研究

球面収差のある場合の正弦条件の3次収差論による検討

渋谷　眞人・真島　清人・浪川　敏之

日本光学工業(株)光学部　〒140 東京都品川区西大井 1-6-3

(1987年4月14日受理)

The Investigation of the Sine Condition in the Presence of Spherical Aberration from the View of 3rd-Order Aberration Theory

Masato SHIBUYA, Kiyoto MASHIMA and Toshiyuki NAMIKAWA

Optical Designing Department, Nippon Kougaku K. K.,
1-6-3, Nishi-Ohi, Shinagawa-ku, Tokyo 140

In our previous letter, by investigating the curvatures of object, image and pupil surfaces, we derived and proposed the new sine condition in the presence of spherical aberration and also derived the traditional Staeble-Lihotzky condition. In this work, the propriety of the relations of these curvatures is examined through their consistency with relations obtained by the 3rd-order aberration theory. As a result of the examination, it is pointed out that the relations of curvatures described in our previous letter show no contradiction, but the relations of those appeared in the traditional explanation of Staeble-Lihotzky condition show definite contradiction with the relations obtained by the 3rd-order aberration theory.

1. はじめに

球面収差のある場合の正弦条件を，物点が光軸に対して垂直に動いたときに，波面収差が一定である条件として，瞳座標に注意してすでに定式化したが[1]，これを導く際に，入射瞳面および射出瞳面の湾曲を利用した．収差論によって，光学系のもつ収差間には，いくつかの関係が成立しなければならない．今回，われわれは，正弦条件を導く際に用いた，瞳面の湾曲が，3次収差論から要請される関係を満足することを確認した．このことは，われわれの正弦条件が妥当であることの一つの保証と考えられる．

また，従来公知の Staeble-Lihotzky の条件は[2,3]，主光線に対する光線束の形が不変である条件であるが[4,5]，われわれは，われわれの正弦条件を求めたのと同様の方法で，Staeble-Lihotzky の条件をすでに導いている[1]．その際にも，物面，像面，入射瞳面および射出瞳面の湾曲を考えたが，それらの関係が，3次収差論に矛盾しないことも今回確認した．しかしながら，Staeble-Lihotzky の条件の従来の説明において用いられている湾曲は[2,3]，3次収差論と矛盾していることを示した．

われわれの求めた正弦条件は[1]，

$$\Delta S=g'\cdot\cos u'\left(\frac{1}{\beta}\cdot\frac{n\cdot\sin u}{n'\cdot\sin u'}-1\right)$$

と表わされ，上式が満足されるときにコマ収差が発生しない．一方，Staeble-Lihotzky の条件は[1-3]，

$$\Delta S=g'\left(\frac{1}{\beta}\cdot\frac{n\cdot\sin u}{n'\cdot\sin u'}-1\right)$$

と表わされる．ここで，ΔS は残存球面収差，g' は射出瞳からガウス像点までの距離，u は入射光線の傾き，u' は射出光線の傾き，n は物側屈折率，n' は像側屈折率，β は近軸結像倍率である．これらの関係を，**Fig. 1** に示す．**Fig. 1** において，A は入射瞳中心，A′ は射出瞳中心，O は軸上物点，O′ はガウス像点を示す．

2. 新正弦条件導出で考えた瞳面の湾曲

新正弦条件を導く際に考えた[1]，瞳面の湾曲を，**Fig. 2** に示す．また，入射瞳，射出瞳のおのおののM湾曲およびS湾曲（以後，メリディオナル光束の集光点の湾曲をM湾曲，サジッタル光束のそれをS湾曲と呼ぶ）は，

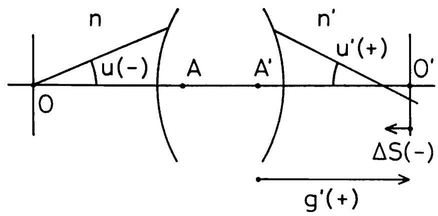

Fig. 1 Oblique ray.

次式で示される[1]．

$$\left.\begin{aligned} &Z^2+X^2=(g^2\cdot Z^4)^{1/3} && \text{入射瞳のM湾曲}\\ &Z^2+X^2=g^2 && \text{入射瞳のS湾曲}\\ &Z'^2+X'^2=(g'^2\cdot Z'^4)^{1/3} && \text{射出瞳のM湾曲}\\ &Z'^2+X'^2=g'^2 && \text{射出瞳のS湾曲}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで，g は入射瞳から物点までの距離，g' は射出瞳から像面までの距離である．Z, X, Z', X' は，**Fig. 2** に示される座標である．(1)式より，入射瞳中心Aまたは射出瞳中心 A′ における曲率半径を求めると，次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &R_M^S=g/3 \qquad R_S^S=g\\ &R_M'^S=g'/3 \qquad R_S'^S=g'\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

R は曲率半径を示し，以後，右肩のSは瞳を意味し，右下のMおよびSは，M湾曲，S湾曲を意味し，′（ダッシュ）のない場合は物空間，ある場合は像空間を意味する．また，曲面が左に凸のとき，曲率半径を正と約束する．

また，新正弦条件を導く際には，物面および像面は平面と考えているので，物体中心および像中心における曲率半径は，次のようになる．

$$R_M=R_S=R_M'=R_S'=\infty \quad (3)$$

ここで，右下の添え字およびダッシュは(2)式と同様の意味であり，右肩のSがないので物面または像面を意味する．

3. 3次収差係数と湾曲の関係

物体結像および瞳結像の像面湾曲の3次収差係数，III, IV, III^S, IV^S の間には，次の関係がある[6]．

$$\begin{aligned} III^S-III&=IV^S-IV\\ &=\alpha'\cdot\bar{\alpha}'/n'^2-\alpha\cdot\bar{\alpha}/n^2 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで，α は近軸光線の換算入射傾角，α' は換算射出傾角，$\bar{\alpha}$ は瞳近軸光線の換算入射傾角，$\bar{\alpha}'$ は換算射出傾角であり，次式で表わされる．

$$\alpha=n/\hat{g} \quad (5)$$

$$\bar{\alpha}=-\hat{g}/g \quad (6)$$

$$\alpha'=n'/\hat{g}' \quad (7)$$

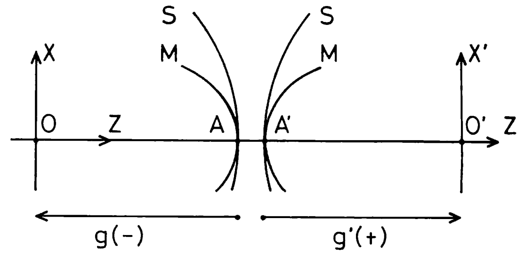

Fig. 2 Pupil curvatures. These curvatures are considered when the new sine-condition is derived.

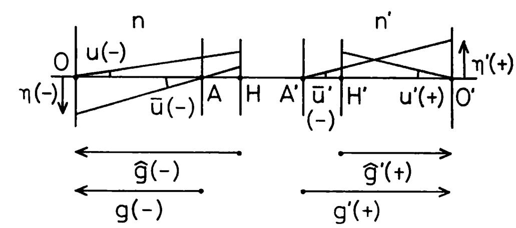

Fig. 3 Definition of various quantities adopted in this work.

$$\bar{\alpha}'=-\hat{g}'/g' \quad (8)$$

ここで，$\hat{g}$ は物側主点から物点までの距離，$\hat{g}'$ は像側主点から像点までの距離，n は物側屈折率，n' は像側屈折率である．また，換算傾角 $\alpha, \alpha', \bar{\alpha}, \bar{\alpha}'$ は実際の傾角 $u, u', \bar{u}, \bar{u}'$ に，それぞれ対応する空間の屈折率を乗じたものであり，たとえば，$\alpha=n\cdot u$ である．**Fig. 3** に二つの近軸光線の様子を示す．H は物側主点，H′ は像側主点である．

$\alpha, \bar{\alpha}$ は初値であるが，このとき $\alpha', \bar{\alpha}'$ が(7)，(8)式で表わされることを以下に示す．**Fig. 3** において，η は近軸物体高，η' は近軸像高であり，近軸倍率 β によって次のように結び付けられる．

$$\eta'/\eta=\beta$$

また，ガウス光学の関係により，次式が成立している．

$$\beta=(n\cdot\hat{g}')/(n'\cdot\hat{g})=\alpha/\alpha'$$

上式と，(5)式より，

$$\alpha'=\{(n'\cdot\hat{g})/(n\cdot\hat{g}')\}\cdot\alpha=n'/\hat{g}'$$

が求まる．また，$\bar{\alpha}'$ は，**Fig. 3** を参照にして次のように求めることができる．

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}'&=n'\cdot\bar{u}'\\ &=-n'\cdot\eta'/g'\\ &=(-n'/g')(\alpha/\alpha')\eta\\ &=(-n'/g')(\alpha/\alpha')(-g\cdot\bar{u})\\ &=(n'/g')(\alpha/\alpha')(g\cdot\bar{\alpha}/n) \end{aligned}$$

$$= -(n'/n)(g/g')(n/\hat{g})(\hat{g}'/n')(\hat{g}/g)$$
$$= -\hat{g}/g'$$

物体を平面とした場合の像面湾曲の曲率半径 r'_M, r'_S および入射瞳を平面としたときの射出瞳湾曲の曲率半径 r'^S_M, r'^S_S は，3次収差論より，次式で表わされる[6].

$$\left.\begin{aligned} 1/r'_M &= -n'(2III+IV) \\ 1/r'_S &= -n'\cdot IV \\ 1/r'^S_M &= -n'(2III^S+IV^S) \\ 1/r'^S_S &= -n'\cdot IV^S \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

(4)～(9)式より，

$$1/r'^S_M - 1/r'_M = 3n'(1/n'g' - 1/ng) \quad (10)$$

$$1/r'^S_S - 1/r'_S = n'(1/n'g' - 1/ng) \quad (11)$$

となる．(10)，(11)式は3次収差論より要請される関係式であり，いかなる軸対称光学系に対しても，常にこれが成立する．

4. 新正弦条件導出における湾曲と収差係数の関係

新正弦条件導出において考えた，湾曲(2)式および(3)式が(10)，(11)式を満足することを示す．入射瞳から射出瞳への横倍率 β^S および縦倍率 γ^S はガウス光学より，次式で表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \beta^S &= \bar{\alpha}/\bar{\alpha}' \\ \gamma^S &= (\beta^S)^2(n'/n) = (\bar{\alpha}/\bar{\alpha}')^2(n'/n) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

また，物体から像への横倍率 β および縦倍率 γ は次式で表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \alpha/\alpha' \\ \gamma &= \beta^2(n'/n) = (\alpha/\alpha')^2(n'/n) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

(10)，(11)式における，r'_M, r'_S, r'^S_M および r'^S_S は物面および入射瞳が平面の場合の，像面および射出瞳の湾曲の曲率半径を示している．それに対し，新正弦条件導出においては，(2)式に示されるように，入射瞳が湾曲している．それゆえ，入射瞳の曲率半径 R^S_M および R^S_S が，∞（平面）に変化したときの，射出瞳の湾曲の曲率半径 r'^S_M および r'^S_S を求めなければならない．入射瞳面が平面になると，入射瞳から射出瞳への結像倍率により，射出瞳面の曲率半径が変わるが，3次収差は各部分系の収差の和で示されるので[6]，元の瞳面のM湾曲の曲率半径 R^S_M と R'^S_M により，入射瞳面が平面になったときの射出瞳面のM湾曲の曲率半径 r'^S_M を次のように求めることができる．いま高さ X における Z 方向の入射瞳の変化量を ΔZ とすると，射出瞳では高さ X' における $\Delta Z'$ の変化となるが，

$$\left.\begin{aligned} \Delta Z' &= \gamma^S\cdot\Delta Z \\ X' &= \beta^S\cdot X \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

と近似的に表わされる．入射瞳を平面にしたときの変化は，

$$\Delta Z = -(1/2R^S_M)X^2 \quad (15)$$

と表わされるので，(14)，(15)式より，

$$\Delta Z' = -(1/2R^S_M)\{\gamma^S/(\beta^S)^2\}X'^2$$

となり，射出瞳の曲率半径の逆数の変化量は，

$$-(1/R^S_M)\{\gamma^S/(\beta^S)^2\}$$

で表わされる．よって，

$$\begin{aligned} 1/r'^S_M &= -(1/R^S_M)\{\gamma^S/(\beta^S)^2\} + 1/R'^S_M \\ &= -(3/g)(n'/n) + 3/g' \end{aligned}$$

となる．他の場合も同様に求めることができ，次式にまとめる．

$$\left.\begin{aligned} 1/r'_M &= -(1/R_M)(\gamma/\beta^2) + 1/R'_M = 0 \\ 1/r'_S &= -(1/R_S)(\gamma/\beta^2) + 1/R'_S = 0 \\ 1/r'^S_M &= -(1/R^S_M)\{\gamma^S/(\beta^S)^2\} + 1/R'^S_M \\ &= -(3/g)(n'/n) + 3/g' \\ 1/r'^S_S &= -(1/R^S_S)\{\gamma^S/(\beta^S)^2\} + 1/R'^S_S \\ &= -(1/g)(n'/n) + 1/g' \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

(16)式より，

$$1/r'^S_M - 1/r'_M = 3n'(1/n'g' - 1/ng)$$
$$1/r'^S_S - 1/r'_S = n'(1/n'g' - 1/ng)$$

となり，(10)，(11)式が成立することが証明された．すなわち，**Fig. 2** に示した球面収差のある場合の正弦条件を導く際に考えられた，入射瞳および射出瞳の湾曲は，3次収差論と矛盾しないことが示された．

なお，実際の光学系では，ペッツバール和はゼロではないため，3次のM像面とS像面の両方が平面とはなりえず，また，瞳面の湾曲も **Fig. 2** とは異なる．正弦条件は画角の1乗に比例する横収差の変化を表わしているのに対し，像面の湾曲による横収差の変化は，画角の2次より高次で効いてくるので，像面の湾曲が直接，正弦条件の適用に問題になることはないが，瞳面の湾曲の変化は影響してくる．しかしながら，カメラレンズなどの実際の光学系において，ペッツバール像面，3次M像面，S像面の曲率半径は，射出瞳から像面までの距離 g' に比べて十分に大きく，瞳面の湾曲についても，**Fig. 2** とあまり変わらないと考えられ，正弦条件を適用することに，さしつかえない．

5. Staeble-Lihotzky の条件の導出における湾曲と収差係数の関係

Staeble-Lihotzky の条件の導出において，われわれが

考えた物面，像面，瞳面の湾曲も[1)]，(10)，(11) 式を満足していることを示す．物面，像面，瞳のM湾曲についてはすでに述べてあるが[1)]，光線束を入射瞳および射出瞳中心を通りメリディオナル面に垂直な直線の回りに回転することにより，瞳のS湾曲は平面になることがわかる．**Fig. 4** に湾曲の様子を示す．また，物面，像面，入射瞳，射出瞳の湾曲は，次式で示される．

$$\left.\begin{array}{ll}(Z+g)^2+X^2=g^2 & \text{物面のM湾曲}\\ (Z+g/2)^2+X^2=(g/2)^2 & \text{入射瞳のM湾曲}\\ Z=-g & \text{入射瞳のS湾曲}\\ (Z'+g'/2)^2+X'^2=(g'/2)^2 & \text{射出瞳のM湾曲}\\ Z'=-g' & \text{射出瞳のS湾曲}\\ (Z'+g')^2+X'^2=g'^2 & \text{像面のM湾曲}\end{array}\right\} \quad (17)$$

(17)式より，物面の中心O，入射瞳中心A，射出瞳中心A′，像面中心O′におけるM湾曲の曲率半径は次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l}R_M=R_S=-g\\ R^S_M=g/2\\ R^S_S=\infty\\ R'^S_M=g'/2\\ R'^S_S=\infty\\ R'_M=R'_S=-g'\end{array}\right\} \quad (18)$$

物面および入射瞳面を平面にしたときの，射出瞳および像面の曲率半径 r'^S_M，r'_M を (16) 式を求めたときと同様の方法で求めると，

$$\left.\begin{array}{l}1/r'_M=1/r'_S\\ \quad=(-1/R_M)(\gamma/\beta^2)+1/R'_M\\ \quad=(1/g)(n'/n)-1/g'\\ 1/r'^S_M=(-1/R^S_M)\{\gamma^S/(\beta^S)^2\}+1/R'^S_M\\ \quad=(-2/g)(n'/n)+2/g'\\ 1/r'^S_S=0\end{array}\right\} \quad (19)$$

となる．よって，

$$1/r'^S_M-1/r'_M=3n'(1/n'g'-1/ng)$$
$$1/r'^S_S-1/r'_S=n'(1/n'g'-1/ng)$$

となり，(10)，(11)式を満足することがわかった．

しかしながら，Staeble-Lihotzky の条件の従来の説明においては[2,3)]，**Fig. 5** に示されるような湾曲を考えている．この場合，

$$R_M=-g/2 \qquad R^S_M=g/2$$
$$R'^S_M=g'/2 \qquad R'_M=-g'/2$$

であり，よって，

$$1/r'_M=(-1/R_M)(\gamma/\beta^2)+1/R'_M$$
$$=(2/g)(n'/n)-2/g'$$
$$1/r'^S_M=(-1/R^S_M)\{\gamma^S/(\beta^S)^2\}+1/R'^S_M$$
$$=(-2/g)(n'/n)+2/g'$$

となる．ゆえに，

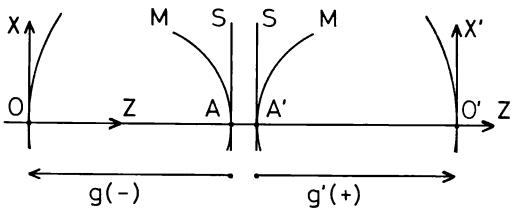

Fig. 4 Object, image and pupil curvatures for meridional pencil of rays. These curvatures are considered when authors derive the Staeble-Lihotzky condition.

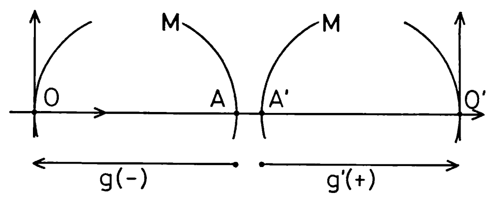

Fig. 5 Object, image and pupil curvatures for meridional pencil of rays. These curvatures are postulated in the conventional explanation of Staeble-Lihotzky condition.

$$1/r'^S_M-1/r'_M=4n'(1/n'g'-1/ng)$$

となり，(10)式を満足しない．

6. ま　と　め

われわれの定式化した，球面収差のある場合の正弦条件を導く際に用いた，入射瞳面および射出瞳面の湾曲が[1)]，3次収差論と矛盾しないことを確認し，われわれの正弦条件の妥当なことを示した．また，Staeble-Lihotzky の条件をわれわれの方法によって求めた際に考えた湾曲も[1)]，3次収差論と矛盾しないことを確認したが，従来の説明で用いられていた湾曲は[2,3)]，3次収差論と矛盾していることを示した．本報告の検討が，正弦条件のより深い理解に役立つと考える．

文　　献

1) 渋谷眞人，真島清人，浪川敏之："球面収差のある場合の正弦条件"，光学，**16** (1987) 199-203.
2) V. M. Berek：レンズ設計の原理（三宅和夫訳，講談社，東京，1970）pp. 83-87.
3) C. Hofmann and H. Zollner: "Die Abbesche Sinusbedingung von 1873 und ihre Weiterentwicklung in den vergangenen 100 Jahren," Feingerätetechnik, **22** (1973) 151-159.
4) W. T. Welford: "The most general isoplanatism theorem," Opt. Commun., **3** (1971) 1-6.
5) R. Stettler: "Die Isoplanasie-Bedingung als hinreichende Bedingung," Optik, **72** (1986) 59-63.
6) 松居吉哉：レンズ設計法（共立出版，東京，1972）.