

研究

視差にもとづく視準* 誤差の単純眼モデルによる解析

高瀬 正典

防衛大学校応用物理学教室 〒239 横須賀市走水 1-10-20

(1987年10月14日受理)

Analysis of Sighting Error by Parallax
Using a Simple Eye Model

Masanori TAKASE

Department of Applied Physics, The National Defense Academy,
1-10-20, Hashirimizu, Yokosuka 239

This paper deals with alignment error of a mechanical sight aligning equipment which consists of a circular aperture and a tapered rod (or crosshairs) when the eye unconsciously deviates laterally from the line of sight and parallax is produced. Theoretical analysis is based on a simplified eye model and the geometrical optics assuming a point light source target. To verify the result of the analysis, simulating experiments are done using a TV camera in place of a human eye. Fairly good agreement is observed between the theoretical and experimental results.

1. はじめに

精密機械の組立、軸合せや測量などにおいて重要なアライメントとは、2点で定まる直線上に第3の点を乗せることに他ならない。この作業は通常、視準装置と眼を使う方法または基準直線（レーザー光、ピアノ線など）と位置検出装置を用いる方法¹⁾で行なわれる。前者はさらにアライメント望遠鏡などを用いる方法²⁾と機械式視準装置（視準板付アリダード³⁾など）を用いる方法にわけられる。ほかに、アライメント望遠鏡などに光電的読取り機能を付与して、眼の代りをさせる方法¹⁾もあり、これからは重要性を増すであろうが、まだ眼を用いる視準法が一般的である。ところで、アライメント望遠鏡などはピント合せ機構もっているから問題は少ないが、そうでない望遠鏡や機械式視準装置では瞳の横方向の変位による視差のために誤差を生ずる。

いま、Fig. 1 に示すような機械式視準装置によるアライメントを考える。円孔の中心をA、くさび状パターンの先端をBとして、点AとBで定まる直線を視準線

(LOS) と呼ぶ。視準装置によるアライメントは、眼によって点A、Bおよび視準すべき点Tを見通して、視準線上に点Tを置くことを目指す動作である。この視準動作は通常2段階に分けて行なう。瞳孔の中心Pをまず視準線上に置く。このとき Fig. 1 の左下の図に示すように、ぼけて見える円孔の中心に注視点Bがあればよい。つぎに、点PとBで定まる直線上に点Tを置く。すなわち Fig. 1 の右下の図に示すように注視点Bに点Tのぼけて見えるパターンの重心を一致させる。視準動作を分解し、この順序で第一段階、第二段階と呼ぶことにする。現実の視準動作では次に述べるような理由で視準線から点Tがずれてしまう。すなわち視準誤差を生ずる。第一段階では、瞳の中心Pを視準線上に偏りなく正確に置きかつその状態を保持することは難しいので、瞳の横方向変位に起因する誤差が生ずる。第二段階において、点Tとして点光源を用いる場合は、光源のぼけたパターンの重心と点Bとを合致させるときの判断誤差を生ずる。また、あるパターンの特徴点を点Tとする場合はそのパターンがぼけてしまうので、点光源の場合よりもさらに大きな誤差を生ずると考えられる。

アライメント望遠鏡などの光学式視準装置では、点

* 同じ意味で照準という用語が用いられるが、ここでは JIS Z 8120-1986, O 45 視準線にもとづき視準を用いる。

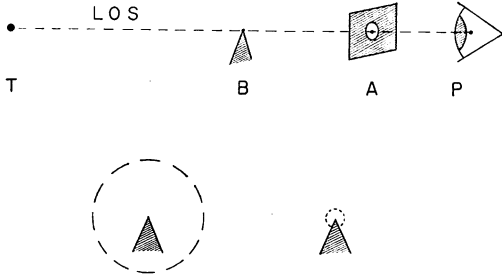


Fig. 1 Alignment with a mechanical sight aligning equipment.

Tにピント合せするので第一段階の誤差は基本的になく、第二段階の誤差のみを考慮すればよい。一方、ピント合せ機構のない光学式視準装置においては、ピントが合っている場合以外、やはり第一段階の誤差を生ずる。

本研究の目的は、これらの視準装置を用いるアライメントにおいて生ずる第一段階の誤差の発生機構の解明とモデル化にある。そこで本論文では、その手始めとして、円孔の中心とくさび状パターンの先端を用いる機械式視準装置について、単純な眼のモデルを仮定して、瞳の横方向変位による視準誤差を解析的に表現しようとした。その解析結果を検証するために、この眼のモデルに近い構成を持つレンズとTVカメラでシミュレーション実験を行なった。実験結果は計算結果とよい一致を示した。

以下、モデルによる視準誤差の解析、TVカメラによる実験について述べる。

2. 単レンズモデルによる視準誤差の解析

2.1 単レンズモデルによる結像

眼光学系は非常に複雑で高度な機能を持つ。ここではその機能を簡略化した次のようなモデルを用いて結像を考える。なお、このモデルを単レンズモデルと呼ぶ。

- (1) 屈折系をパワーが可変の薄い無収差単レンズとし、眼レンズと呼ぶ。
- (2) 瞳孔の中心と眼球の回転中心は眼レンズの中心にあり、網膜までの距離は一定とする。
- (3) 眼は注視点と瞳孔の中心で決まる方向に向く。
- (4) 網膜は視軸に垂直で感度は一様とする。
- (5) 瞳孔の周辺を通る光も近軸光線として扱う。

Fig. 1 のように点P, Tが視準線上にあって点Bを注視している場合、このモデルによる結像関係は Fig. 2 のように表わすことができる。点Pからの距離を、注視点まで s_0 、網膜まで l とし、一般の物点まで s 、その像点まで s' とする。点Bが注視点のときの眼レンズの焦

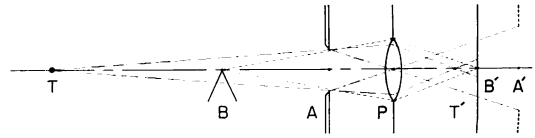


Fig. 2 Imaging of a mechanical sight by a simplified eye model.

点距離を f とすると、次式が成り立つ。

$$1/s_0 + 1/l = 1/s + 1/s' = 1/f \quad (1)$$

したがって、点Bは網膜上点 B' に結像するが、他の点TとAの像点はそれぞれ T' と A' にできるので、網膜上では点T, 円孔ともにぼけたパターンとなる。網膜上にできる円孔のぼけたパターンは瞳孔がまぶたなどで覆われない限り円形であるから、視準線上にPがあれば、その円形の中心(直線 $\overline{PA'}$ と網膜の交点)は B' と一致する。このように視準線上に点T, Pがある場合、点光源Tの網膜上のぼけたパターンは一様な明るさの円盤になるので、その明るさ分布の重心は B' と一致する。

いま、視準線上に点T, Pがある場合から眼が横方向に \overline{OP} だけ変位した状態を Fig. 3 に示す。図は瞳孔径 ($2r$) よりも円孔径 ($2a$) が大きい場合で、しかも点Tから瞳孔に入射する光が円孔によってけられる場合である。点Bを出て瞳孔に入射する光は、円孔によって一部けられるが、直線 \overline{BP} 上の網膜に像点 B' を生ずる。一方、点Tを出て瞳孔に入射する光も円孔によって一部けられるが、直線 \overline{TP} 上に像点 T' を生ずる。この直線 $\overline{TPT'}$ の延長が網膜と交わる点をHとする。この点Hは、円孔径が十分大きくて点Tから瞳孔へ入射する光がけられないときの、点Tのぼけた網膜像の重心(この場合、中心)である。したがって、円孔でけられない場合の点Tからの主光線は直線 $\overline{TPT'H}$ となる。

Fig. 3 のように、点Tから瞳孔に入射する光が円孔でけられる場合の点Tのぼけた網膜像は円形でない。その重心を G' とすると、直線 $\overline{T'G'}$ は主光線の一部である。直線 $\overline{T'G'}$ と瞳面との交点をGとすると、点Gは点Tから瞳孔に入射する光の分布の重心となっており、主光線はTからG, T' と進み網膜上 G' に至る。すなわち、 $\triangle T'HG'$ と $\triangle T'PG$ は相似であるから、瞳孔上の重心Gを求めれば網膜上重心 G' は求められる。点Tからの光が円孔を通過して瞳面へ投射されるとき、その影の形は近似的に円(半径 b の投影円)とみなしてもさしつかえない。Fig. 3 に示すように、点Pを含み、視準線に垂直な面の視準線との交点をOとし、 $\overline{TB} = Z$, $\overline{BA} = L$, $\overline{AO} = E$ とすると、 b は次式で表わすことができる。

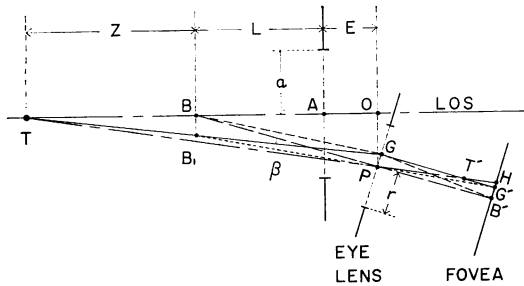


Fig. 3 Ray diagram when the model eye deviates laterally from the line of sight.

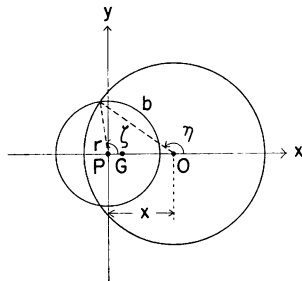


Fig. 4 Vignetting of light rays through the circular aperture coming from a target to the pupil.

$$b = \{(Z+L+E)/(Z+L)\} a \quad (2)$$

したがって、点 T から瞳孔に入射する光は、Fig. 4 に示すように、投影円と瞳孔円との共有面を通り、その重心が G である。いま、方向も含めて P から視準線までの距離を $\overline{PO} = x$ とする。原点を P とする x, y 座標系を瞳孔上に置いて視準線との交点を O で近似し、点 O が x 軸上を移動すると考える。G は、 $x=0$ のとき P (すなわち O) と一致するが、 $|x|$ が大きくなると P と O の間にある。詳細は付録に示すが、G の位置は次のように表わすことができる。

(i) $0 \leq |x| < |r-b|$ のとき

$$\overline{OG} = \begin{cases} 0 : r > b \text{ の場合} \\ x : r \leq b \text{ の場合} \end{cases} \quad (3)$$

(ii) $|r-b| \leq |x| < r+b$ のとき

$$\overline{OG} = x / \{1 + (b/r)^2 \cdot F(x)\} \quad (4)$$

ここに、

$$F(x) = (\pi - \eta + \sin \eta \cdot \cos \eta) / (\zeta - \sin \zeta \cdot \cos \zeta) \quad (5)$$

η と ζ は Fig. 4 に示す角で

$$\cos \eta = (r^2 - b^2 - x^2) / 2bx,$$

$$\cos \zeta = (r^2 - b^2 + x^2) / 2rx \quad (6)$$

である。

なお、 $|x| \rightarrow r+b$ のとき、(5)式は $0/0$ の不定形に

なる。そこで、その極限を求めると

$$\lim_{|x| \rightarrow r+b} F(x) = (r/b)^2,$$

ゆえに、

$$\lim_{|x| \rightarrow r+b} \overline{OG} = \pm b. \quad (7)$$

2.2 ずれて見える角 (視差角) と視準誤差

Fig. 3 において、点 B と点 T がずれて見える角 (視差角) を β とし、点 B で視準線に垂直な面と点 T からの主光線との交点を B_1 とすると、 B_1 の像点が G' であり、かつ $|x| \ll L+E$ であるから

$$\beta = \angle BGB_1 \doteq \angle BPB_1 \\ = \angle G'PB' \doteq \angle G'GB',$$

$$\overline{B'G'} / \overline{BB_1} = l / (L+E),$$

$$\overline{BB_1} / Z = \overline{OG} / (Z+L+E) \quad (8)$$

が成り立つ。ここで、

$$k = 1 / (L+E) - 1 / (Z+L+E) \quad (9)$$

とおくと、(8)式より

$$\beta = \overline{B'G'} / l = \overline{BB_1} / (L+E) = k \cdot \overline{OG} \quad (10)$$

となる。(10)式と(3)または(4)式とを組み合わせると、瞳の横方向変位 x に対する視差角、すなわち点 B と T のずれて見える角 β を求めることができる。この関係を次のように表現しておく。

$$\beta = f(x) \quad (11)$$

アラインメントにおいては、このようにずれて見えぬ点 B と T を、そのどちらかを動かして、一致させる操作を行なう。

ここでは、Fig. 3 の変位 x に対して β だけずれて見える状態から、Fig. 5 に示すように点 T を動かして点 B と一致して見えるようにしたときの視準誤差を求める。このときの T の位置を T_2 とすると、点 T_2 からの光による瞳上への投影円は変位する。したがって、瞳孔円と投影円との共有面の重心も G から G_2 に変位し、点 T_2 からの主光線は B、 G_2 を通って網膜上 B' に至る。ここで、点 T_2 と A を通る直線と、点 B および点 O で視準線と直交する面との交点をそれぞれ B_2 、 O_2 とする。この図は、点 A と B_2 で定まる古い視準線上に T_2 が乗

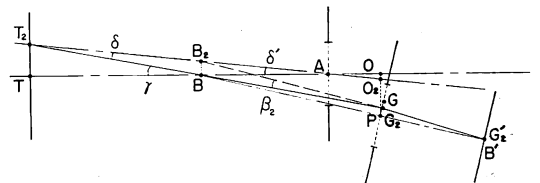


Fig. 5 Ray diagram to illustrate alignment error angle γ .

っており、 $\overline{PO}_2 = x_2$ の変位により点 T_2 と B_2 が視差角 β_2 だけずれて見える状態と考えることができる。さらに、点 B_2 を動かして点 T_2 からの主光線上の点 B に乗せると G_2' は B' と一致し、点 A と B で定まる直線が新しい視準線となるわけである。

ここで、 $\angle B_2T_2B = \delta$ 、 $\angle B_2AB = \delta'$ とおくと

$$\overline{BB}_2 = (L+E)\beta_2 = Z \cdot \delta = L \cdot \delta'$$

 が成り立つ。ゆえに、視準誤差 $\angle TBT_2 = \gamma$ は

$$\gamma = \delta + \delta' = \{(Z+L)/Z\} \cdot \{(L+E)/L\} \cdot \beta_2 \quad (12)$$

となる。 β_2 は式(11)で x を x_2 におきかえた式で与えられ、一方、 x_2 は

$$x_2 = \overline{PO}_2 = x - \overline{OO}_2 = x - E \cdot \delta'$$

で与えられる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= f(x_2), \\ x_2 &= x - (L+E)E \beta_2 / L \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

が成り立つ。 x の関数としての β_2 は上の式から x_2 を消去することによって求めることができ、式(12)を用いると γ を x の関数として表わすことができる。

変位 x に対する視差角 β と視準誤差 γ は(11)および(12)式で表わされることを示した。しかしながら、それらの関数形の特徴は $f(x)$ の複雑さのためにわかりにくい。そこで **Fig. 6** に、瞳孔径 ($2r$) が投影円 ($2b$) よりも大きい場合(1)とその逆の場合(2)にわけて、 β, γ の計算例を示す。この計算例では、 $Z=200$ cm, $L=50$ cm, $E=8$ cm とし、 $r > b$ の場合 $a=1$ mm, $r=2$ mm を、 $r \leq b$ の場合については $a=2$ mm, $r=1$ mm をそれぞれ用いた。

Fig. 6 (1), (2)に見られるように、 x の関数としての β および γ は原点 (点 P) に関して対称であるので、以下には x, β および γ がいずれも正の場合について述べる。特筆すべきことは曲線 $\beta(x)$ および $\gamma(x)$ が

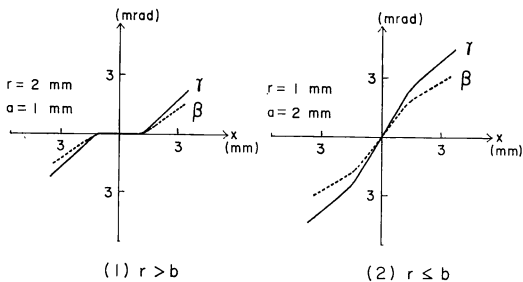


Fig. 6 Examples of calculated curves of parallax angle β and alignment error angle γ as functions of pupil displacement x in cases of (1) $r > b$ ($r=2$ mm, $a=1$ mm) and (2) $r \leq b$ ($r=1$ mm, $a=2$ mm). $Z=200$ cm, $L=50$ cm and $E=8$ cm.

ほぼ折れ線状であるという性質である。

Fig. 6 (1) すなわち $r > b$ の場合をまず考える。 x が0よりしだいに増して、値 $r-b$ に達するまでの間は β も γ も一定で0である。すなわち、

$$0 \leq x \leq r-b \text{ のとき, } \beta = \gamma = 0. \quad (14)$$

次に x の値が $r-b$ を越えて増大すると、 β, γ は増加し始める。増加は、しかし、ほとんど直線的である。

変位 x が $r-b$ 以下の場合には、**Fig. 3**, **Fig. 4** に描いた図とは逆に、投影円よりも瞳孔円が大きく、しかも瞳孔円の内側に投影円があてられない場合に相当する。この場合、重心位置 G が視準線上にあるので、点 T からの主光線は、視準線上 B, A, O, G と進み、網膜上の B' に至る。したがって、視準誤差は生じない。引き続き、変位 x が大きくなると、投影円は瞳孔によってけられるようになるので、重心位置 G は視準線から変位する。その結果、点 B と T はずれて見えるので視準誤差を生ずる。変位 x がさらに大きくなって、点 T から瞳孔に入射する光がちょうどなくなる極限では、点 T と円孔の縁を通る直線が主光線となる。このとき視差角 β は最大値をとる。すなわち、

$$x = r+b \text{ のとき, } \beta = k \cdot b. \quad (15)$$

さらに x を大きくして、点 B から瞳孔に入射する光がちょうどなくなる極限において、点 B と円孔の縁を通る直線上に点 T を乗せると、この直線は主光線である。このとき視準誤差 γ は最大値をとる。すなわち、

$$x = r+b + (L+E)Ekb/L \text{ のとき, } \gamma = a/L. \quad (16)$$

次に、**Fig. 6** (2) すなわち $r \leq b$ の場合を考える。 x が0よりしだいに増して値 $b-r$ に達するまでの間は視差角 β は直線的に増大する。すなわち、

$$0 \leq x \leq b-r \text{ のとき, } \beta = k \cdot x. \quad (17)$$

一方、視準誤差 γ も直線的に増大し、 x が

$$x = (b-r) \{1 + (L+E)Ek/L\} \quad (18a)$$

に達したとき

$$\gamma = \{(Z+L)/Z\} \{(L+E)/L\} k(b-r) \quad (18b)$$

となる。これらは、**Fig. 3** および **Fig. 4** において、瞳孔円が投影円よりも小さく、しかも投影円の内側に瞳孔円があてられない場合である。この場合、点 T からの主光線は瞳孔中心 P を通るので、変位 x に比例した β, γ を生じる。引き続き変位 x が大きくなると、投影円は瞳孔によってけられはじめ、重心位置 G は点 P から視準線の方向に変位する。その結果、けられない場合よりも β, γ の増加の割合は小さくなる。増加率は一定ではない。すなわち、 β, γ の増加は直線的ではないが、図で

みられるようにほぼ直線的であり、曲線 $\beta(x)$ は(15)式で与えられる値で終わり、曲線 $\gamma(x)$ は(16)式で与えられる値で終わる。これらの式は視差角 β および視準誤差 γ の最大値が瞳孔径に無関係でそれぞれ kb および a/L となることを示している。

3. TV カメラによる実験

前節の解析結果を検証するためには、まず前節で仮定した眼のモデルに近い構成と機能を持つ光学系を必要とする。採用したレンズは、有効径 7 mm, 焦点距離約 74.5 mm の TV 用特殊レンズで、焦点距離約 260 mm と約 100 mm の 2 枚の単レンズを約 10 mm の間隔で配置した構成となっている。レンズには絞りが内蔵されているが、形が多角形でしかも正確な直径の制御ができないので、円孔板を絞りとしてレンズ先端に取り付けて用いることにした。この円孔板からレンズの主点までは約 8 mm となり、単レンズモデルの(2)項とわずかに差異を生じた。画像検出に CCD-TV カメラを使用した。水平方向の画素ピッチは $23 \mu\text{m}$ で、約 0.27 mrad の角度ピッチに相当するので分解能不足とも考えられたが、実際に使用してみると、0.1 mrad 前後の変化の判別が可能であった。これは 2 点分解でなく、パターンをモニターで測定者が見て判別しているために分解能が向上したものと考えられる。ちなみに視力 1 (1 分) は 0.29 mrad である。また、単レンズモデルの(3)項の制御は困難であるので、TV カメラのレンズの光軸は視準線と平行のまま変位するようにした。この影響は、 $x/(L+E)$ が小さくしかもその角の余弦でしかかかないので無視できる。

このレンズと TV カメラの組合せを用いた実験装置の概略を Fig. 7 に示す。微動ステージを水平面内で使用するために、視準線を平面鏡で直角に曲げた構成とした。円孔は固定して用いる。円孔直径 2, 3, 4 および

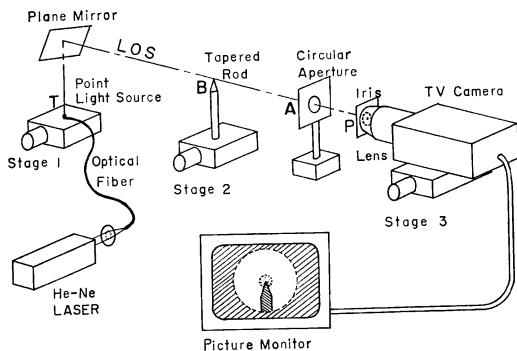


Fig. 7 Illustration of the experimental setup.

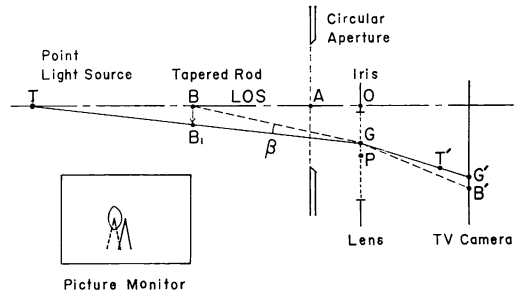


Fig. 8 Ray diagram to measure β as a function of x .

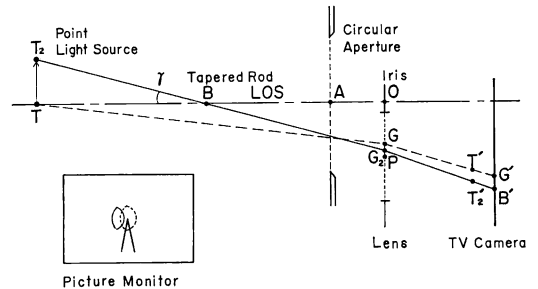


Fig. 9 Ray diagram to measure γ as a function of x .

6 mm のものを用意した。TV カメラ用レンズの絞りとして、直径 3 および 6 mm の円孔板を用いた。点 B として、微動ステージ上の支柱に取り付けた針のくさび状の先端を用いた。点光源としては、実験の容易さのため、He-Ne レーザー光を直径 0.3 mm のプラスチックファイバの一端に入射させ、光が射出する他端を微動ステージに取り付けて用いた。画像モニター上の点光源と円孔のぼけた像を判別しやすくするために、TV カメラの視野を蛍光灯でできるだけ様な適度の明るさになるように照明を行なった。この視野の明るさおよび画像モニターの輝度とコントラストは、一連の実験の間一定に保った。

測定は、まず視準線上に点 P, T を置いた状態 (基準状態) から始める。そのために、点 A, B を固定した後、点 B にピントを合わせた TV カメラを取り付けた微動ステージ 3 を画像モニターを見ながら調整して、Fig. 1 の左下の状態を作り出し、次に、微動ステージ 1 を調整して、Fig. 1 の右下の状態とする。このときの微動ステージ 1, 2, 3 の読みを基準とする。

微動ステージ 3 をある一定量送ると Fig. 8 に示す状態となる。ここで、微動ステージ 2 を調整して針先の像 B' を点 T のぼけたパターンの重心 G' に一致させると、点 B の移動量 $\overline{BB'}$ から、視差角 β は次式で求められ

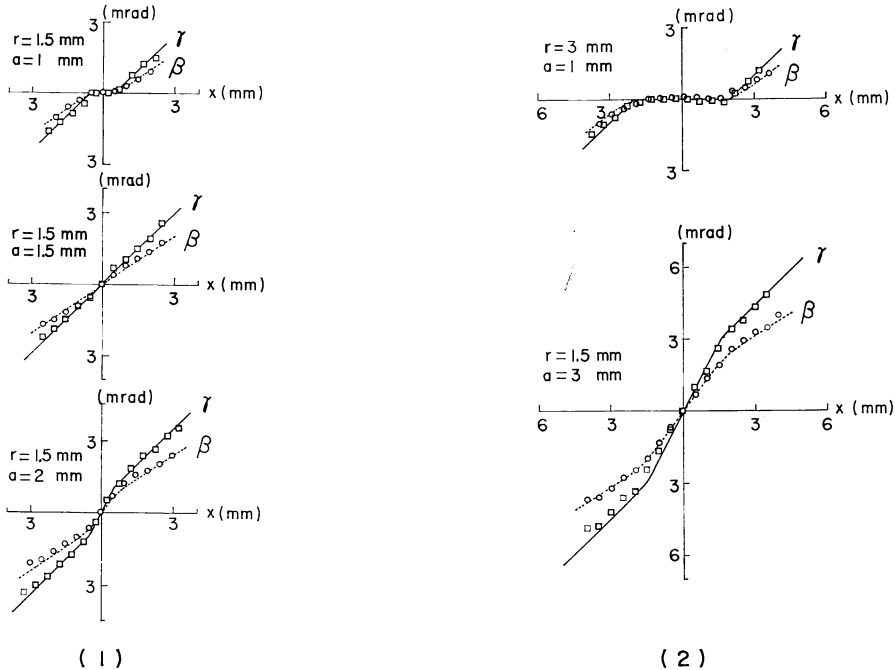


Fig. 10 Measured plots and calculated curves of β and γ as functions of x in cases of (1) $r=1.5$ mm and $a=1, 1.5, 2$ mm, (2) $r=3$ mm, $a=1$ mm and $r=1.5$ mm, $a=3$ mm. $Z=200$ cm, $L=50$ cm, $E=8$ cm.

る。

$$\beta = \overline{BB}_1 / (L + E) \quad (19)$$

一方、基準状態から微動ステージ3をある一定量送った状態、すなわち点TとBがずれて見える状態から、**Fig. 9**に示すように、微動ステージ1を調整して点Tのばけたパターンの重心 G' を点Bの像 B' に一致させると、その移動量 \overline{TT}_2 から、視準誤差 γ は次式で求められる。

$$\gamma = \overline{TT}_2 / Z \quad (20)$$

この β と γ の測定を、 $Z=200$ cm, $L=50$ cm, $E=8$ cm の場合について行なった。測定例を **Fig. 10** (1), (2) に示す。座標系の選び方は **Fig. 6** と同じで、丸と点線は β の測定値と計算結果、四角と実線が γ の測定値および計算結果である。**Fig. 10** (1) は、 r を 1.5 mm に固定させ a を 1.0 から 0.5 mm ずつ増加させるとき $\beta(x)$, $\gamma(x)$ の形がどのように変わるかを示している。**Fig. 10** (2) は r と a の組合せが極端な場合で、 $\beta(x)$, $\gamma(x)$ の折れ線状特性がはっきり観察される。なお、座標原点にプロットのない実験がいくつかあるが、微動ステージ3の基準を決めた後、測定範囲の一方から 0.5 mm 間隔に測定をする際の始めの手違いに過ぎない。

これらの測定値と計算結果はよく一致しているといえる。わずかのばらつきやはずれは重心位置についての測

定者の判断誤差によるものと思われる。

4. ま と め

円孔の中心とくさび状パターンの先端(または十字線の交点)を基本要素とする機械式視準装置を用い眼でアライメントを行なうとき、瞳が視準線から横方向に変位した(視差が生じた)場合の視準誤差について解析を行なった。解析は、眼を単純なモデルにおきかえ、幾何光学を用い、点光源を視準する場合について行なった。その結果、視差にもとづく視準誤差は瞳の横方向変位に対して非線形で、しかも円孔径と瞳孔径の大小関係によって形の異なる折れ線状関数となった。解析結果を検証するために、眼の代りに TV カメラを用いたシミュレーション実験を行なったところ、実験結果と計算結果はよく一致した。しかしながら、人間の眼はより複雑な構造と高度な機能を持っており、このモデルが視準動作を行なう眼を適切に描写しているとは断じ切れない。したがって、被験者による測定結果によってはモデルの手直しが必要となるかもしれない。

しかし、この解析結果は眼の代りに TV カメラまたは光電的位置検出器によってアライメントを行なうシステム等(たとえば単体の望遠鏡と単体の TV カメラの組合せ)へ応用することができるであろう。

最後に、本論文の解析に貴重な助言をいただいた防衛
 大学校岸教授に感謝します。

文 献

- 1) 田幸敏治, 辻内順平, 南 茂男編集: 光学的測定ハンド
 ブック (朝倉書店, 東京, 1981) pp. 612-617.
- 2) C. E. Philip Kissam: *Optical Tooling for Precise
 Manufacture and Alignment* (McGraw Hill, New
 York, 1962).
- 3) 米谷英二, 山田善一: 測量学 一般編 (丸善, 東京, 1970).
- 4) 日本機械学会編修: 機械工学便覧 改訂第5版 (日本機
 械学会, 東京, 1968) pp. 3-8, 9.

付 録

Fig. 4 の重なった2円を別々に描くと Fig. A1 の
 ように表わすことができる。ここで、D' と D'' を2円
 の交点、x軸と弦 $\overline{D'D''}$ との交点をDとする。まず投
 影円Oについて、弦 $\overline{D'D''}$ によって分割された部分の
 おのおのの面積を S_0, S_0' とすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} S_0 &= \pi \cdot b^2 (\eta/\pi) - \overline{OD} \cdot b \cdot \sin \eta \\ &= b^2 (\eta - \sin \eta \cdot \cos \eta) \\ S_0' &= \pi \cdot b^2 - S_0 \\ &= b^2 (\pi - \eta + \sin \eta \cdot \cos \eta) \end{aligned} \tag{A 1}$$

点 T から瞳面に入射する光の分布は一様とすると、
 Fig. A1 の弦 $\overline{D'D''}$ で分割された面を通る主光線はそ
 れぞれ各部分の重心位置を通る。ゆえに、投影円Oのそ
 れぞれの重心を G_0, G_0' とすると

$$\overline{OG_0} \cdot S_0 = \overline{OG_0'} \cdot S_0' \tag{A 2}$$

が成り立つ。さらに、弓形の重心公式⁴⁾ と(A1), (A2)
 式から

$$\begin{aligned} \overline{OG_0} &= (2b \cdot \sin \eta)^3 / 12S_0 = (2/3) \cdot (b \cdot \sin \eta)^3 / S_0 \\ \overline{OG_0'} &= (S_0/S_0') \cdot \overline{OG_0} = (2/3) \cdot (b \cdot \sin \eta)^3 / S_0' \end{aligned} \tag{A 3}$$

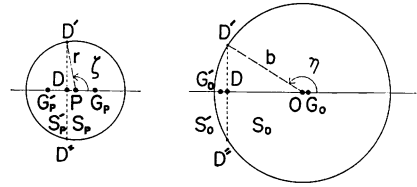


Fig. A1 Diagram of the pupil and the pro-
 jected circular aperture for finding the center
 of gravity of the common area in Fig. 4.

を得る。

次に、瞳孔円Pの弦 $\overline{D'D''}$ で分割されたそれぞれの
 面積および重心を S_p, S_p' および G_p, G_p' とすると、
 同様にして

$$\left. \begin{aligned} S_p &= r^2 (\zeta - \sin \zeta \cdot \cos \zeta), \\ S_p' &= r^2 (\pi - \zeta + \sin \zeta \cdot \cos \zeta) \end{aligned} \right\} \tag{A 4}$$

および

$$\left. \begin{aligned} \overline{PG_p} &= (2/3) \cdot (r \cdot \sin \zeta)^3 / S_p, \\ \overline{PG_p'} &= (2/3) \cdot (r \cdot \sin \zeta)^3 / S_p' \end{aligned} \right\} \tag{A 5}$$

を得る。

したがって、投影円Oと瞳孔円Pの共有面の重心Gに
 ついて、次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \overline{GG_p} \cdot S_p &= \overline{GG_0'} \cdot S_0' \\ \overline{GG_p} &= \overline{PG_p} - \overline{OP} + \overline{OG} \\ \overline{GG_0'} &= \overline{OG_0'} - \overline{OG} \end{aligned} \right\} \tag{A 6}$$

ゆえに、(A1), (A3), (A4), (A5) および (A6)
 式よりGの位置は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \overline{OG} &= \{S_0' \cdot \overline{OG_0'} + S_p (\overline{OP} - \overline{PG_p})\} / (S_p + S_0') \\ &= x / \{1 + (b/r)^2 \cdot (\pi - \eta + \sin \eta \cdot \cos \eta) / \\ &\quad (\zeta - \sin \zeta \cdot \cos \zeta)\} \end{aligned} \tag{A 7}$$