



指数型整関数の特性を用いた位相回復*

中 島 伸 治

静岡大学工業短期大学部 〒432 浜松市城北 3-5-1

(1989年6月7日受理)

Phase Retrieval Based on Properties of Entire Functions of Exponential Type

Nobuharu NAKAJIMA

College of Engineering, Shizuoka University,
3-5-1, Johoku, Hamamatsu, 432

1. はじめに

光波は非常に高い振動数をもつため、写真感光材、光電管などすべての受光器では波動の振幅の自乗すなわち強度の時間平均を観測するのみであり、その位相の変化を知ることができない。たとえば、ある物体をレーザー光で照明すると、透過光は物体の構造に依存した振幅と位相の変化を受ける。透過した光波をある面上で観測した場合、観測可能なものは波面の振幅の自乗（強度分布）のみであり、波面のもう一つの要素である位相分布は観測時に失われる。しかし、物体の構造を求めるには、波面の位相分布の情報が不可欠である。本稿で取り扱う位相回復問題とは、この観測時に失われる位相分布を何らかの方法で強度分布から直接求めることを試みるものである。従来からホログラフィーなどのように、物体からの光にコヒーレントな参照波を重ねて、その干渉によって位相を強度変動に記録する方法はあるが、本稿では参照波を用いず位相回復を行なう点に特徴があり、電子線、X線などのコヒーレントな参照波が得がたい波動による測定への応用が可能である。

光学における位相回復問題の研究は、1960年代に始まり¹⁾、1970年代に入っていくつかの有力な位相回復法が提案されてから活発に研究が行なわれるようになった。現在では、おもに二つの方向から位相回復法の研究が行なわれている。一つは、光波を表わす関数の解析性を利

用する方法¹⁻⁴⁾であり、もう一つは、計算機を用いた反復アルゴリズムによる方法^{5,6)}である。本稿で述べる方法は、前者の方法に属するものであり、後者の方法およびその他の方法については文献⁷⁻¹⁰⁾を参照されたい。

2. 対数ヒルベルト変換による位相回復

以下では一次元の場合に限定して、本研究における位相回復法の基礎理論について述べる。また本稿で取り扱う光波は、空間的にコヒーレントで線形偏光した準単色光とし、振幅の絶対値と位相からなるスカラーな複素振幅関数で表示できるものとする。図1のような光学系を想定し、次の二つの条件を設定する。

- (1) 物体は有限の広がりをもつ。
- (2) 物体からの光波の物体直後の面上（これを物体面とする）における複素振幅関数と、観測面上の複素振幅関数の間にはフーリエ変換の関係がある。

光波の強度分布から位相分布を、参照波を用いず、いかなる場合にも回復することは一般に困難であるので、位相回復問題では上記の二つの条件が必要となる。この条件を式で表わすと

$$F(x) = \int_a^b f(u) \exp(-2\pi i x u) du \quad (1)$$

となる。ここで、 $f(u)$ と $F(x)$ はそれぞれ物体面上およびフーリエ変換面上の複素振幅関数であり、積分区間 $[a, b]$ は物体の広がりを表わしている。図1では焦点距離 f の凸レンズでフーリエ変換を行なっているが、レンズの有限な広がりの影響についてはレンズの開口が物体

* 本稿は昭和63年度光学論文賞受賞記念講演 (1989年4月2日、千葉大学) を骨子として、まとめたものである。

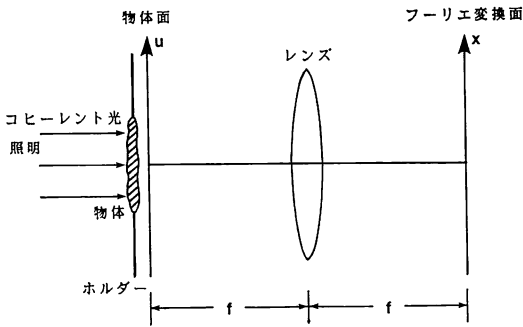


図1 フーリエ変換光学系の概略図

の広がりに対して十分大きいとして(1)式では省略した。また、積分にかかる定数項もここでの議論に関係がないので省略した。フーリエ変換面上の複素振幅関数 $F(x)$ を振幅の絶対値 $|F(x)|$ と位相 $\phi(x)$ によって表わすと

$$F(x) = |F(x)| \exp[i\phi(x)] \quad (2)$$

となる。ここで、振幅の絶対値は、観測可能な強度分布 $|F(x)|^2$ から求められる。何らかの方法によって振幅の絶対値から位相を求めることができれば複素振幅関数 $F(x)$ が決定でき、 $F(x)$ の逆フーリエ変換により元の物体関数 $f(u)$ を再生することができる。物体関数 $f(u)$ を再生することが位相回復問題の最終目的であって、さらに物体関数から物体の内部構造を求めることはまた別の問題である。

(1)式で表わされる複素振幅関数 $F(x)$ は、指数型整関数 (entire functions of exponential type) と呼ばれる特別な解析関数に属することが数学的に知られている。指数型整関数は、(1)式において変数 x を複素変数 $z = x + iy$ に拡張することで

$$F(z) = \int_a^b f(u) \exp(-2\pi i zu) du \quad (3)$$

と定義されるものである。関数 $F(z)$ は、 x 軸 (実軸) と y 軸 (虚軸) によって表わされる複素平面上へ、実軸上の関数 $F(x)$ を解析接続した複素関数である。指数型整関数の複素平面上での性質から、種々の数学的公式を導くことができる。たとえば、関数 $F(x)$ の自然対数をとった関数 $\ln F(x) = \ln |F(x)| + i\phi(x)$ の実部と虚部の間には、対数ヒルベルト変換

$$\phi(x) = -\frac{x}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |F(x')|}{x-x'} dx' + 2 \sum_{j=1}^N \arg(x-z_j) \quad (4)$$

を導くことができる^{3,9)}。ここで、 P はコーシーの主値

を表わし、 z_j は複素下半面上で $F(z_j) = 0$ となる j 番目のゼロ点の位置 ($z_j = x_j + iy_j$) であり、 N は複素下半平面上のゼロ点の個数を表わし、 \arg は複素数の偏角を意味する。

ゼロ点とは指数型整関数 $F(z)$ の複素平面上の根であり、一般に複素平面上の全面に現われるものである。なお、物体関数が物体面上で原点からずれることによって生じるフーリエ変換面上の線形位相および定数位相は、観測量である振幅の絶対値やゼロ点位置に影響を与えないので(4)式では省略した。

線形位相と定数位相を除く位相 $\phi(x)$ が振幅の絶対値 $|F(x)|$ と複素下半平面上における $F(z)$ のゼロ点位置の情報から求められることがわかる。しかし、ゼロ点の位置は観測される強度分布から決定できないという問題がある。なぜなら強度分布 $|F(x)|^2$ を解析接続によって複素平面上に拡張すると $|F(z)|^2 = F(z)F^*(z^*)$ となり ($*$ は複素共役を表わす)、強度分布のゼロ点が実軸に対して対称 ($z_j = x_j \pm i|y_j|$) に現われるため、関数 $F(z)$ のゼロ点位置の y 座標の符号を決定できないからである。そこで本研究では、既知の傾きをもつ指数型振幅フィルターを物体関数にかけた場合とかけない場合のそれぞれ二つのフーリエ変換強度分布からゼロ点位置を決定するを行なった¹¹⁾。ほぼ同時期に外国のグループからも同様な方法が提案されている^{12,13)}。

指数型振幅フィルター $\exp(-2\pi cu)$ (c は既知の定数) を物体関数にかけた場合、そのフーリエ変換面での複素振幅関数は(1)式より

$$\begin{aligned} \hat{F}(x) &= \int_a^b f(u) \exp(-2\pi cu) \exp(-2\pi i xu) du \\ &= \int_a^b f(u) \exp[-2\pi i(x-ic)u] du \\ &= F(x-ic) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。上式より関数 $\hat{F}(x)$ は、(3)式の関数 $F(z)$ の複素平面上における x 軸に平行な直線 $y = -ic$ 上の関数に対応し、この直線上の関数から解析接続すると、関数 $F(z)$ のゼロ点は全体的に $+ic$ だけずれた位置に現われることがわかる。このとき実際に観測される強度分布を解析接続した関数 $|\hat{F}(z)|^2$ のゼロ点は、指数フィルターを用いない場合のゼロ点位置と比べて全体的に y 軸方向に沿ってずれた位置 ($z_j = x_j \pm i|y_j + c|$) に対称に現われる。指数フィルターをかけた場合とかけない場合の強度のゼロ点位置の y 座標 $|y_j + c|$ 、 $|y_j|$ から、既知の c の値を用いて y_j の符号が決定でき、関数 $F(z)$ のゼロ点位置が定まる。その複素下半面上のゼロ点位置

を振幅の絶対値 $|F(x)|$ とともに(4)式に代入して位相を求めることができる。

3. フーリエ級数展開を用いた位相回復

前項の議論から、一次元の場合、指数フィルターを物体関数にかけた場合とかけない場合の二つのフーリエ変換強度分布は、位相回復に対して十分な情報を含んでいることがわかる。しかし、指数フィルターによるゼロ点位置決定法では、観測した強度分布とゼロ点位置との関係が非線形であるため、複素平面上のゼロ点の数が多くなるとゼロ点を捜すことが計算機でさえ非常に困難になるという問題がある。この方法は原理的には正しいが実用性がない方法である。そこで、ゼロ点を取り扱わず、この二つの強度分布からフーリエ級数展開を用いて位相を直接回復することを行なった¹⁴⁾。以下での式展開のため(2)式を

$$F(x) = M(x) \exp[i\phi(x)] \quad (6)$$

と書き換える。ここで、 $|F(x)| = M(x)$ とおいた。(5)式の指数フィルターを用いた場合の複素振幅関数 $F(x-ic)$ は(6)式より

$$F(x-ic) = M(x-ic) \exp[i\phi(x-ic)] \quad (7)$$

と表わすことができる。ここで、変数 x を複素変数 $x-ic$ に拡張したため、関数 $M(x-ic)$ と $\phi(x-ic)$ は複素関数となった。実際に観測されるものは振幅の絶対値であるから、(7)式で両辺の絶対値をとると

$$|F(x-ic)| = |M(x-ic)| \exp[-\text{Im}\phi(x-ic)] \quad (8)$$

となる。ここで、 $\text{Im}\phi(x-ic)$ は複素関数 $\phi(x-ic)$ の虚部を意味し、実部 $\text{Re}\phi(x-ic)$ は絶対値をとると消える。指数フィルターを用いた場合の振幅の絶対値 $|F(x-ic)|$ には関数 $F(x)$ の位相 $\phi(x)$ の情報が含まれていることがわかる。(8)式から位相の情報を引き出すには $\phi(x)$ の関数形を仮定する必要がある。そこで、位相 $\phi(x)$ をフーリエ級数展開形

$$\phi(x) \cong \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \quad (9)$$

で近似的に表わす。ここで、 a_n, b_n は未知係数であり、 l はフーリエ変換面における強度分布の観測領域 $[-l, l]$ の半区間長を表わす。また N は、観測領域内の位相変化を表わすことに対して十分な個数であると仮定する。(9)式で変数 x を複素変数 $x-ic$ に変化させたときの虚部を計算し、その結果を(8)式に代入して変形すると

$$\ln \frac{|F(x-ic)|}{|M(x-ic)|} \cong \sum_{n=1}^N \left[-a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l} c\right) \sin \frac{n\pi}{l} x + b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l} c\right) \cos \frac{n\pi}{l} x \right] \quad (10)$$

を得る。上式の左辺の分子 $|F(x-ic)|$ は、指数フィルターを用いて観測したフーリエ変換面での振幅の絶対値である。一方、分母 $|M(x-ic)|$ は、指数フィルターを用いないときの振幅の絶対値 $M(x)$ を解析接続することで求められる。すなわち、計算機によって関数 $M(x)$ を逆フーリエ変換して指数フィルター $\exp(-2\pi cu)$ をかけ、その結果をフーリエ変換した関数の絶対値をとると $|M(x-ic)|$ が得られる。(10)式の左辺に x 軸の各点における $2N$ 個のデータを用いて、 $2N$ 個の未知係数 a_n, b_n ($n=1, \dots, N$) に対する連立一次方程式を作ることができる。この方程式を解いた結果を(9)式に代入して位相 $\phi(x)$ が求まる。

この方法は、エルミート性をもたない物体関数のフーリエ変換面での位相回復に用いることができる。エルミート性をもつ物体関数 ($f(u) = f^*(-u)$) の場合は、(10)式の左辺が x と c の値にかかわらず常に0となってしまう連立一次方程式が解けない。この場合は、対数ヒルベルト変換とフーリエ級数展開を併用することで位相回復ができる¹⁵⁾。すなわち、(4)式の右辺第2項のゼロ点影響部分の推定に対してフーリエ級数展開を用いる方法である。とくに、実関数のハートリー変換強度からの

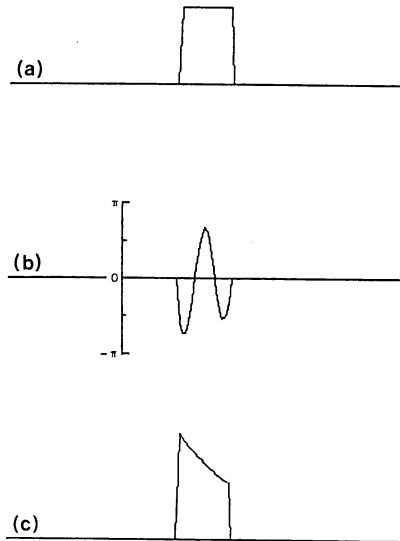


図2 元の物体関数

(a) 振幅の絶対値, (b) 位相, (c) 指数フィルターをかけた場合の振幅の絶対値

位相回復問題では、この併用法を用いると1回の強度観測から位相再生が可能となる¹⁶⁾。

次にフーリエ級数展開を用いた位相回復法の計算機シミュレーションについて述べる。以下の計算は、すべてサンプル数128点で行なった。物体関数 $f(u)$ としては図2の(a)振幅の絶対値と(b)位相をもつ位相物体関数を想定した。図2(c)は、指数型振幅フィルター $\exp(-2\pi \cdot 0.08u)$ を物体にかけたときの振幅の絶対値である。指数フィルター $\exp(-2\pi cu)$ の定数 c の値は、物体の広がり w とするとほぼ $0.02 < cw < 0.25$ の範囲であれば良いことが計算機実験からわかっているので、ここでは $c=0.08$ ($w=1.25$) を用いた。図3(a)は、図2(a)と(b)からなる位相物体関数をフーリエ変換し

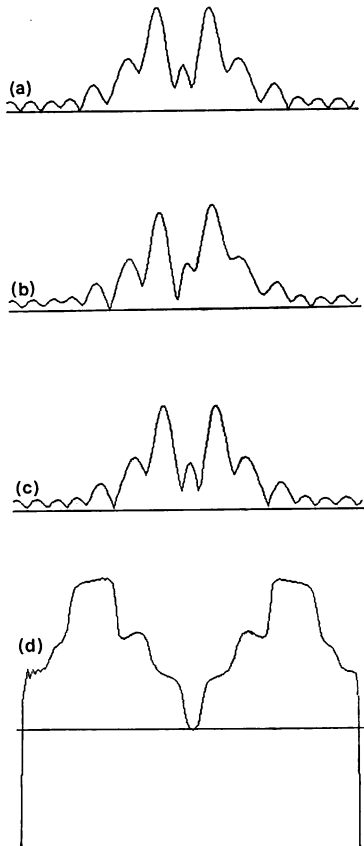


図3 フーリエ変換面での振幅の絶対値と再生位相 (a)は図2(a), (b)からなる物体のフーリエ変換面での振幅の絶対値, (b)は図2(c), (b)からなる指数フィルターをかけた物体に対する振幅の絶対値, (c)は図3(a)の逆フーリエ変換に指数フィルターかけたものをフーリエ変換して得た振幅の絶対値, (d)は図3(b), (c)から(9), (10)式によって再生した位相

た関数の観測可能な振幅の絶対値 $M(x)$ である。図3(b)は、図2(c)と(b)からなる指数フィルターをかけた物体関数のフーリエ変換面での振幅の絶対値 $|F(x-i0.08)|$ である。図3(c)は、(10)式の左辺の分母に用いる関数 $|M(x-i0.08)|$ であり、これは図3(a)の関数 $M(x)$ を逆フーリエ変換したものに指数フィルター $\exp(-2\pi \cdot 0.08u)$ をかけてからフーリエ変換した結果の振幅の絶対値である。

(10)式の位相計算で必要となる未知係数の次数は左辺の対数関数の周波数成分に依存し、正確に次数を決定するためにはその対数関数のフーリエ変換を行なって周波数成分を調べる必要がある。しかし、ここで用いた程度の指数フィルターの傾きの場合、フーリエ変換面の振幅の絶対値に現われる脈動の数が観測領域で約10個までなら、係数 a_n, b_n をおのおの60個程度にして位相回復できることが経験的にわかっている。そこで、図3(b)と(c)の軸上の124個のデータから、(10)式のおのおの62個の未知係数 a_n, b_n ($n=1, \dots, 62$) に対する連立一次方程式をLU-分解法で解いた。求めた係数を(9)式に代入して計算した位相分布が図3(d)である。図3(a)の振幅の絶対値 $M(x)$ と図3(d)の位相分布 $\phi(x)$ からなる関数 $F(x)=M(x)\exp[i\phi(x)]$ を逆フーリエ変換することで物体関数が再生できる。図4(a)と(b)が再生物体のそれぞれ振幅の絶対値と位相である。ただし、図4(b)の位相は物体の広がり以外の値を0として表わした。

元の物体(図2(a)と(b))と比べて再生物体(図4(a)と(b))は、振幅の絶対値の両端で振動が現われている。これは、有限のデータを用いたことによるGibbsの現象である。また、再生位相と元の位相との間には定數位相差があることがわかる。これは、フーリエ変換強

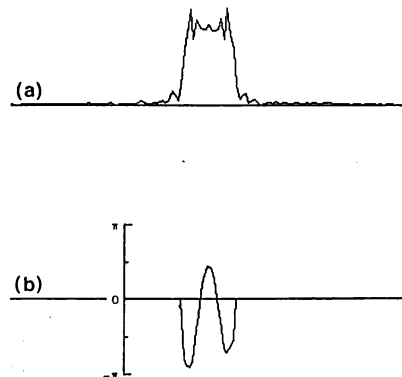


図4 再生物体関数 (a)振幅の絶対値, (b)位相

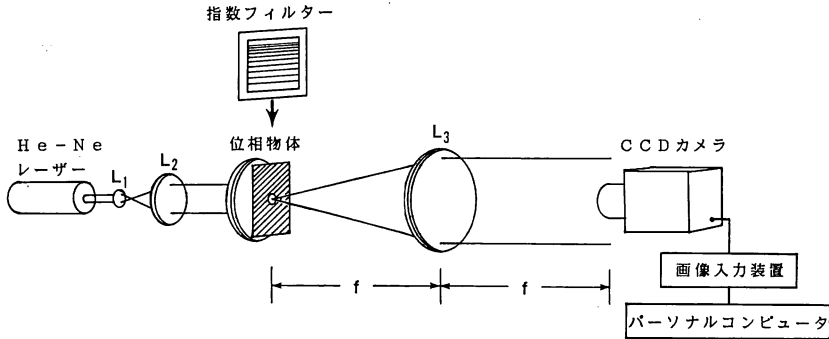


図5 実験系の概略図

位相物体は球面凸レンズ（焦点距離 202.8 mm）の中心に円形開口（直径 1 mm）を置いたものを用いた。

度に定数位相の情報が含まれていないため、本方法では決定できない量である。しかし、物体関数の物体面上での平行移動量に関する情報は本方法によって得ることができる。なぜなら、物体面上で固定した指数フィルターを用いた場合、物体の平行移動は移動量の指数関数の形でフーリエ変換強度に定数倍の変化を与え、この変化が(9)、(10)式による位相計算で移動量に比例した線形位相成分をもたらすからである。

4. 実際問題への応用

ここではフーリエ級数展開を用いた位相回復法の位相分布計測実験への応用について述べる。実験系の概略図を図5に示す。He-Ne レーザーからの光をレンズ L_1 、 L_2 で広げ平行光にして物体を照明する。物体は、球面凸レンズ（焦点距離 202.8 mm）の中心に直径 1 mm の円形開口を接近させて置いたものを用いた。この位相物体を透過してくる光の円形開口面での複素振幅関数を物体関数として、本方法で再生することによって開口面上の位相分布を求めた。レンズ L_3 （焦点距離 $f=404.8$ mm）で物体関数をフーリエ変換し、その強度分布を CCD カメラで観測する。そのデータを画像入力装置によってデジタル画像（ 128×128 点、256 階調）に変換しパーソナルコンピュータのメモリーに取り込む。

本方法に必要な指数型振幅フィルターは、次のように作製した。最初に、二次元直交座標の一方方向に対してのみ指数関数的明るさの変化をもつ画像をモニターテレビに出力させる。これをカメラでミニコピーフィルムに記録し、そのネガフィルムを指数フィルターとして使用した。図5の実験系では、このフィルムを円形開口に密着させて用いることで物体に指数フィルターをかけた状態をつくり、そのときのフーリエ変換強度を観測した。

図6が位相回復で用いたフーリエ変換強度分布のデー

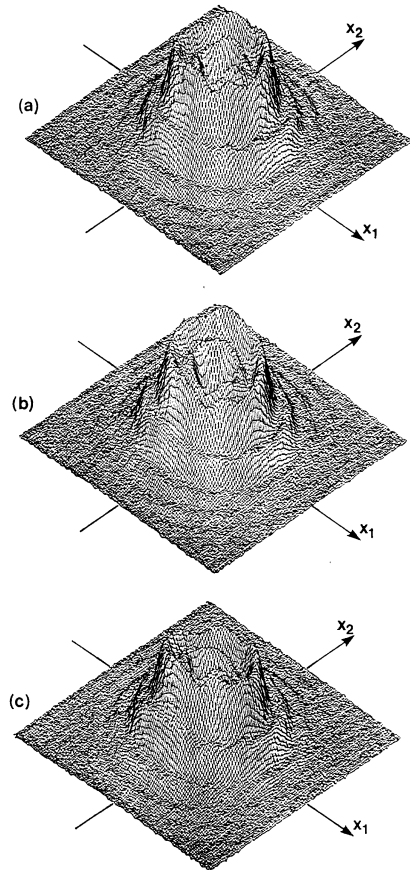


図6 観測したフーリエ変換強度分布
(a) 位相物体のフーリエ変換強度分布、(b) と(c)はそれぞれ x_1 軸および x_2 軸と平行な方向に物体面上で指数フィルターをかけた場合のフーリエ変換強度分布

タである。図6(a)は、物体関数のフーリエ変換強度分布である。二次元物体の場合、前項で述べた一次元の場合と異なり、直交する二方向に対して指数フィルターを

物体にかける必要がある¹⁷⁻¹⁹⁾。図6 (b)および(c)は、おのおの x_1 軸および x_2 軸と平行な方向に対して指数フィルターを物体にかけた場合のフーリエ変換強度分布を示している。図6 (a)の x_1 軸に平行な直線上のデータと図6 (b)の同じ位置にある直線上のデータを用いて(9), (10)式から一次元位相を計算する。これを x_1 軸に平行なおのおの直線上で行なう。しかし, x_1 軸に平行な直線上の一次元位相はおのおの独立に計算を行なうので, 二次元位相とするためには一次元位相間の定数位相差を決定する必要がある。そこで, 図6 (a)と(c)から, ある一本の x_2 軸に平行な直線上の位相を(9), (10)式から同様に計算し, これを定数位相差として x_1 軸に平行な各直線上の一次元位相に加えて二次元位相とした。

図6 (a)の強度より得られる振幅の絶対値と計算した二次元位相から複素振幅関数を作り, その逆フーリエ変換により物体関数を求めた。図7 (a)と(b)が再生物体関数のそれぞれ振幅の絶対値と位相である。図7 (b)では, 物体に用いた円形開口の範囲外の位相を一定の値にして表わした。図8は, 再生した位相分布の断面図であり, 実線は図7 (b)の中心の位相分布で, 破線が位相物体として用いた球面凸レンズの焦点距離 202.8 mm から計算した位相分布である。両者の位相変化がほぼ一致していることがわかる。

その他の応用例としては, 天体スペckル干渉法¹⁰⁾への応用がある。実際の二重星の観測データに対して本方

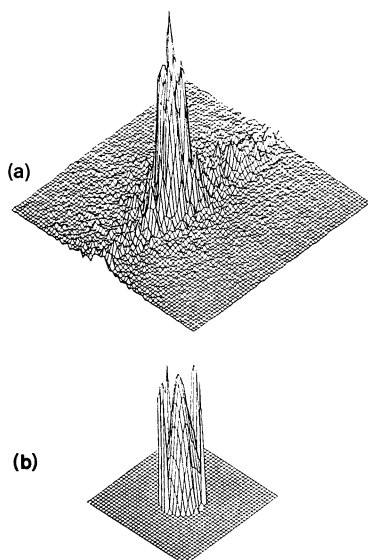


図7 再生した位相物体関数
(a)振幅の絶対値, (b)位相

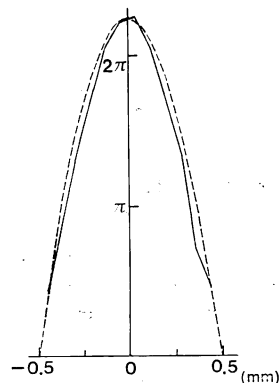


図8 位相分布の断面図
実線は図7 (b)の中心の位相分布, 破線は位相物体で用いた球面凸レンズの焦点距離 202.8 mm から求めた位相分布

法を適用し, 二重星の像再生が可能であることを確認できた²⁰⁾。しかし, 結果については紙面の都合上割愛する。

5. おわりに

本稿では指数型整関数の性質を利用した位相回復法とその応用について述べた。しかし, 位相回復問題への別の方向からの研究もいろいろとなされている。とくに, 外国では反復アルゴリズムを用いた位相回復法^{5,6)}の研究が盛んである。反復アルゴリズムとは, 物体面で物体に関する先験的情報(物体の広がり大きさ, 物体の振幅の絶対値, 物体が実関数で非負であることなど)を与え, フーリエ変換面では観測した振幅の絶対値の情報を与えるという操作を, 計算機によるフーリエおよび逆フーリエ変換の繰返しの各段階で行ない, 位相を推定する方法である。二次元物体に対して, この方法が有効であることが報告されている^{6,10)}。しかし, たとえ雑音が存在しない場合でも, 反復による収束解が間違っ了解に留まることがあり, アルゴリズムの安定性にまだ問題があると考えられる²¹⁾。

本稿で述べた方法は, 二次元の場合, 指数フィルターを用いてフーリエ変換強度を3回観測する必要があるが, 得られる結果の唯一性が数学的に保証されている点に特徴がある。しかし, 本方法は位相回復のための一つの十分条件を示したものと考えており, より洗練された実用性のある方法が提案される可能性があると思われる。また, 光学の分野以外(たとえば, X線結晶解析, 電子顕微鏡など)でも位相回復は重要な問題として存在しており, 今後, 種々の分野間で, 位相回復問題の研究がさらに発展することを期待したい。

文 献

- 1) A. Walther: "The question of phase retrieval in optics," *Opt. Acta*, **10** (1963) 41-49.
- 2) B. J. Hoenders: "On the solution of the phase retrieval problem," *J. Math. Phys.*, **16** (1975) 1719-1725.
- 3) R. E. Burge, M. A. Fiddy, A. H. Greenaway and G. Ross: "The phase problem," *Proc. R. Soc. Lond. A*, **350** (1976) 191-212.
- 4) G. Ross, M. A. Fiddy and M. Nieto-Vesperinas: "The inverse scattering problem in structural determinations," *Inverse Scattering Problems in Optics*, ed. H. P. Baltes (Springer-Verlag, Berlin, 1980) pp. 15-71.
- 5) R. W. Gerchberg and W. O. Saxton: "A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures," *Optik*, **35** (1972) 237-246.
- 6) J. R. Fienup: "Phase retrieval algorithms: a comparison," *Appl. Opt.*, **21** (1982) 2758-2769.
- 7) H. A. Ferwerda: "The phase reconstruction problem for wave amplitudes and coherence functions," *Inverse Source Problems in Optics*, ed. H. P. Baltes (Springer-Verlag, Berlin, 1978) pp. 13-39.
- 8) 前田純治, 村田和美: "光学における位相回復問題", *光学*, **11** (1982) 230-240.
- 9) 中島伸治, 朝倉利光: "ヒルベルト変換による位相回復", *光学*, **11** (1982) 241-252.
- 10) J. C. Dainty and J. R. Fienup: "Phase retrieval and image reconstruction for astronomy," *Image Recovery: Theory and Application*, ed. H. Stark (Academic Press, New York, 1987) pp. 231-275.
- 11) N. Nakajima and T. Asakura: "Study of zero location by means of an exponential filter in the phase retrieval problem," *Optik*, **60** (1982) 289-305.
- 12) J. G. Walker: "The phase retrieval problem: a solution based on zero location by exponential apodization," *Opt. Acta*, **28** (1981) 735-738.
- 13) J. W. Woods, M. A. Fiddy and R. E. Burge: "Phase retrieval using two intensity measurements in the complex plane," *Opt. Lett.*, **6** (1981) 514-516.
- 14) N. Nakajima: "Phase retrieval from two intensity measurements using the Fourier series expansion," *J. Opt. Soc. Am. A*, **4** (1987) 154-158.
- 15) N. Nakajima: "Phase retrieval using the logarithmic Hilbert transform and the Fourier-series expansion," *J. Opt. Soc. Am. A*, **5** (1988) 257-262.
- 16) N. Nakajima: "Reconstruction of a real function from its Hartley-transform intensity," *J. Opt. Soc. Am. A*, **5** (1988) 858-863.
- 17) N. Nakajima and T. Asakura: "A new approach to two-dimensional phase retrieval," *Opt. Acta*, **32** (1985) 647-658.
- 18) N. Nakajima and T. Asakura: "Two-dimensional phase retrieval using the logarithmic Hilbert transform and the estimation technique of zero information," *J. Phys. D*, **19** (1986) 319-331.
- 19) N. Nakajima: "Two-dimensional phase retrieval by exponential filtering," *Appl. Opt.*, **28** (1989) 1489-1493.
- 20) J. Ohtsubo, Y. Takahashi and N. Nakajima: "Reconstruction of double star image by phase retrieval based on Fourier series expansion," *Proc. SPIE*, **1121** (in press).
- 21) N. Nakajima: "Comparison of phase retrieval methods in computer experiments," *Jpn. J. Appl. Phys.*, **27** (1988) 244-252.