

講義

光と物質の相互作用—V

干 渉 ・ 回 折

石 黒 浩 三

東京理科大学理工学部物理学科 〒278 野田市山崎 2641

(1988年1月13日受理)

Interaction of Light with Matter—V

Interference and Diffraction

Kozo ISHIGURO

Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Science University of Tokyo,
2641, Yamazaki, Noda 278

1. は じ め に

前回は反射・屈折を取り扱ったが、そこでの光の波としての振舞いはどちらかといえば脇役的な役割であった。これに対して干渉・回折現象というものは、ある物理現象が波動現象であるかどうかを判定する基準はその現象に伴って干渉・回折現象が観測されるかどうかが重要なきめてになることが少なくないし、また物質との相互作用を媒介する屈折率との関係も反射・屈折現象に比し、より直接的である。

2. 平面光波に伴う波形の伝播とエネルギーの伝播

z 方向に伝播する平面光波の変位の電界成分、磁界成分を

$$E(x, y, z, t) = E_0 \exp i \theta(x, t)$$

$$H(x, y, z, t) = H_0 \exp i \theta(x, t)$$

$$\theta(x, t) = \kappa z - \omega t, \quad \kappa = 2\pi k, \quad \omega = 2\pi f$$

とする。また平面偏光を仮定して

$$E = (E, 0, 0), \quad H = (0, H, 0)$$

としておく。

時刻 t に注目している点 (x, y, z) における光波のエネルギー密度 $\rho(x, y, z, t)$ は

$$\varepsilon^{1/2} E = \mu^{1/2} H$$

を考慮して

$$\rho(x, y, z, t) = DE/2 + BH/2 = \varepsilon E_0^2 \cos^2 \theta$$

で与えられる。もちろん ρ はスカラー量であるが、密接な関係のある電界は x 方向のベクトル量であるから、 ρ と同じ大きさで電界と同じ振動方向をもつ波動

$$\begin{aligned} \rho &= |\rho| E/E \\ &= \varepsilon E_0^2 \cos^2 \theta E_0 \cos \theta / |E_0 \cos \theta| \\ &= \varepsilon |E_0 \cos \theta| E_0 \cos \theta \end{aligned}$$

をつくってみよう。

波の伝播の直感的にわかりやすいモデルとして、弾性体棒内の縦波や強く張った弦を伝わる横波の例がよく使われるが、これらの場合には注目している点における力学的エネルギーすなわち、ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーのそれぞれは時間とともに変化をするがその総和は時間に関係なく常に一定であるのに対して、光波の場合は一定ではなく時間とともに変動するのである。すなわち電界、磁界の波形の伝播と電磁界のエネルギーの伝播は密接に結びついているのである。

3. 群 速 度

x 方向に伝播する平面波があるとき、横軸に x 、縦軸に位相 θ をとったグラフを図1に示す。周波数、位相速度、波数がそれぞれ $f_1, v_1, k_1; f_2, v_2, k_2$ の二波の位相が時刻 t の時に A 点で一致していたのが時刻 $t + \Delta t$ には B 点で一致するような変化を示したとする。このようにいくつかの波の位相速度の一致している点が時間とともに移動する速さを群速度と称する。図1の場合に群速度 v_* を求めてみよう。図1の場合には

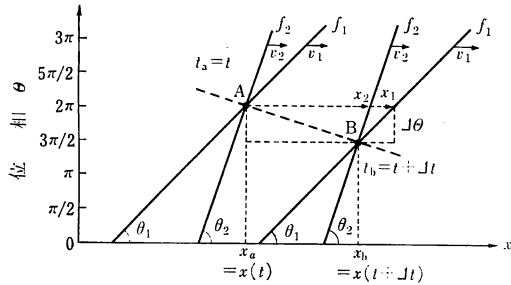


図1 平面波の位置と位相と群速度

$$\left. \begin{aligned} v_* &= \{x(t+\Delta t) - x(t)\} / \Delta t \\ &= (x_b - x_a) / \Delta t \\ v_2 &= v_1 + \Delta v \quad (\Delta v < 0) \\ f_2 &= f_1 + \Delta f \quad (\Delta f > 0) \\ k_2 &= k_1 + \Delta k \quad (\Delta k > 0) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

に設定してある。また、時刻 t に位相の一致している点 A を

$$x_a = x(t)$$

時刻 $t + \Delta t$ に位相の一致している点 B を

$$x_b = x(t + \Delta t)$$

とする。

$$x_1 = x(t) + v_1 \Delta t = x_a + v_1 \Delta t$$

$$x_2 = x(t) + v_2 \Delta t = x_a + v_2 \Delta t$$

$$= x_1 + \Delta v \Delta t$$

$$\Delta \theta / (x_1 - x_b) = \tan \theta_1$$

$$= 2\pi / \lambda_1 = 2\pi k_1$$

$$\Delta \theta / (x_2 - x_b) = \tan \theta_2$$

$$= 2\pi / \lambda_2 = 2\pi k_2$$

等の関係式がえられるから

$$(x_2 - x_b) / (x_1 - x_b) = k_2 / k_1$$

整理して

$$x_b = x_1 + k_1 (\Delta v / \Delta k) \Delta t$$

$$= x_a + v_1 \Delta t + k_1 (\Delta v / \Delta k) \Delta t$$

したがって

$$v_* = v_1 + k_1 (\Delta v / \Delta k)$$

一方、 $v_1 = f_1 / k_1$ より

$$\Delta v / \Delta k = (\Delta f_1 / \Delta k_1) k_1 - f_1 / k_1^2$$

$$= (\Delta f_1 / \Delta k_1) k_1 - v_1 / k_1$$

がえられるから、まとめてみれば群速度は

$$v_* = \Delta f_1 / \Delta k_1$$

と書くことができる。

4. パルス波の伝播速度と波形の変化

電気通信の分野では観測点における信号波形は時間の

関数として表示され、これを周波数成分に分解して

$$u(t) = \int U(f) \exp(i 2\pi f t) df$$

$$U(f) = \int u(t) \exp(-i 2\pi f t) dt$$

のようなフーリエ変換を利用する。これに対して、たとえば x 方向へ伝播する平面光波の任意の時刻における波形は上式で時間 t を x に、また周波数 f を波数 k に置きかえて

$$u(x) = \int U(k) \exp(i 2\pi k x) dx$$

$$U(k) = \int u(x) \exp(-i 2\pi k x) dk$$

のようなフーリエ変換公式を利用して扱うことができる。たとえばパルス幅 $\Delta x = X$ のパルス波の場合には

$$u(x) = \text{rect } x/X = \begin{cases} 1 & |x| < X/2 \\ 0 & |x| > X/2 \end{cases}$$

とにおいて

$$U(k) = X \text{ sinc}(kx)$$

と書ける。

このような時刻 $t=0$ に $x=0$ のところにいたパルスが速度 v_F で形をくずさずに x 方向に伝播してゆくならば、任意の時刻 t にはこのパルスは $x = v_F t$ のところにある

$$\text{rect}\{x - v_F t\}/X = \begin{cases} 1 & |x - v_F t| < X/2 \\ 0 & |x - v_F t| > X/2 \end{cases}$$

となっているはずである。一般に

$$f(x) = \int F(k) \exp(i 2\pi k x) dk$$

において $x \rightarrow x - v_F t$ のような置き換えをやれば

$$f(x - v_F t) = \int F(k) \exp\{i 2\pi k (x - v_F t)\} dk$$

となる。すなわち、時刻 $t=t$ に観測される波形 $f(x - v_F t)$ は時刻 $t=t + \Delta t$ には $x \rightarrow x + \Delta x$ のところへ移動している。いま、 $F(k) dk$ という振幅をもつ平面波を

$$F(x, t) dk = F(k) \exp\{i \Theta_k(x, t)\} dk$$

$$\Theta_k(x, t) = 2\pi k \{x - v(k)t\}$$

とにおいて、これを重ね合わせて

$$f(x, t) = \int F(x, t) dk$$

という波をつくってみる。もしも、 $v(k) = v_F t = k$ によらず一定、が成立するならば、いうまでもなく、

$$f(x, t) = f(x - v_F t)$$

$$= \int F(k) \exp\{i 2\pi k (x - v_F t)\} dk$$

がえられる。すなわち $f(x, t)$ は同じ位相速度をもつさまざまな k の平面波の合成でつくることができる波動現象を表わしている。 $v(k)$ が一定でない場合に時刻 t に $f(x, t)$ で与えられている波形とまったく同じ波形が時刻 t_* に x_* のところで再現されて $f(x, t) = f(x_*, t_*)$ となっているのが観測されたとする。 t と t_* の中間の時間ではおそらく波形は崩れているであろうがそれは気にしないこととしよう。 N を整数として

$$\theta_k(x_*, t_*) = \theta_k(x, t) + N$$

という条件が成立するならば、いま設定した条件は確かに満足されている。この場合には

$$x_* = x + v_*(t_* - t) = x + \Delta x$$

$$t_* = t + \Delta t$$

と置いて

$$\theta_k(x_*, t_*) - \theta_k(x, t) = N$$

を変形して

$$k \{v_* - v(k)\} \Delta t = N$$

がすべての k に対して成立しなければならぬから

$$\frac{\partial \{k(v_* - v(k))\}}{\partial k} = 0$$

$v = f/k$ を考慮しながら整理して

$$\begin{aligned} v_* &= v(k) + k \, dv/dk \\ &= df/dk \end{aligned}$$

がえられる。すなわち、いま注目しているようなすべての構成波の位相が一致している点の移動する速度は前章で導入した群速度(1)式である。

そして

$$f(x, 0) = \text{rect}(x/X)$$

の場合には $\text{rect}(x/X)$ という幅 $2X$ のパルスは分散性の媒質の中でも群速度が k によらず一定の場合には観察する時間に気をつければその形を崩すことなく伝播してゆくのが観測される。パルスの中心となる波数を k_0 とおくと

$$k > k_0 \text{ の場合には } d \{df/dk\} / dk > 0$$

$$k < k_0 \text{ の場合には } d \{df/dk\} / dk < 0$$

$$k = k_0 \text{ の場合には } d \{df/dk\} / dk = 0$$

ならばパルス幅は一般にはしだいに狭くなり、逆ならばしだいに広がってゆく。 $d \{df/dk\} / dk = 0$ が成立する場合をゼロ分散条件が満足されている場合と称する。

位相速度を v とすれば、分散のない媒質ではパルス波の伝播速度は位相速度に等しい。われわれは光波に伴って運搬されるエネルギーは平面波の場合であっても空間に様に分布しているのではなく電界振幅の大きい部分に集中してその伝播に伴って運搬されてゆくことを知っ

ている。この振幅の大きい部分は近似的にパルスとみなすことができるから、光波に伴って運搬されるエネルギーの伝播速度は本来群速度なのだと考えるべきであって、真空中のようにたまたま分散のない媒質中を伝播するときに限ってその速度が位相速度と一致しているのが観測されるのだと解釈をすべきである。

光波の伝播を扱う場合に波としては変位の伝播すなわち E の伝播だけに注目して E^2 波の伝播は多くの場合問題とせず、その単位時間当たりの時間的な積算値のみに注目してこれを光の強さとして光波の重要な属性とみなすのが伝統的な光学の手法であった。太陽から地上に毎秒入射するエネルギーを 500 W/m^2 程度と見積ってみる。これをポインティング・ベクトル S の大きさとすれば S は

$$S = \epsilon_0 c E^2 = 2.7 \times 10^{-3} E^2 \quad (\text{W/m}^2)$$

と書けるから E は、

$$E = 4 \times 10^2 \quad (\text{V/m})$$

程度であるが、気体レーザーではこの 10^6 倍、固体レーザーではさらにこの 10^8 倍程度の入射エネルギーがえられるので、電界の 2 乗項、3 乗項の効果が無視できなくなってきた。従来の光波による観測は被検体に何ら本質的な影響を与えないで、あるがままの自然をみるのに適した手法であったのであるが、最近はこの常識が通用するのは光学的測定法の一部でしかなくなってきたと言えそうである。

5. 回 折

均質な媒質の中では光波は等位相波面の法線方向に伝播してゆくとして取り扱ってうまくゆく。しかし媒質の中に何らかの不均質な部分があると、そこでは光波はそれまでの等位相波面の法線方向には伝播しないようになる。別の言葉で言えばそこではいままでの等位相波面の単純な外挿から予測されるものとは異なった等位相波面が形成されるようになる。これが広義の回折現象であるがこれらの中から反射、屈折、散乱現象として扱われるような現象を除いたものを通常われわれは回折現象とよんでいる。すなわち波長と同程度の広がりをもった障害物の付近で光波がそれまでの進行方向の外挿から予測される方向とは異なった方向にも伝播してゆくようになる現象を回折という、というのが一般に採用されている回折の定義である。回折と散乱の関係については次回に考察しよう。

図 2 のように点光源 Q から出発した光波が P 点に到着したときの変位 u_p を、光波の変位をベクトル量でな

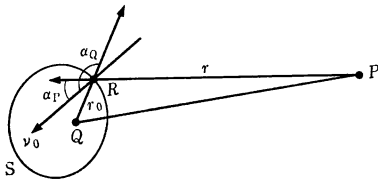


図2 H.F.K. 近似による回折波の進路

くスカラー量として扱うことのできる場合すなわちスカラー近似の回折論の基礎公式として重要な Huygens-Fresnel-Kirchhoff の公式 (H.F.K. 公式) を既知としてそこから出発しよう。

$$u_p = \iint H(r)u(r_0) dS \quad (2)$$

$$H(r) = (\kappa/4\pi)(1/r) \{ \cos \alpha_p - \cos \alpha_q \} \times \exp i(\kappa r - \pi/2) \quad (3)$$

$$\kappa = 2\pi/\lambda$$

(2)式が H.F.K. 公式である。Q点から出発した光波が時刻 t にQ点を包む任意の閉曲面上の任意の点Rに到着したときの変位を

$$u(r_0) = (A/r_0) \exp i(\kappa r_0 - \omega t)$$

とし、またR点での光波の変位が1のときにR点を中心とする面積 dS の部分から出発した光波が観測点Pに到着するときの変位が $H(r)$ であると解釈をすることができる。Qから出発した光が時刻 t にPに到着する状況を取り扱うのに直接光波がQ→Pの方向に伝播するとする通常の方法によらないで、Qを出発した光はQをとりまく任意の閉曲面Sの上にもまず到着するのであるから、S面を点光源Qのかわりにそこから光が出発する光源面とみなし、P点にはS面上の各点から出発した光がくるとしても差し支えがないはずだというのが(2)式の主張である。この場合P点で光源を見ると一点Qが光って見えるのでなく、S面が大きな光球として光って見えてしまいそうな気がするがS面上に障害物がない場合に実際にS面上の各点からP点に到着する光波の振幅を見積ってみればその心配のないことが確かめられる。光線近似による光線直進および進路可逆の原理と広義の Huygens の原理との関係の考察は興味のある話題ではあるが、本稿での深入りは差し控えたい。

[Fresnel の回折, Fraunhofer の回折]

図3のようにS面がQ, Pの中間に置かれた十分に広い平板であると、QからS面に下ろした垂線の足をO, Oを座標の原点としてS面上に x, y 軸をとり、またQ→Oの方向を z 軸の正方向とする。観測点Pは z 軸

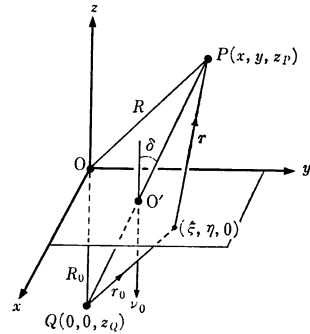


図3 平面上の穴による回折

の近くにあるとし、またQ→Pを結ぶ線分とS面との交点をO'とする。このように設定すれば、(2)式右辺の被積分関数は

$$H(r)u(r_0) = (\kappa A/4\pi) 2 \cos \delta / z_q R$$

$$r_0^2 = \xi^2 + \eta^2 + z_q^2$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_p^2$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z_p^2$$

$$R_0^2 = z_q^2$$

のように変形される。

$$|\xi/R_0|, |\eta/R_0|, |\xi/R|, |\eta/R| < 1$$

の場合にはその1乗項までを考慮する近似で扱えば

$$a = \overrightarrow{OP}/OP = (a_x, a_y, a_z)$$

$$a_0 = \overrightarrow{QO}/QO = (a_{0x}, a_{0y}, a_{0z})$$

とにおいて

$$u_p = (C/R R_0) \exp i\{\kappa(R + R_0) - \omega t - \pi/2\} \times \iint t(\xi, \eta) \exp i\{\kappa\Phi(\xi, \eta)\} d\xi d\eta \quad (4)$$

$$\Phi(\xi, \eta) = \xi(a_{0x} - a_x) + \eta(a_{0y} - a_y) + (1/2)\{(1/R_0 + 1/R)(\xi^2 + \eta^2) - (a_{0x}\xi + a_{0y}\eta)^2/R_0 - (a_x\xi + a_y\eta)^2/R\}$$

$$t(\xi, \eta) = (x, y) \text{ 平面の振幅透過関数} \quad (5)$$

と書ける。これがフレネル近似の回折の基本式である。さらに

$$|\xi/R_0|, |\eta/R_0|, |\xi/R|, |\eta/R| \ll 1$$

であって、これらの1乗項も無視する近似で扱うことのできる回折現象をフラウンホーファーの回折と称する。

6. 回折シミュレーション

図4のように遮光板上に波長に比して十分に小さな穴をあけてこれに平行光線を入射させると、ここで回折が生ずる。穴を中心とする半径 R_0 の球面状スクリーン上の回折光の振幅 A_p は H.F.K. 公式からみて

$$A_p = B(1 + \cos \theta)/2$$

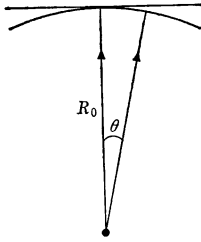


図 4 素元波の波面

である。θ が十分に小さい場合にはスクリーンは平面とみなすことができ、スクリーンは一様に明るく光っているのが観測される。これは前章の H. F. K. 公式の $H(r)$ に対応するものとみなすことができる ((3)式)。

歴史的には最初ホイヘンスは波面が注目した点に到着すると波面上のすべての点から新しく二次波が発生し、それをよせ集めることによって次の波面がつくられると考えた。この二次波のことをわれわれは通常ホイヘンスの素元波とよんでいるのであるが、今までの取扱いから H. F. K. 公式の $H(r)$ はこのホイヘンスの素元波を解析的に表現したものであり、われわれのつくった穴からの回折光は近似的にホイヘンスの素元波とみなすことができると考えてよいことが理解されよう。

遮光板上 x 軸上に原点を中心に幅 $2a$ をとり N_{max} 個の穴によって $(N_{max}-1)$ 等分してみる。穴の間隔は $d=2a/(N_{max}-1)$ となる。これに平行光線が入射したときにスクリーンを照射する光波の強度のコンピュー

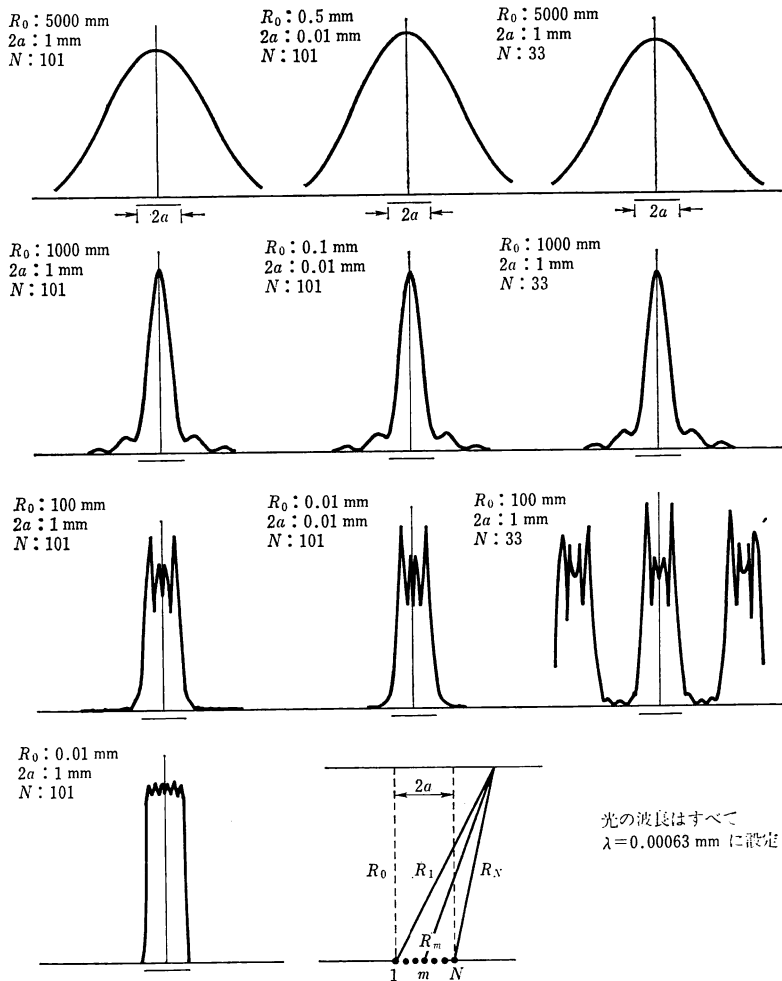


図 5 幅 $2a$ の回折格子による回折のシミュレーション
 R_0 : 回折孔のある面からスクリーンまでの距離 (mm), $2a$: 回折格子の全幅 (mm), N : 回折孔の総数。図の横軸は観測点の座標であるが長さは $2a$ を単位として表示されている。縦軸は任意スケールによる回折光強度である。

タシミュレーションを、光の波長を $\lambda=630\text{ nm}$ に設定して $2a, R_0$ 等を変えながら試みた結果を図5に示す。

7. 回折格子

5. 章で障害物の付近で回折現象が生ずることを説明した。ここではその障害物として原子または分子を閉じこめたさまざまな形をした空洞を想定しよう。空洞の壁は光波の波長に比して十分に薄かつ透明であって、それ自身は光波の伝播に対して何等影響をおよぼすことはないかと仮定する。

たいへんに大上段にふりかぶった条件の設定をしたが、もちろん一枚のガラス板その他真空以外の任意の媒質すべてがこの条件を満足する空洞とみなすことができる。単に任意の媒質という表現をするのとの違いは、常に境界面で囲まれているという意識が強調されていることであろう。

7.1 正弦関数格子

$z=0$ の面上に入射光の位相を変調する厚さ l のフィルターをおき、その振幅透過関数(5)式を

$$t_+(\xi, \eta) = \exp\{-i(2\lambda/d)\xi\}$$

とおいてみる。フラウンホーファー回折の式は(4)式を参照して

$$u_P = (C/RR_0) \exp i\{\kappa(R+R_0) - \omega t - \pi/2\} \\ \times \iint t(\xi, \eta) \exp i\{\kappa\Phi(\xi, \eta)\} d\xi d\eta$$

$$\Phi(\xi, \eta) = \xi(a_{0z} - a_z) + \eta(a_{0y} - a_y)$$

$$\alpha = a_{0z} - a_z$$

$$\beta = a_{0y} - a_y$$

与えられるから、

$$\int \exp i\{\kappa\alpha - 2\pi/d\}\xi d\xi = 2\pi\delta(\kappa\alpha - 2\pi/d)$$

と書けることに注意して

$$u_P = (C/RR_0) \exp i\{\kappa(R+R_0) - \omega t - \pi/2\} \\ \times \left\{ \int \exp i(\kappa\eta\beta) d\eta \right\} 2\pi\delta(\kappa\alpha - 2\pi/d)$$

がえられる。すなわちこのような $t(\xi, \eta)$ のフィルターを用いればこの空洞に垂直入射した光線は通過後

$$\kappa d = 2\pi/d \quad \text{すなわち} \quad d \sin \theta = \lambda$$

の方向に伝播する。

$L(\xi)$ を $x=\xi$ の点におけるフィルターの光学的厚さ、 $n_0+n(\xi)$ をその点における屈折率とすれば

$$L(\xi) = \{n_0+n(\xi)\}l$$

であるから、もしもフィルターの屈折率の分布が

$$L(\xi+d) - L(\xi) = \lambda$$

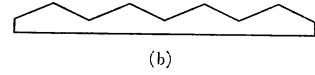
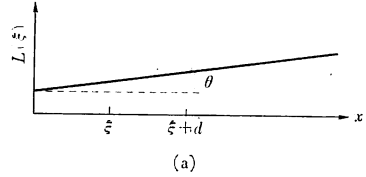


図6 回折格子の光学的厚さ L の場所による変化

のような条件を満足しているならば、このフィルターを通過した光の伝播方向は

$$d \sin \theta = L(\xi+d) - L(\xi)$$

で与えられる。 $L(\xi)$ の ξ による変化を屈折率の変化に求めないでフィルターの厚さの変化によると考えてみれば、図6(a)を参照して

$$L(\xi) = \{n_0+n(\xi)\}l = nol(\xi)$$

$$d \sin \theta = nol(\xi+d) - nol(\xi)$$

$$\{l(\xi+d) - l(\xi)\} / d = \sin \theta / n_0$$

となる。 θ が十分に小さい場合には $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ となるから、いま注目しているフィルターの正体は何のことではない、ようするに頂角 θ/n_0 のプリズムあるいはそれと同等の機能をもったものである。今度は

$$t_-(\xi, \eta) = \exp i\{2\lambda/d\}\xi$$

というようなフィルターを使えば透過光は $-\theta$ の方向に伝播する。それでは t_+ と t_- を併用したらどうなるであろうか。2枚のフィルターを光線の伝播方向に対して直列に挿入すれば合成した透過関数は

$$t = t_+ t_- = 1.$$

となつてなにもおもしろいことはない。なんとか工夫をしてこれを並列として

$$t = t_+ + t_-$$

としてやりたい。そのためには以下の2通りが考えられる。

- (1) フィルターを二つの領域にわけて、一方を t_+ 、他方を t_- とする方法が考えられる。図6(b)のように

$$\xi = md \sim (m+1/2)d \quad \text{の領域を } t_+$$

$$\xi = (m+1/2)d \sim (m+1)d \quad \text{の領域を } t_-$$

ただし $m=0, 1, 2, \dots$

としてやればよい。このためにはフィルターを圧電効果をもつ材料でつくり、これに交流電界をかけることによってフィルター内に定在音場をつくれればそれに応じて密度の周期的な変化が生ずる。多くの場

合屈折率の変化は密度の変化に比例するから、これをいま考えているフィルターとして利用することができる。(次号参照)

$$(2) \quad t = t_+ + t_-$$

$$\begin{aligned} &= \exp\{-i(2\lambda/d)\xi\} + \exp\{i(2\lambda/d)\xi\} \\ &= \cos\{(2\lambda/d)\xi\} / 2 \\ &= \sin\{(2\lambda/d)\xi + \pi/2\} / 2 \end{aligned}$$

のように明暗が \sin 関数あるいは \cos 関数形の変化をするフィルターは優れた所要の性能をもった素子として利用することができる。これが通常、正弦関数格子とよばれているものである。

7.2 回折格子

図7のように幅 $2a$ の間に間隔 d で N 個の小穴があるとき m 番目の穴から観測点 P に到着する回折波の変位 u_m は穴から P 点までの距離を R_m とおいて

$$\begin{aligned} u_m &= A \sin(\kappa R_m - \omega t) \\ u_P &= \sum u_m \end{aligned}$$

を計算すればよい。 d のことを格子定数と称する。具体的な数値を実際にこの式に代入して計算をしたのが前章のシミュレーションである。

レンズのような結像系を使用することができる場合には図8のように一定方向への回折光を焦点面上の一点に収束させることができるから理想的なフラウンホーファー回折像を実験的に作りだすことができる。この場合前章のシミュレーションに対応する回折像はレンズの焦点面上の像ではなく、穴をあけた遮光板より R_0 だけ前方の面に対応する像面上の像である。図8において

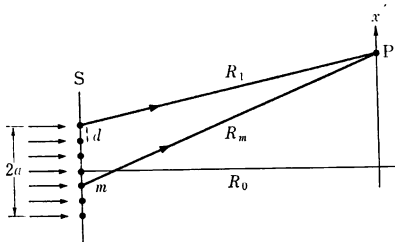


図7 結像系を利用しない場合の回折

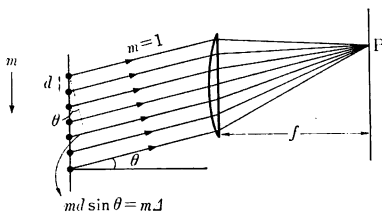


図8 結像系を利用した場合のフラウンホーファー回折

$m=1$ の穴から観測点 P までの光学的距離を L_1 とすれば、 m 番目の穴から P 点までの光学的距離 L_m は

$$L_m = L_1 + md \sin \theta$$

で計算されるから、この穴から P 点に到着する回折波の変位は

$$\begin{aligned} u_m &= A \sin(\kappa L_m - \omega t') \\ &= A \sin\{\kappa(L_m - L_1) - \omega t' + \kappa L_1\} \end{aligned}$$

で与えられる。さらに

$$\begin{aligned} \Delta &= d \sin \theta \\ \omega t &= \omega t' - \kappa L_1 \end{aligned}$$

とにおいて

$$u_m = A \sin(\kappa m \Delta - \omega t)$$

したがって P 点で観測される回折波の変位は

$$u = \sum u_m$$

となる。実際に計算を行なってみると結果は、

$$u_P = A \left\{ \frac{\sin(\kappa N \Delta / 2)}{\sin(\kappa \Delta / 2)} \right\} \sin(\alpha - \omega t) \quad (6)$$

で与えられる。これが回折格子による回折に対する基本的な公式である。

$Nd = 2a$ において $d \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ の場合には

$$\Delta = d \sin \theta = 2a / N$$

であるから、 $\kappa \Delta / 2$ が十分に小さい場合には

$$\begin{aligned} u_P &= AN \left\{ \frac{\sin(\kappa a \sin \theta)}{(\kappa a \sin \theta)} \right\} \sin(\alpha - \omega t) \\ &= B \sin(\alpha - \omega t) \quad (7) \end{aligned}$$

$$B = AN \left\{ \frac{\sin(\kappa a \sin \theta)}{(\kappa a \sin \theta)} \right\}$$

がえられる。これがスリットの回折の基本公式である。

上に求めた回折格子の(6)式は無限に小さな穴を並べたとしてつくられているが、実際回折格子は幅 $2a$ のスリットを一定の間隔で規則正しく並べてつくられる。この場合には(6)式の A を(7)式の B で置き換えて

$$\begin{aligned} u_P &= B \left\{ \frac{\sin(\kappa N \Delta / 2)}{\sin(\kappa \Delta / 2)} \right\} \sin(\alpha - \omega t) \\ &= C \sin(\alpha - \omega t) \\ C &= B \left\{ \frac{\sin(\kappa N \Delta / 2)}{\sin(\kappa \Delta / 2)} \right\} \\ &= AN \left\{ \frac{\sin(\kappa a \sin \theta)}{(\kappa a \sin \theta)} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sin(\kappa N \Delta / 2)}{\sin(\kappa \Delta / 2)} \right\} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $2a$ は個々のスリットの幅、 d は相隣るスリット間の距離であって、 $Nd = 2a$ という関係は成立しない。一個のスリットの場合の取扱いと混同しないでいただきたい。この場合振幅 C の大きくなるのは

$$\sin(\kappa \Delta / 2) = 0$$

となる方向であるから

$$\kappa \Delta / 2 = p\pi$$

すなわち、

$$d \sin \theta = p\lambda \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

を満足する θ の方向である。 p のことを回折の次数と称

する。p 次の明線の幅は $C=0$ になる方向、すなわち

$$Nd \sin \theta = N\{p+1/N\}\lambda$$

によって制限されている。また波長 $\lambda+d\lambda$ の p 次の明線が波長 λ の明線と識別できる限界は $\lambda/d\lambda=Np$ で与えられる。この値を回折格子の分解能と称する。

前章のコンピュータシミュレーションで、 $2a, \lambda, N$ 一定の条件で R を変化させた図が $2a=1\text{ mm}$ の場合と $2a=0.01\text{ mm}$ の場合で格子定数 $2a/N$ が異なっているにもかかわらず、 $(2a)^2/R$ が等しい場合の図形がまったく一致しているのに気がつかれていた方もおられるであろう。一般的にいって、回折格子面から観測面までの距離を R 、スリットの幅を $2a$ とするとき、光の波長が一定の場合には $(2a)^2/R$ が一定の地点では $2a$ の値に関係なく、回折波の明線の構造はまったく同一となっていることが観測される。

このように穴の数 N 、格子定数 d は回折縞の形状を扱う場合にはあまり重要な役割をもっていないようにみえるのであるが、回折格子の分解能の計算でわかるように、波長による回折縞のできる位置のずれが問題になるような場合、すなわち回折格子の分光学的な応用にはたいへん重要な役割を持っているのである。

8. 光波の変位の重ね合わせとエネルギーの重ね合わせ：干渉現象

(1) 図9のように Q_1, Q_2 のところにあるそれぞれ面積 $S=2a \times 2b$ の長方形の穴を通過した準平行光線が P 点で重なったとする。光線近似が成立している場合ならば P 点のところの光の照射している面積も $2a \times 2b$ である。 Q_1, Q_2 を通過する光波の振幅はともに A であって、それぞれが P 点に到着したときの位相も等しかったとする。この場合、波の変位の重ね合わせの原理によれば、P 点における合成波の振幅 A_P は

$$A_P = A_1 + A_2 = 2A$$

になる。

一般に注目点の面積 S に単位時間当たり入射する光のエネルギーすなわち放射束を F 、光の強度を I 、また γ

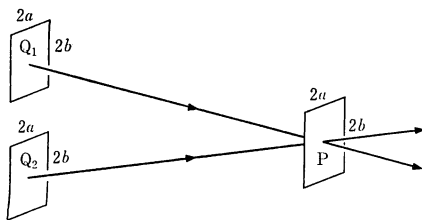


図9 回折波の重ね合わせ

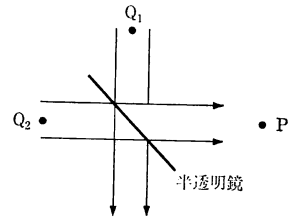


図10 半透明鏡を利用した波の重ね合わせ

を比例係数として

$$F = IS$$

$$I = \gamma \times (\text{振幅})^2$$

とにおいてよいものとする。

Q_1, Q_2 を通過する放射束をそれぞれ F_1, F_2 とおけば、振幅はともに A であるから

$$F_1 = I_1 S = \gamma A^2 S = IS$$

$$F_2 = I_2 S = \gamma A^2 S = IS$$

がえられる。

また観測点 P における放射束は振幅重ね合わせの原理を用いて計算した場合

$$F_P(\text{振幅合成}) = \gamma(2A)^2 S$$

エネルギー重ね合わせで計算した場合

$$F_P(\text{強度合成}) = F_1 + F_2 = \gamma 2A^2 S$$

となり、 $F_P(\text{振幅合成})$ と $F_P(\text{強度合成})$ は一致しない。

(2) また(1)とは別の例題として図10のような装置をつくって、反射率、透過率がそれぞれ50%の半透明鏡を用いて2光源 Q_1, Q_2 からの準平行光線とみなせる光波の合成をやれば、P点では

$$A_P = A_1 + A_2 = A/2 + A/2 = A$$

$$F_P(\text{振幅合成}) = \gamma A^2 S$$

$$F_P(\text{強度合成}) = F_1 + F_2 = \gamma \{(A/2)^2 + (A/2)^2\} S = \gamma(A^2/2)S$$

となり、やはり $F_P(\text{振幅合成})$ と $F_P(\text{強度合成})$ は一致しない。これらは干渉計の扱いに関して古くから知られているパラドックスである。変位の重ね合わせの原理もエネルギー重ね合わせの原理すなわちエネルギー保存則もともに高い信頼度をもっている原理であるから、上の論理の展開にはどこかに欠陥があるはずである。その修正法は case by case で異なる考察を必要とするので通常は各論的な考察にゆずり一般論としてはこれ以上あまり深入りしないですが、ここでは上述の(1)、(2)についてももう少し考察を深めてみよう。

後者(2)の場合は比較的簡単である。まず Q_1 のみがあって Q_2 がいない場合を考えてみよう。この場合には半

透明鏡をつくることのできるという前提条件の中に

$$F_1(\text{反射}) = F_1(\text{透過}) = F_1/2$$

$$F_1 = \gamma A_1(\text{入射})^2 S$$

ということが含まれているのであるから

$$\gamma A_1(\text{反射})^2 S = \gamma A_1(\text{透過})^2 S = F_1/2$$

でなくてはならない。すなわち

$$A_1(\text{反射})^2 = A_1(\text{透過})^2 = A_1(\text{入射})^2/2$$

したがって

$$A_1(\text{反射}) = A_1(\text{透過}) = A_1(\text{入射})/2^{1/2}$$

でなくてはならないということが前提条件に含まれているのであって、

$$A_1(\text{反射}) = A_1(\text{透過}) = A_1(\text{入射})/2$$

という設定がそもそも誤りであったのである。

$$A_1(\text{反射}) = A_1(\text{透過}) = A_1(\text{入射})/2^{1/2}$$

が成立するためには半透明鏡がどのようなものでなければいけないかの吟味は通常の反射率計算法の問題である。しかし Q_1 と同時に Q_2 がある場合を考えると今度は「同様に」というわけにはいかない。

$$A_1(\text{反射}) = A_1(\text{入射})/2^{1/2} = A/2^{1/2}$$

$$F_{1P} = F_1(\text{入射})/2$$

$$A_2(\text{透過}) = A_2(\text{入射})/2^{1/2} = A/2^{1/2}$$

$$F_{2P} = F_2(\text{入射})/2 = F_1(\text{入射})/2$$

とおけば、

$$\begin{aligned} A_P(\text{振幅合成}) &= A_1(\text{反射}) + A_2(\text{透過}) \\ &= 2^{1/2} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_P(\text{振幅合成}) &= \gamma A_P(\text{振幅合成})^2 S \\ &= \gamma 2A^2 S \\ &= 2F_1(\text{入射}) \end{aligned}$$

となる。一方、エネルギーの重ね合わせからは

$$F_P(\text{強度合成}) = F_{1P} + F_{2P} = F_1(\text{入射})$$

となり、パラドックスからは抜けだせない。

$$\begin{aligned} A(\text{下方出力}) &= A_1(\text{透過}) + A_2(\text{反射}) \\ &= 2(A/2^{1/2}) \cos \{ \delta_1(\text{透過}) - \delta_2(\text{反射}) \} / 2 \\ &\quad \times \sin \{ \theta + \alpha(\text{下}) \} \end{aligned}$$

したがって

$$F(\text{右}) = \gamma S \times 2A^2 \cos \{ \delta_1(\text{反射}) - \delta_2(\text{透過}) \} / 2$$

$$F(\text{下}) = \gamma S \times 2A^2 \cos \{ \delta_1(\text{透過}) - \delta_2(\text{反射}) \} / 2$$

がえられる。

$$\delta_1(\text{反射}) - \delta_2(\text{透過}) \quad \text{と} \quad \delta_1(\text{透過}) - \delta_2(\text{反射})$$

の一方が0のとき他方が π であるような配置の場合には

$$F(\text{右}) + F(\text{下}) = \gamma S \times 2A^2 = F_1(\text{入射}) + F_2(\text{入射})$$

となり、一見困難は回避できるようであるが、

$$\delta_1(\text{反射}) - \delta_2(\text{透過}) \quad \text{と} \quad \delta_1(\text{透過}) - \delta_2(\text{反射})$$

の両方がともに0、またはともに π となるような調整を

することは干渉計ではそれほど困難な作業ではないから、上のような解釈は一般的ではない。(1)の例題と一緒にして H. F. K. 近似に使用されている変位の重ね合わせの原理に結びつく形で考察をしてみよう。図9の Q_1, Q_2 が離れていないで任意の広い面光源の中の一点 Q 点のところにある $2a \times 4b$ の面積を $2a \times 2b$ ずつに等分して、その一方を Q_1 他方を Q_2 に設定したとする。 Q_1 に入射した平行光線からの二次波は(まわりの状況には関係なく)長方形の穴の回折の公式に従う回折現象を示し、観測点 P のところではエネルギーの大半は長方形型の暗線でかこまれた

$$\text{面積 } S_P \{ \propto 1/(2a \times 2b) \}$$

の中に伝播される。もちろんその外側にも広がってはいるが定性的には無視してよいくらいに弱い。その放射束を F_{P1} 振幅を u_{P1} とすれば、エネルギー保存則によって

$$F_{P1} = \gamma(u_{P1})^2 S_P \approx F_{Q1} = \gamma A^2(2a \times 2b)$$

ただし、 F_{P1} は Q_1 のところの面積 $2a \times 2b$ に入射する放射束である。整頓をすれば

$$(u_{P1})^2 \approx A^2(2a \times 2b) / S_P \propto A^2(2a \times 2b)^2$$

$$u_{P1} \propto A(2a \times 2b)$$

がえられる。まったく同様に Q_2 の部分から光に対しては

$$F_{P2} \propto \gamma A^2(2a \times 2b)$$

$$u_{P2} \propto A(2a \times 2b)$$

$Q = Q_1 + Q_2$ からの光に対しては、 $S_P \propto 1/(2a \times 4b)$ に注意して

$$F_P = F_{P1} + F_{P2} \propto \gamma A^2 2(2a \times 2b)$$

$$= \gamma A^2(2a \times 4b)$$

$$u_P = u_{P1} + u_{P2} \propto 2A(2a \times 2b)$$

$$= A(2a \times 4b)$$

したがって

$$\gamma(u_P)^2 S_P \propto \gamma A^2(2a \times 4b) = F_P$$

が成立する。この左辺は注目している観測点における光源面上の各点からの振幅の重ね合わせをもとに計算した面積 S_P についての放射束、右辺は観測点における光源面上の各点から入射する放射束をエネルギー重ね合わせの原理によって計算した面積 S_P についての放射束である。したがってこの式は振幅重ね合わせの原理とエネルギー重ね合わせの原理による結果の間には面積 S_P について考察をすれば矛盾がないことを示している。すなわち、十分幅の広い準平面波の場合であっても変位の重ね合わせの原理を使った場合とエネルギー重ね合わせの原理を使った場合とで結論に一見矛盾が生じた場合には回折の効果は無視したことが影響しているのではないかと、いうことを吟味をしてみる必要がある。