

研究

最大エントロピー法の天体スペckル干渉法への応用

泉田 史・小松 進一

早稲田大学理工学部応用物理学科 〒169 東京都新宿区大久保 3-4-1

(1989年2月28日受理)

Maximum Entropy Method Applied to Stellar Speckle Interferometry

Hisasi IZUMITA and Shin'ichi KOMATSU

Department of Applied Physics, School of Science and Engineering,
Waseda University, 3-4-1, Ohkubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169

We propose to adopt a Maximum Entropy Method for estimating an angular distance of binary star as well as its position angle. By computer simulation studies, it can be shown that MEM algorithm gives better estimation with fewer speckle interferograms than a conventional algorithm based on the FFT.

1. はじめに

地上における通常の光学的天体観測では、大気擾乱によって星像が拡がり、角分解能が1秒程度に制限されてしまう。ところが、短時間露光(0.1~0.01s程度)の天体写真は、その広がりの中にスペckルを持ち、回折限界までの情報を含んでいる¹⁻³⁾。このスペckル写真から星の情報を引き出す方法は、Labeyrie⁴⁾の方法をはじめとし多数提案されている。しかし、FFTなどに基づいた線形的な推定方法では、統計的に安定な結果を得るためには、大量のデータと処理時間を必要とする。そこで、少量のデータからでも高分解能の結果が得られる方法が望まれる。

一方、最大エントロピー法(maximum entropy method:以後MEMと略称)は、スペckル解析の一手法としてBurg⁵⁾によって提案されたものである。これは、情報エントロピーの概念を導入してスペckル計算を行なうもので、ノイズに埋もれた周期信号成分に対して短いデータからも高分解能で安定なスペckルが得られるという利点をもつ⁶⁾。

そこで、本研究ではBurg法を天体スペckル干渉法に応用し、二重星の角距離と位置角の推定に用いることを提案し、その有効性を計算機シミュレーションによって、定量的に評価する。

2. 原理と推定の手順

天体スペckル干渉法のなかで最も基本的手法として以下のようなLabeyrieの方法^{4,7)}が知られている。輝度分布 $i_0(x)$ の星があったとき、その天体スペckル写真 $i_s(x)$ は、大気ゆらぎと望遠鏡を合わせた系の点像関数を $psf(x)$ とすると、これらのコンボリューション

$$i_s(x) = i_0(x) * psf(x) \quad (1)$$

で表わされる。これをフーリエ変換すると、

$$I_s(f) = I_0(f) \cdot PSF(f) \quad (2)$$

となる。(以後、像面の関数は小文字、フーリエ面の関数は大文字で表わす。)また、(2)式の両辺について絶対値平方のアンサンブル平均を考えると

$$\langle |I_s(f)|^2 \rangle = |I_0(f)|^2 \cdot \langle |PSF(f)|^2 \rangle \quad (3)$$

となる。さらに今、問題にしている星の近傍に、視直径が無視できるほど小さい別の星が存在するとき、この星のスペckル写真 $I_r(f)$ についても同様な関係

$$\langle |I_r(f)|^2 \rangle = \langle |PSF(f)|^2 \rangle \quad (4)$$

が得られる。(3)、(4)式から

$$|I_0(f)|^2 = \langle |I_s(f)|^2 \rangle / \langle |I_r(f)|^2 \rangle \quad (5)$$

のように星の輝度分布のパワースペckトルが求まる。これを逆フーリエ変換するとWiener-Khintchineの関係から、 $i_0(x)$ の自己相関関数が得られ、二重星の場合には角距離と位置角が測定できる。このとき重要なのはア

ンサンプル平均を精度良く推定することで、そのためには一般に十分多くのスペックル写真を必要とする。二重星の場合には(5)式のパワースペクトルが周期性をもつので、逆フーリエ変換の代わりに MEM を利用することにより、少ない枚数のスペックル写真からでも高い精度で二重星の角距離を推定できると期待される。

MEM^{5,6,8)} とは、ランダム過程のサンプル値 $\{x(i); i=1, 2, \dots, n\}$ に対して、Yule-Walker の方程式

$$\begin{bmatrix} C(0) & C(1) & \dots & C(m) \\ C(1) & C(0) & \dots & C(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(m) & C(m-1) & \dots & C(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1^{(m)} \\ \vdots \\ a_m^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(m) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$P(m) = \frac{1}{2} \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \left[\left\{ x(i) + \sum_{k=1}^m a_k^{(m)} x(i+k) \right\}^2 + \left\{ x(i+m) + \sum_{k=1}^m a_k^{(m)} x(i+m-k) \right\}^2 \right] \quad (7)$$

と、「予測フィルタに信号を前向きに通す場合と逆向きに通す場合の出力の平均 $P(m)$ を最小にする」という Burg の条件から、自己相関関数 $\{C(i); i=0, 1, \dots, m\}$ 、平均出力 $P(m)$ 、予測フィルタ係数 $a_k^{(m)} (1 \leq k \leq m)$ を求め、

$$S(f) = \Delta t P(m) / \left| 1 + \sum_{k=1}^m a_k^{(m)} \exp(j2\pi k f \Delta t) \right|^2 \quad (8)$$

よりパワースペクトルを推定する方法である。ただし、 Δt はサンプル間隔、 $C(i)$ はラグ $(i\Delta t)$ の自己相関関数、 j は虚数単位である。

MEM によるスペクトル推定は予測フィルタの次数に大きく依存することが知られており、打ち切り基準が重要となる。本研究では、第一基準として、赤池の最終予測誤差 (final prediction error)⁹⁾ が最小値をとるように次数を決定した。ここで、

$$FPE = \sum_{i=1}^n [\{ x(i) - x'(i) \}^2] \quad (9)$$

ただし、

$$x'(i) = - \sum_{k=1}^m a_k^{(m)} x(i-k) \quad (10)$$

である。

これは、ランダム過程のサンプル値 $\{x'(i); i=1, 2, \dots, n\}$ によって推定したフィルタ係数 $a_k^{(m)}$ を用いて、同じ統計的性質をもつデータを予測したときの予測誤差の期待値を表わしている。

また、第二基準として、フィルタ係数の比

$$a_m^{(m)} / a_{m+1}^{(m+1)} \quad (11)$$

が極大となるように次数を決定した。それは仮に最適次

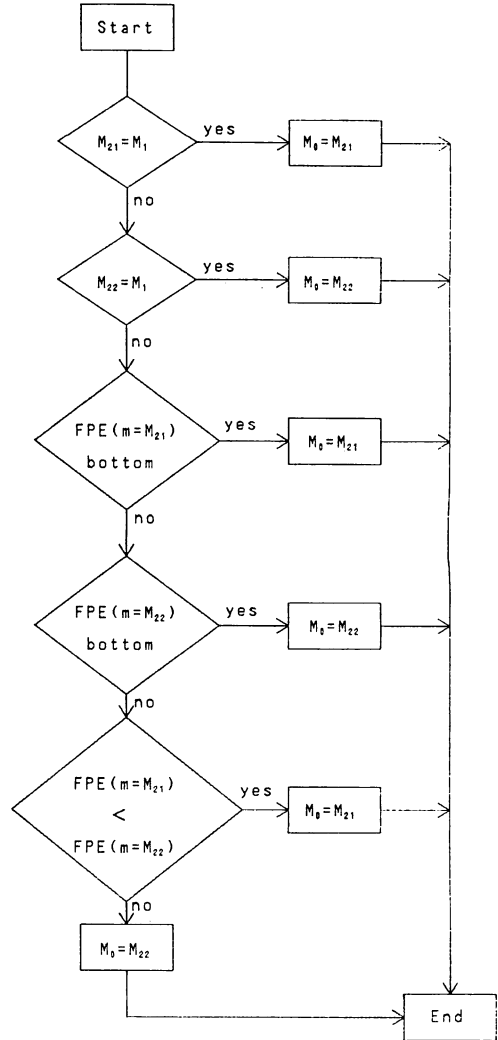


Fig. 1 Flow chart for determining the order M_0 of prediction error coefficients. The upper limit of M_0 is set to 20, and the lower limit 5. Under this limitation, M_{21} gives the minimum of FPE (final prediction error) and M_{22} gives the most maximal value of ratio $a_m^{(m)} / a_{m+1}^{(m+1)}$ and M_{22} gives the next maximum.

数 M_0 を選んだとすると次の次数 M_0+1 でのフィルタ係数は極端に小さくなるからである¹⁰⁾。

本研究で用いた最適次数 M_0 決定の具体的手順を Fig. 1 のフローチャートに示す。ここで次数に制限を加え、下限を M_{min} 、上限を M_{max} として $M_{min} \leq m \leq M_{max}$ の範囲で基準 1 を満足する次数を M_{21} 、基準 2 の極大値のうち最大のものを与える次数を M_{22} とした。本研究では、経験的に上限の次数を 20、下限の次数を 5 とした。

3. 計算機シミュレーションと結果

3.1 1次元モデルによる計算機シミュレーション

はじめに、二重星の一次元モデルについて計算機シミュレーションを行ない、MEM の有効性を定量的に評価した¹¹⁾。

大気ゆらぎの影響を受けた二重星のスペックル写真を計算機合成し、撮影時のショットノイズおよび画像取り込み時の量子化誤差を考慮に入れ、シミュレーションを行なった。ここで考慮したパラメーターは、 $|I_0(f)|^2$ を得るために(5)式に必要な $I_s(f)$ と $I_r(f)$ の枚数 N とノイズレベル、量子化階調である。

この $|I_0(f)|^2$ に MEM (通常 Labeyrie 法では FFT) をかけると二重星の自己相関関数が得られ、そのピークの間隔から二重星の角距離が推定できる (Fig. 2)。MEM は $|I_0(f)|^2$ のパワースペクトルを与えるが、そ

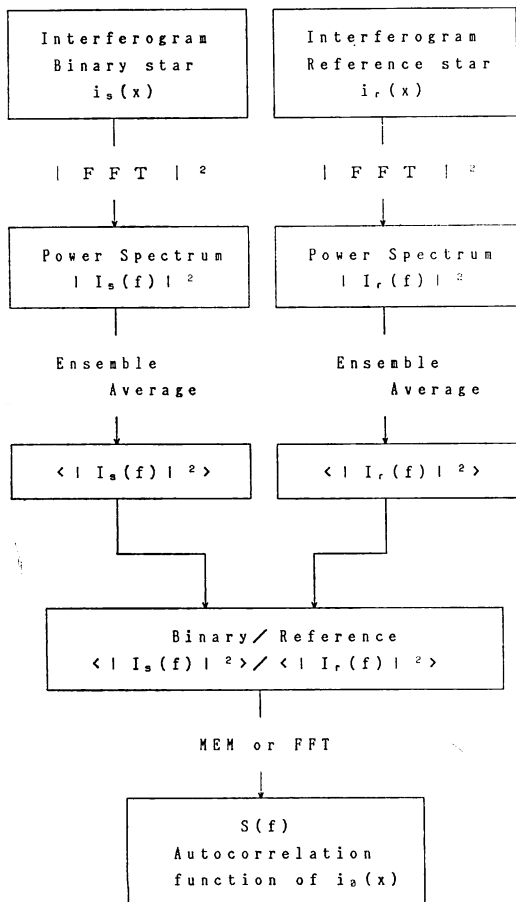


Fig. 2 Flow chart for estimating binary star separation using MEM or FFT from stellar speckle interferograms.

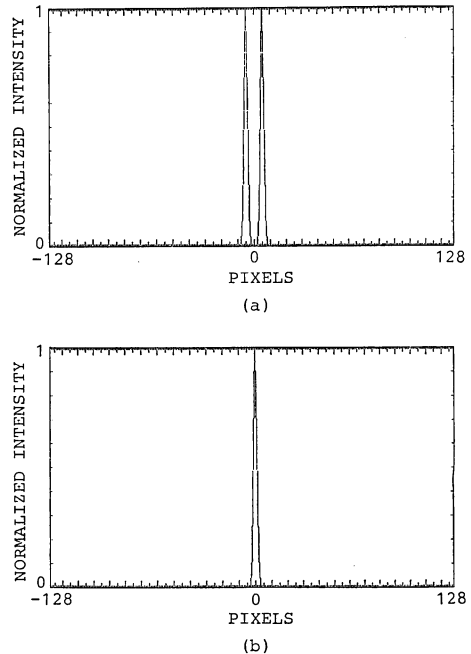


Fig. 3 Models of (a) binary star and (b) reference star used for computer simulation. Full scale is 256 pixels. The intensity distribution of reference star is assumed to be a Gaussian of 2.5 pixels variance. Binary star is composed of the two identical Gaussian functions with separation of 10 pixels.

のピーク間隔が二重星の角距離であることにはかわりがない。

今回のシミュレーションで用いた二重星と参照星の1次元モデルを Fig. 3 に示した。参照星の輝度分布は分散 2.5 画素のガウス関数であり、二重星は参照星と同じガウス関数 2 個を 10 画素の間隔で組み合わせただけである。

天体スペックル写真は次のようにして合成する。平面波が大気を通過した時に受ける位相変化を分散 π のガウス乱数で表わし、さらに、この位相変化をもつ透過波に $\exp \{(-1/2)6.88(r/r_0)^{5/3}\}$ の相関^{2,3)}を持たせ、そのフーリエ変換の絶対値平方をとり、参照星の点像関数とした。この点像関数と星のモデルをコンボリューションさせて天体スペックル写真を合成した。Fried のパラメーター²⁾ r_0 は 5 画素とした。実際の大气では r_0 が 10 cm 程度であるので、モデルのフルスケールである 256 画素が 2.6 m の口径に相当する。そこで波長 λ を 550 nm, 口径 D を 2.6 m とすると 1 画素 λ/D は $0.044''$ に対応することになる。

また、実際の天体スペックル写真では、撮像管やイメ

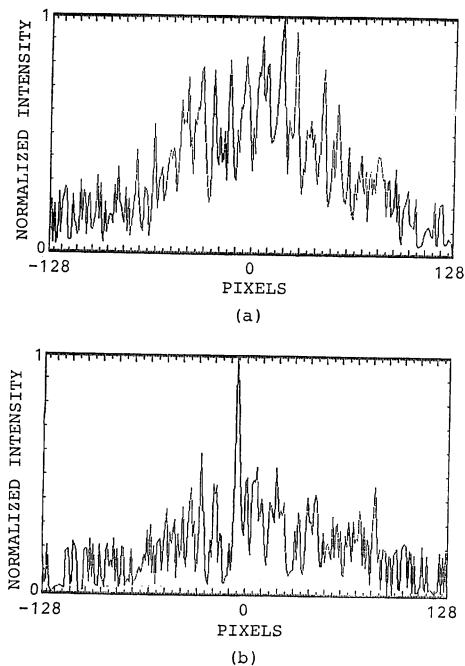


Fig. 4 Typical computer simulated interferograms of (a) binary star and (b) reference star in the presence of Poisson noise. In this example, the average value of Poisson noise is 0.5 and the averaged noise level is 20% of the speckle intensity maximum (corresponding SNR is 1.14 dB).

ージンテンシファイアなどによるショットノイズのために、天体スペckルの一部が埋もれてしまう。このショットノイズはポアソン過程と考えられ、 k という値をとる確率は \bar{k} を平均値として、

$$P(k) = (\bar{k}^k / k!) \exp(-\bar{k}) \quad (12)$$

で与えられる。計算機上では $\bar{k} = 0.5$ のポアソン乱数を発生させ、ショットノイズとした。ノイズレベルは天体スペckル写真の中の最大輝度と \bar{k} の比(%)で定義した。このノイズレベルの20, 40, 60%はそれぞれSN比では1.14, -1.87, -3.67(dB)に相当する。Fig. 4にノイズレベル10%の天体スペckル写真を示した。

天体スペckル写真を5枚または10枚用いた場合について、ノイズレベルごとに、MEMおよびFFTで二重星間隔(角距離)を推定した。この推定値を x_i 、二重星間隔のモデル値を x_0 とし、推定値とモデル値のずれを偏差 σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - x_0}{x_0} \right)^2 \times 100} \quad (\%) \quad (13)$$

で評価し、Fig. 5に示した。試行回数 n は10回であ

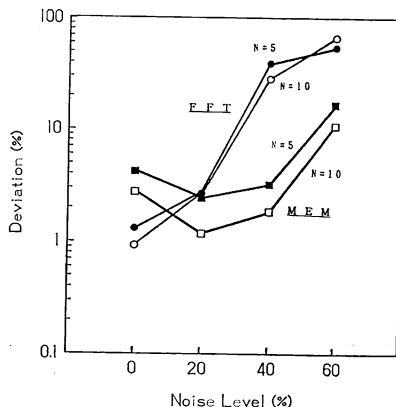


Fig. 5 The noise level dependence of estimation error of binary star separation. □, ■: MEM, ○, ●: FFT.

る。

ノイズレベルが0%, 20%の場合はノイズが少ないため、FFT, MEMともにモデルからのずれが小さくおさえられている。ノイズレベルが40%以上の場合はFFTの偏差はMEMと比べて一桁以上大きくなり、とくに60%の場合は偏差の大きさから考えてFFTでの角距離の推定は不可能といってよい。

次に、FFTの計算時間を T_F 、天体スペckル写真の枚数を N 、MEMの計算時間を T_M として、トータル

$$T_{TF} = N \cdot T_F + T_F \quad (14)$$

となり、本論文の方法では

$$T_{TM} = N \cdot T_F + T_M \quad (15)$$

となる。今回、 μ VAX-IIを使用して計算したところ、 $T_F = 1$ 秒、 $T_M = 4$ 秒であった。 $N = 10$ の場合、 $T_{TF} = 11$ 秒、 $T_{TM} = 14$ 秒となる。その差は3秒である。なお、今回の二重星間隔の推定精度は最良の条件で1%程度であるが、これをもう少し改善するためには、天体スペckル写真の枚数を増やす必要があり、その場合には両者の計算時間の差は相対的にさらに小さくなる。ここで重要なのは、計算時間もさることながら、FFTを用いる従来の方法では天体スペckル写真の枚数を増やしても推定精度の向上があまり期待できないことが示されていることである(Fig. 5)。

最後に、天体の輝度が低い場合や撮影系感度のダイナミックレンジが大きく取れなかった場合のA-D変換による量子化誤差を考慮した。適当な階調(bit)に天体スペckル写真を量子化し、二重星間隔を推定した。階調ごとに、推定値とモデル値のずれを(13)式の偏差で表わ

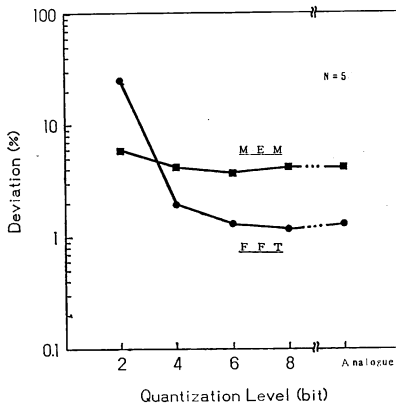


Fig. 6 Quantization level dependence of estimation error of binary star separation. ■ : MEM, ● : FFT.

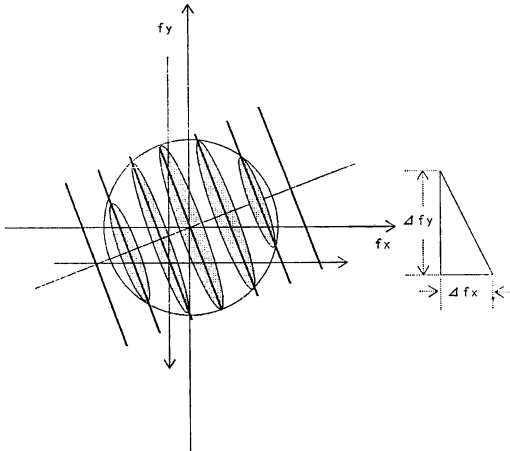


Fig. 7 Schematic power spectrum of 2D stellar speckle interferogram showing how to apply 1D MEM to separation estimation.

し、MEM と FFT を比較した。天体スペックル写真が 5 枚、ノイズレベルが 0% の場合を Fig. 6 に示した。試行回数 n は 10 回である。

FFT は 4 bit 以下で偏差が大きくなっている一方、MEM はほぼ一定の偏差である。ショットノイズが存在し、かつ量子化を行なった場合については詳細な検討を行っていないが、FFT のほうが MEM よりも量子化の影響を強く受けるので、たとえば、天体スペックル写真が 5 枚で量子化レベル 4 bit の場合には、ショットノイズの割合が 20% 程度から MEM の優位性が顕著になると予想される。

3.2 2次元データへの適用法

実際のスペックル写真は 2 次元画像であり、二重星の

パワースペクトルは一般に Fig. 7 のような縞模様ができる (この縞模様はヤングの二重スリットの干渉縞に相当する)。この場合に MEM を適用する方法を述べる。MEM の Burg 法は 1 次元のスペクトル計算法であるので、中心部分の縞模様がよく出ている領域を f_x , f_y 方向に多数の断面についてスライスし、MEM により Δf_x , Δf_y を求め、その逆数 Δx_i , Δy_i の平均

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (16)$$

$$\overline{\Delta y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \quad (17)$$

から、二重星の角距離 Δ と位置角 θ

$$\Delta = \sqrt{(\overline{\Delta x})^2 + (\overline{\Delta y})^2} \quad (18)$$

$$\theta = \tan^{-1}(\overline{\Delta y}/\overline{\Delta x}) \quad (19)$$

を推定することができる。

実際のスペックル写真に対して計算機処理を行なったところ、FFT を用いた Labeyrie 法では測定できない場合でも、MEM ではほぼ正しい角距離と位置角が推定でき、MEM の有効性が確認された。詳細については次の機会にゆずりたい。

4. 結 語

天体スペックル干渉法に最大エントロピー法を応用して二重星の角距離と位置角の推定を行なう場合、ノイズレベル 40% 以上 (SN 比 -1.87 dB 以下) に対して MEM が有効であることが計算機シミュレーションの結果からわかった。また、量子化誤差やスペックル写真枚数の影響についても検討を行なった。

日頃ご指導いただく早稲田大学理工学部大頭仁教授と天体スペックル写真のデータを提供していただいた静岡大学工学部大坪順次助教授に感謝する。

文 献

- 1) G. P. Weigelt: "Stellar speckle interferometry and speckle holography at low light levels," Proc. SPIE, 243-17, *Applications of Speckle Phenomena* (1980) 103-111.
- 2) F. Roddier: "The effect of atmospheric turbulence in optical astronomy," *Progress in Optics*, Vol. 19, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1981) pp. 283-368.
- 3) J. C. Dainty: "Stellar speckle interferometry," *Topics in Applied Physics*, Vol. 9, ed. J. C. Dainty (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975) pp. 255-279.
- 4) A. Labeyrie: "Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star images," *Astron. Astrophys.*, 6 (1970) 85-87.

- 5) J. P. Burg: "Maximum entropy spectral analysis," Ph. D thesis, Stanford University (1975).
- 6) 日野幹雄: スペクトル解析 (朝倉書店, 東京, 1986) pp. 83-94, 210-236.
- 7) 大坪順次: "天体スペckル干渉法", 光学, **13** (1984) 360-367.
- 8) T. J. Ulrych and T. N. Bishop: "Maximum entropy spectral analysis and auto-regressive decomposition," Rev. Geophys. Space Phys., **13** (1975) 183-200.
- 9) H. Akaike: "Fitting autoregressive models for prediction," Ann. Inst. Statist. Math., **21** (1969 a) 243-247.
- 10) K. Kobayashi, S. Komatsu and H. Ohzu: "Dynamics of speckle produced by moving object and its applications," *ICO-13 Conf. Digest* (1984) p. 128.
- 11) 小松進一, 泉田 史, 大頭 仁: "最大エントロピー法の天体スペckル干渉への応用", 春季応用物理学学会予稿集 (1987) p. 591.