{\beta \cdot n' \cdot \sin u'} - 1 \right) \quad (14)$$

が導かれる。

5. 数値計算

新正弦条件 ΔS_1 、Staeble-Lihotzky の条件 ΔS_2 、および Hopkins の条件^{5,6,10)} ΔS_3 を次式のように表わし、実際の光学系について光線追跡によって比較した。

$$\Delta S_1 = g' \cdot \cos u' \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'} - 1 \right) \quad (15)$$

$$\Delta S_2 = g' \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'} - 1 \right) \quad (16)$$

$$\Delta S_3 = \frac{g'}{\cos u'} \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'} - 1 \right) \quad (17)$$

物体側 NA=0.1, 倍率 $\beta = -0.2$, 物体高 $X = -0.1$, 物側, 像側とも屈折率が1, 入射側テレセントリックの条件で, コマ収差を十分によく補正(入射側で開口角の等しい, 上下二つのメリディオナル光線について, 横収差の大きさが等しく, 符号が反対となっている)し, また, M像面湾曲がないようにした。このときの球面収差 ΔS と, $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ を Fig. 6 に示す。これからわかるように, 新正弦条件が最もよくアイソプラナチックな状態に対応している。なお, ペッツバル和は -0.00132 , 射出瞳から像面までの距離は $g' = 17.68044$ mm である。

次に, 主光線と垂直な平面内でコマ収差がないように補正した。また, 射出瞳からガウス像点までの距離と, M像点までの距離が等しくなるように, M像面湾曲が

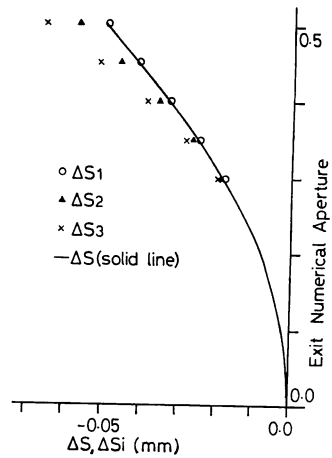


Fig. 6 Spherical aberration and sine conditions. The isoplanatic condition is satisfied at the Gaussian image plane.

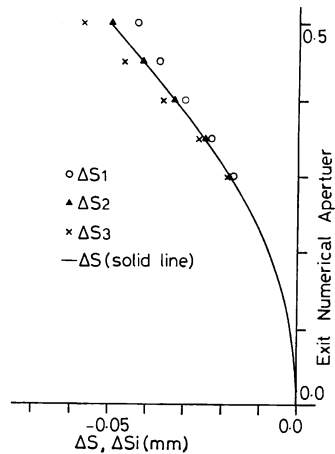


Fig. 7 Spherical aberration and sine conditions. Constancy of shape of the pencil is satisfied.

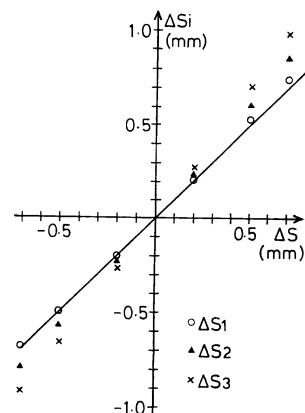


Fig. 8 The sine conditions. The isoplanatic condition is satisfied at the Gaussian image plane.

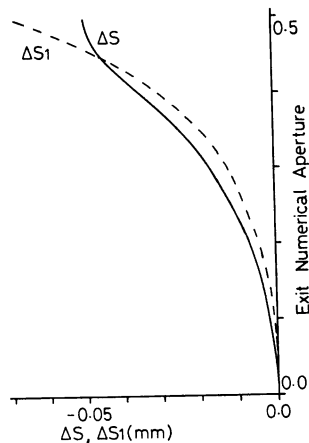


Fig. 9 Spherical aberration and the new sine condition. The new sine condition is satisfied only at a certain NA.

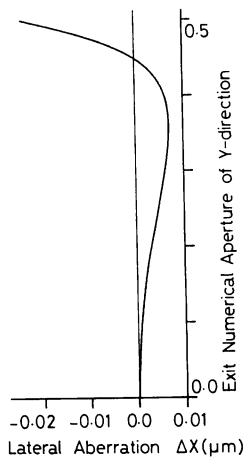


Fig. 10 Lateral aberration of skew ray. The optical system is the same as that of Fig. 9.

存在するようにした。ペッツバル和は 0.00716 であり、 $g'=30.37843$ mm である。Fig. 7 に ΔS , ΔS_1 , ΔS_2 , ΔS_3 を示すが、光束が主光線の回りに不変である状態を Staeble-Lihotzky の条件が、最もよく表わしている。

Fig. 8 は、コマ収差と M 像面湾曲がないときの、物側の NA=0.1 の光線の球面収差 ΔS を変えたときの正弦条件、 ΔS_1 , ΔS_2 , ΔS_3 をプロットしたものである。やはり、新正弦条件 ΔS_1 が最もよくアイソプラナチックな状態を表わしている。

Fig. 9 は、球面収差 ΔS , 新正弦条件 ΔS_1 をプロッ

トしたものである。NA および倍率は Fig. 6, Fig. 7 の場合と同じである。M 像面湾曲はなく、 $g'=17.54376$ mm であり、ペッツバル和は、 -0.00128 である。また、Fig. 10 は、そのときの物体高 $X=-0.1$ から、YZ 平面に平行に出たスキュー光線について、その Y 方向の像側 NA と、像面における X 方向の横収差とをプロットしたものである。Fig. 9 で ΔS と ΔS_1 が交わる NA と、Fig. 10 で $\Delta X=0$ となる NA とが、ほぼ一致する。このことは、3 章の正弦条件の意味の説明が妥当であることを示している。

6. ま と め

球面収差のある場合の正弦条件について検討し、また、数値計算を行なった。従来の Staeble-Lihotzky の条件が、主光線の回りの光線束の形が不変の条件であることが、あらためて確認された。そして、ガウス平面内のアイソプラナチックな条件としては、新しく求めた正弦条件が適切であることがわかった。とくに、像側の開口角 (NA) が 0.4 より大きい (F ナンバーが 1.3 より小さい) ときには、従来の正弦条件と新正弦条件の差が明らかとなる。レンズ系の評価だけでなく、レンズの自動修正などに有効と考える。

文 献

- 1) V. M. Berek: レンズ設計の原理, 三宅和夫訳 (講談社, 東京, 1970) pp. 83-87.
- 2) C. Hofmann and H. Zöllner: "Die Abbesche Sinusbedingung von 1873 und ihre Weiterentwicklung in den vergangenen 100 Jahren," Feingerätetechnik, 22, No. 4 (1973) 151-159.
- 3) W. T. Welford: "The most general isoplanatism theorem," Opt. Commun., 3 (1971) 1-6.
- 4) R. Stettler: "Die Isoplanasie-Bedingung als hinreichende Bedingung," Optik, 72, No. 2 (1986) 59-63.
- 5) H. H. Hopkins: "The optical sine-condition," Proc. Phys. Soc., 58 (1946) 92-99.
- 6) H. H. Hopkins: Wave Theory of Aberrations (Oxford University Press, London, 1950) pp. 39-45.
- 7) H. H. Hopkins: "Aberration theory and lens design," Proceedings of the Conference on Photographic and Spectroscopic Optics, Tokyo (1964), Jpn. J. Appl. Phys., 4, Suppl. I (1965) pp. 31-35.
- 8) 渋谷真人: "不遊条件と OTF の計算", 光学 13 (1984) 40-48.
- 9) 久保田広: 光学 (岩波書店, 東京, 1964) pp. 284-286.
- 10) E. Dietzsch: "Wellenoptische Ableitung von Isoplanasie- und Sinusbedingungen und einige Folgerungen," Feingerätetechnik, 22, No. 4 (1973) 160-162.