



グレーティングレンズの収差解析

西 脇 青 児

松下電器産業(株)デバイス工法開発研究所 〒570 守口市八雲中町 3-15

(1989年11月10日受付, 1990年2月28日受理)

Analysis of Grating Lens Aberration

Seiji NISHIWAKI

Device Process Technology Research Laboratory, Matsushita Electric Industrial Co. Ltd.,
3-15, Yakumonakamachi, Moriguchi 570

(Received Nov. 10, 1989; Accepted Feb. 28, 1990)

This paper is to propose a new approximation method of diffraction formula derived by coordinate conversions by which more exact aberration analysis of convergent light system under the non-sine condition can be accomplished. As an example of applications, the chromatic aberration characteristics and the inclined entrance characteristics of a grating lens are clarified.

1. はじめに

従来より波動光学に基づく収差解析がなされているが、それらの多くは大別して次の二つの手法を用いている。第1はいわゆるフレネルまたはフラウンホフナー近似を用いて回折式を計算する方法で、これにより回折像の光分布を計算することができる。第2は回折焦点(強度が最大になる点)に中心をもつ参照球面と波面とのずれの標準偏差を計算する方法¹⁾で、これにより回折焦点の位置と強度が求められる。第1の方法はアプラナチズム(正弦条件の満足)を前提としており、この前提条件下では有収差で開口の大きい場合にも精度の高い収差解析が可能である。第2の方法は多くの場合参照球面の変更に伴う収差関数(焦点移動収差)にフラウンホフナー近似から求められたものを用いるため、第1の方法と同様に精度の高い収差解析はアプラナチズムの条件下に限られる。

近年、フレネルレンズ等の回折を利用したレンズ(いわゆるグレーティングレンズ)の研究、開発が活発である。その収差解析もいくつかの論文でなされているが^{2,3)}、いずれも前述のアプラナチズムを前提とした解析法を用いている。グレーティングレンズはその平面構

成による形態から正弦条件を満たしえず、アプラナチズムを前提とした解析法は多くの誤差を含むが、この正弦条件の問題を考慮した収差解析の報告は少ない。本論の目的は座標変換による回折式の近似法を提案し、非正弦条件下でも適用できる収差解析法を提示することにある。またこの解析法をグレーティングレンズに適用し、その色収差特性や斜入射特性を明らかにする。

2. 非正弦条件下の結像系における フラウンホフナー近似の誤差

スカラー結像理論は一般にアプラナチズムを前提としており、瞳座標は像平面(または物平面)のフーリエ変換面(アポロニウスの球面)として定義される。すなわち、正弦条件を満たす条件下でフラウンホフナー近似(またはフレネル近似)は回折式の正確な近似式として機能し、像平面上の光分布を瞳座標上光分布のフーリエ積分として正確に計算する。これに対し、グレーティングレンズ等の正弦条件を満たさない結像系の瞳座標はアポロニウスの球面上になく、フラウンホフナー近似に多くの誤差が生じる。ここでは、グレーティングレンズの結像系にフラウンホフナー近似を用いた場合の誤差について論じる。

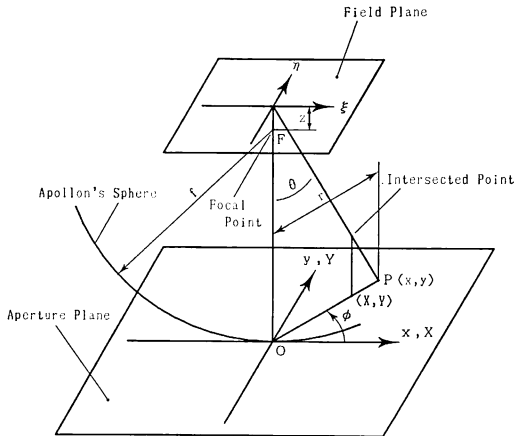


Fig. 1 Convergent light and projected coordinates.

Fig. 1 はグレーティングレンズの集光の様子を示す説明図である。グレーティングレンズの開口面(座標 (x, y)) 上の点 $P(x, y)$ を出射した光はアポロニウスの球面(焦点 F を中心とし点 $O(0, 0)$ で開口面と接する球面)を経て焦平面から z 離れた像平面(座標 (ξ, η)) 上に集光する。なお光線とアポロニウスの球面との交点群を光軸 OF に沿って開口面上に投影した座標 (X, Y) を投影座標と呼ぶ。フレネル・キルヒホッフの回折式⁴⁾によれば、焦平面から z の距離 ($z < 0$ がレンズ側に対応)をなす像平面上の回折像の振幅は次式で表される。

$$u(\xi, \eta, z) = (1/i\lambda) \iint_{-\infty}^{+\infty} \{w(x, y)/\rho\} \times \exp(i\kappa\rho) \cdot \cos\theta \, dx dy \quad (1)$$

ここで、

$w(x, y)$: 開口面出射直後の光複素振幅分布
ただし、 $w(x, y) = P(x, y)v(x, y) \times \exp\{-i\kappa\Psi_0(x, y)\}$

$P(x, y)$: グレーティングレンズの瞳関数

$v(x, y)$: 開口面入射直前の光振幅分布

$\Psi_0(x, y)$: 開口面出射直後の光位相分布

κ : 波数 (λ を波長として $\kappa = 2\pi/\lambda$)

f : 焦点距離

ρ : 開口面上の点と像平面の点の距離, すなわち $\rho = \{(f+z)^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{1/2}$

θ : 光軸と光線とのなす角

なお、開口形状が焦点 F から見て角 α から β の間の輪帯の場合、 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ として瞳関数 $P(x, y)$ は次式で表される。

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 \cdots f \tan \alpha \leq r \leq f \tan \beta \\ 0 \cdots \text{上記以外} \end{cases} \quad (2)$$

瞳座標 (x, y) は像平面のフーリエ変換面(アポロニウスの球面)と一致しないが、“Introduction to Fourier Optics”の記述に沿って回折式を次のように近似する⁵⁾。

(a) 光の伝播に伴う位相おくれを表す複素指数数項(式(1)の $\exp(i\kappa\rho)$) をフーリエ複素指数の形に近似する。すなわち、

$$\rho \approx f + z - z(x^2 + y^2)/2f^2 + (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)/2f - (x\xi + y\eta)/f \quad (3)$$

(b) 光の指向性を表す係数 inclination factor (式(1)の $\cos\theta$) を省略する。すなわち、 $\cos\theta = 1$ 。

(c) 分母に現れる光の伝播距離(式(1)の $w(x, y)/\rho$ の ρ) を焦点距離 f に近似する。

(a) の近似はフレネル近似であり、式(3)の $(x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)/2f$ をさらに $(x^2 + y^2)/2f$ に近似するのはフラウンホフナー近似である。フラウンホフナー近似の場合、位相の定数項を省略して回折式は次式に書き換えられる。

$$u(\xi, \eta, z) = (1/i\lambda f) \iint_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) \exp[ii\kappa\{-z(x^2 + y^2)/2f^2 + (x^2 + y^2)/2f\}] \times \exp\{-i\kappa(x\xi + y\eta)/f\} \, dx dy \quad (4)$$

(c) の近似は(a)の近似、(b)の省略と連動するものである。すなわち、(a)の近似により回折式はフーリエ積分式の形をとり、パーシバルの定理により次式が得られる。

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |u(\xi, \eta, z)|^2 \, d\xi d\eta = f^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} |w(x, y) \cos\theta/\rho|^2 \, dx dy \quad (5)$$

一方、回折前後でエネルギー保存則が成り立つので次式が得られる。

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |u(\xi, \eta, z)|^2 \, d\xi d\eta = \iint_{-\infty}^{+\infty} |w(x, y)|^2 \, dx dy \quad (6)$$

したがって(b)の省略($\cos\theta = 1$)のもとで式(5)、(6)が両立するには(c)の近似($\rho = f$)が成り立たなければならない。

このような近似法において(b)の省略(inclination factorの省略)および(c)の近似に伴う誤差は開口が大きいほど大きくなるが、それ以上の問題は(a)の近似が波面収差の定義⁶⁾に矛盾することである。たとえばフラウンホフナー近似の場合、無収差の結像のためにはグレーティングレンズ出射直後の光位相関数が $\Psi_0(x, y) = (x^2 + y^2)/2f$ で表現されなければならない。この表現

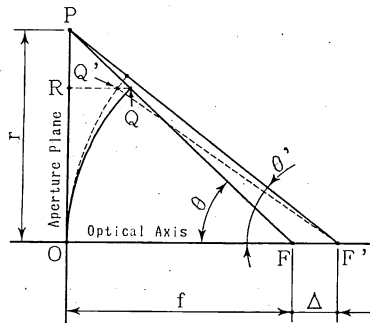


Fig. 2 Errors in approximation of wave front aberration.

は Fig. 2 に示すように、開口面（主点 O を通り光軸に直交する平面）と実際の波面との間を光軸に沿って測った距離 $RQ (= f(1 - \cos \theta))$ に近似し、波面収差の定義である光線に沿って測った距離 PQ とは異なる。無収差の場合には光位相関数 \mathcal{W}_0 と伝播に伴う位相おくれとが打ち消しあって問題にならないが、有収差の場合には次のような誤差が生じる。たとえば縦の焦点移動収差を考え、無収差のときの光線 PF が収差によって FP' に光路を変えたとする。光路長を $[\]$ で表すと、光路 PF' の収差関数は波面収差の定義では $([PF] - [PF'])$ の光路長差、フラウンホフナー近似では $([RQF] - [RQ'F'])$ の光路長差で表される。なお、 Q, Q' はそれぞれ F, F' を中心にした円の周上にある。 $\angle PFO = \theta$ 、 $\angle PF'O = \theta'$ 、 $OF = f$ 、 $FF' = \Delta$ とすると、 $\Delta \ll f$ のときには Δ の 2 次以上の項を無視して次式が成り立つ。

$$[PF] - [PF'] = f \cos \theta - (f + \Delta) \cos \theta' \approx -\Delta \cos \theta \quad (7)$$

$$[RQF] - [RQ'F'] = f(2 - \cos \theta) - (f + \Delta)(2 - \cos \theta') \approx -\Delta(2 - 2 \cos \theta + \cos^3 \theta) \quad (8)$$

したがって、同じ縦の焦点移動収差であっても (7)、(8) 式の二つの収差関数に差が生じ、その差は収差（すなわち Δ ）が大きいほど、また開口（すなわち θ ）が大きいほど大きくなる。この矛盾は縦の焦点移動収差に限らず他の収差の場合も同じである。このようにフラウンホフナー近似をグレーティングレンズ等の非正弦条件下の結像系に用いる場合、その近似に多くの誤差が含まれ、とくに波面収差の定義との矛盾による誤差は大きい。

3. 座標変換近似による回折式の近似

ここではフラウンホフナー近似に代わり、非正弦条件下でも適用できる回折式の近似法を提示する。

Fig. 1 において、光軸 OF と光線とのなす角 θ を光軸と直線 PF のなす角としても計算に大きな誤差はない。すなわち角 θ を $\cos \theta = f / (f^2 + x^2 + y^2)^{1/2}$ の解として取り扱う。このとき、投影座標 (X, Y) と開口面上の座標 (x, y) との間には $(X, Y) = (x \cos \theta, y \cos \theta)$ の関係が成り立ち、ヤコビアン $\partial(x, y) / \partial(X, Y) = 1 / \cos^4 \theta$ が導かれる。回折式 (1) の分母に現れる光の伝播距離 ρ を $(f^2 + x^2 + y^2)^{1/2}$ に置き換えてもその誤差はきわめて小さいが、複素指数項内の ρ はこれにきわめて大きい値 κ が掛けられているのでさらに精度よく近似する必要がある。すなわち $(x^2 + \xi^2 + \eta^2) \ll (f^2 + x^2 + y^2)$ の関係から ρ を次のように近似する。

$$\rho = \{(f+z)^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{1/2} \\ = (f^2 + x^2 + y^2)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{2zf}{f^2 + x^2 + y^2} - \frac{2(x\xi + y\eta)}{f^2 + x^2 + y^2} + \frac{z^2 + \xi^2 + \eta^2}{f^2 + x^2 + y^2} \right\}^{1/2} \quad (9)$$

$$\approx (f^2 + x^2 + y^2)^{1/2} + zf / (f^2 + x^2 + y^2)^{1/2} - (x\xi + y\eta) / (f^2 + x^2 + y^2)^{1/2} \quad (10)$$

一般に集光光学系では $(f^2 + x^2 + y^2)^{1/2}$ は $1 \sim 10 \text{ mm}$ のオーダーであり $(x^2 + \xi^2 + \eta^2)^{1/2}$ は $1 \sim 10 \mu\text{m}$ のオーダーであるから、式 (9) において $2zf / (f^2 + x^2 + y^2) \sim 10^{-3}$ 、 $2(x\xi + y\eta) / (f^2 + x^2 + y^2) \sim 10^{-3}$ 、 $(z^2 + \xi^2 + \eta^2) / (f^2 + x^2 + y^2) \sim 10^{-6}$ である。したがって式 (9) から式 (10) への移行はきわめて誤差の小さい近似である。以上の近似により、ヤコビアンを使って座標 (x, y) を座標 (X, Y) に変換することで次式が得られる。

$$u(\xi, \eta, z) = (1/i\lambda f) \iint_{-f}^f g(X, Y, z) \\ \times \exp\{-i\kappa(X\xi + Y\eta)/f\} dXdY \quad (11)$$

ただし、

$$g(X, Y, z) = P(x, y)v(x, y) \\ \times \exp\{i\kappa\Phi_0(x, y, z)\} / \cos^2 \theta \quad (12)$$

$$\Phi_0(x, y, z) = -\mathcal{W}_0(x, y) + f \cos \theta + z \cos \theta \quad (13)$$

$\Phi_0(x, y, z)$ を軸上像点（焦点から光軸に沿って z の距離の像点）に対する収差関数と呼ぶ。

(11) 式は投影座標 (X, Y) に関するフーリエ積分式の形をなしている。その導出に使われた近似は次の三つである。

- (A) 光の伝播に伴う位相遅れを表す複素指数項内の ρ を (10) 式に近似
- (B) 光の指向性を表す係数 inclination factor（すなわち $\cos \theta$ ）および座標変換によって現れる $\cos \theta$ を $f / (f^2 + x^2 + y^2)^{1/2}$ に近似

(C) 分母に現れる光の伝播距離 ρ を $(f^2+x^2+y^2)^{1/2}$ に近似
式(11)がフーリエ積分の形をなすことから、パーシバルの定理より次式が得られる。

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |u(\xi, \eta, z)|^2 d\xi d\eta = \iint_{-f}^f |g(X, Y, z)|^2 dXdY \quad (14)$$

一方、(12)式より変数を変換して次式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \iint_{-f}^f |g(X, Y, z)|^2 dXdY \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(x, y)v(x, y)|^2 dx dy \end{aligned} \quad (15)$$

したがって、(14)、(15)式より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{+\infty} |u(\xi, \eta, z)|^2 d\xi d\eta \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(x, y)v(x, y)|^2 dx dy \end{aligned} \quad (16)$$

(16)式は回折前後でエネルギーが保存されることを示している。すなわち(B)、(C)の近似は回折前後でのエネルギー保存則を自然に満足するものとなっている。

(B)、(C)の近似はきわめて精度の良いものであり、開口の大きい場合に生じる誤差もきわめて小さい。さらに(A)の近似は波面収差の定義にかなっていない。すなわち(A)の近似において無収差の結像のためには開口面出射直後の光位相関数が $\Psi_0(x, y) = f \cos \theta$ で表現されなければならない。この表現は Fig. 2 に示すように、波面収差の定義である光線に沿って測った距離 PQ に一致する。また有収差の場合にもその誤差はきわめて小さい。たとえば縦の焦点移動収差を考え、無収差のときの光線 PF が収差によって PF' に光路を変えたとする。光路 PF' での収差関数は波面収差の定義では $([PF] - [PF'])$ の光路長差、(A)の近似では $(-d \cos \theta)$ で表される。したがって $d \ll f$ のときには式(7)により二つの収差関数がほとんど一致し、それらの差は収差(すなわち d)、開口(すなわち θ) が大きい場合でもほとんど無視できる。この一致は縦の焦点移動収差に限らず他の収差の場合も同じである。

このように(11)式は inclination factor の省略や波面収差の定義との矛盾もない正確な近似式であり、投影座標 (X, Y) に対しフーリエ積分の形をなしていることから解析的にも取り扱いやすい。なお(11)式は座標変換によって得られたので、回折式の座標変換近似と呼ぶこととする。なお、グレーティングレンズのように瞳座標が (x, y) 光軸に直交する平面上にある場合を例にとって説明したが、その他の場合でも座標変換によって回折式の

正確な近似が行える。このとき投影座標 (X, Y) は光線とアポロニウスの球面との交点群を光軸に沿って光軸と直交する平面上に投影した座標として定義される。

4. 座標変換近似における移動定理と収差関数

座標変換近似で収差関数 $\Phi_0(x, y, z)$ に $\Phi_1 = -z_1 \times \cos \theta + X\xi_1/f + Y\eta_1/f$ を付け加えた場合の回折光を考えてみる。このとき、(11)~(13)式より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & (1/i\lambda f) \iint_{-f}^f g(X, Y, z) \\ & \quad \times \exp \{i\kappa(\Phi_1 - (X\xi + Y\eta)/f)\} dXdY \\ &= (1/i\lambda f) \iint_{-f}^f g(X, Y, z - z_1) \\ & \quad \times \exp [-i\kappa \{X(\xi - \xi_1) + Y(\eta - \eta_1)\}/f] dXdY \\ &= u(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1, z - z_1) \end{aligned} \quad (17)$$

すなわち収差関数 Φ_1 を加えても、光分布が全体として ξ 方向に ξ_1 、 η 方向に η_1 、光軸方向に z_1 移動するだけで焦点近傍の3次元強度分布の構造には変化がない。このことを座標変換近似における移動定理と呼び、フラウンホッフ近似における移動定理⁷⁾とは異なった形をなす(フラウンホッフ近似における移動定理は $\Phi_1 = z_1(x^2 + y^2)/2f^2 + \xi_1 x/f + \eta_1 y/f$ である)。

次に、波面収差の定義に従って光の伝播ベクトルと収差関数との関係を把握する。光軸を z 軸とし、焦点 F を原点とする直交座標 (x, y, z) を考える。開口面は $(x, y, -f)$ に相当する。位置 $(x_0, y_0, -f)$ から出射する光の伝播ベクトルを (a, b, c) とすると、点 $(x_0, y_0, -f)$ を通りベクトル (a, b, c) に直交する平面は $ax + by + cz = ax_0 + by_0 - cf$ で表される。この平面と点 $(x_0 + dx, y_0 + dy, -f)$ との最短距離は点 $(x_0, y_0, -f)$ に対する点 $(x_0 + dx, y_0 + dy, -f)$ の位相遅れ $d\Psi_0(x_0, y_0)$ に相当する。したがって、位相関数 Ψ_0 に関して次式が成り立つ。

$$d\Psi_0(x, y) = -(adx + bdy)/(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} \quad (18)$$

空気中の伝播であれば、 $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} = \kappa$ であるから次式が得られる。

$$\frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial x} = -\frac{a}{\kappa} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial y} = -\frac{b}{\kappa} \quad (20)$$

たとえば収差が球面収差の場合には開口面上の点 $(x, y, -f)$ から出射する光の縦収差を $\Delta(x, y)$ として次式が成り立つ。

$$(a, b, c) \propto (-x, -y, f + \Delta) \quad (21)$$

したがって(19), (20)式より $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, y) &= \int \frac{rdr}{\{(f+\Delta)^2+r^2\}^{1/2}} \\ &\doteq (f^2+r^2)^{1/2} - f \int \frac{dr}{(f^2+r^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (22)$$

式(13)から焦平面から z の距離の軸上像点 $(0, 0, z)$ に対する球面収差関数 $\Phi_0(x, y, z)$ は次式で表される。

$$\Phi_0(x, y, z) = f \int \frac{dr}{(f^2+r^2)^{3/2}} + z \cos \theta \quad (23)$$

5. 球面収差における最良像点条件とその応用

球面収差における最良像点条件(最良像点位置に関する条件)を求めてみる。球面収差の場合、収差関数 $\Phi_0(x, y, z)$ は開口面内の偏角 ϕ (ただし $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$) に依存しない。したがって光振幅 $v(x, y)$ が偏角 ϕ に依存しなければ、これを $v(\theta)$ に置き換え、 $\Phi_0(x, y, z)$ を $\Phi_0(\theta, z)$ に置き換えて、(11), (12)式より次式が得られる。

$$u(0, 0, z) = (2\pi f / i\lambda) \int_{\alpha}^{\beta} v(\theta) \exp\{i\kappa \Phi_0(\theta, z)\} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \quad (24)$$

$\Phi_0(\theta, z)$ が $\lambda/2\pi$ よりも小さいときには積分内の指数関数はべき級数に展開し2次の項までとって次式に近似できる。

$$\exp\{i\kappa \Phi_0(\theta, z)\} \doteq 1 + i\kappa \Phi_0(\theta, z) - (\kappa^2/2) \Phi_0^2(\theta, z) \quad (25)$$

$\Phi_0(\theta, z)$ には一般に常数項が含まれており、この常数項は任意にとってよく、計算に都合がよいように次式を満たすように決めておく。

$$\int_{\alpha}^{\beta} v(\theta) \Phi_0(\theta, z) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta = 0 \quad (26)$$

最良像点を像の強度が最大の所と定義すれば⁸⁾、最良像点条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial |u(0, 0, z)|}{\partial z} = 0 \quad (27)$$

したがって、(23)~(27)式より最良像点位置 z (焦点と最良像点の距離) は次式の解として与えられる。

$$\int_{\alpha}^{\beta} v(\theta) \Phi_0(\theta, z) \sin \theta d\theta = 0 \quad (28)$$

この球面収差における最良像点条件を用いて、グレーティングレンズの色収差に対する集光特性を調べてみる。Fig. 3 にグレーティングレンズの集光原理を示す。半径 r の位置でのグレーティング(ピッチ Λ) に

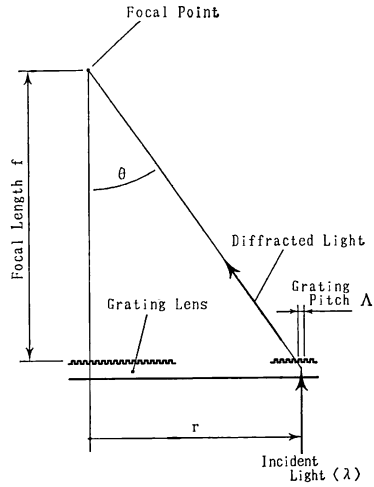


Fig. 3 Geometric relationship showing convergence by grating lens.

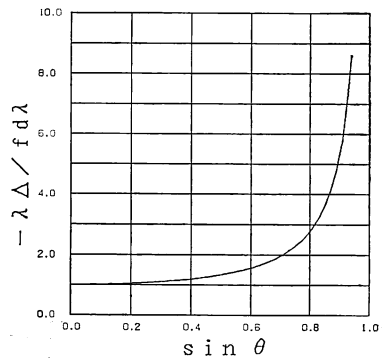


Fig. 4 Relationship between longitudinal aberration Δ and diffraction angle θ .

より波長 λ の透過光が回折すれば、その1次回折光の回折角 θ は次式で与えられる。

$$\sin \theta = \lambda / \Lambda \quad (29)$$

この回折光が一点に集光すれば次式が成り立つ。

$$\tan \theta = r / f \quad (30)$$

ここに f は焦点距離である。すなわち(29), (30)式より、グレーティングピッチ Λ が次式を満たすことが集光の条件である。

$$\Lambda = \lambda(f^2+r^2)^{1/2} / r \quad (31)$$

(29), (30)式より、 $d\lambda$ の波長誤差に伴う縦収差量 Δ (すなわち焦点距離の偏差量) と回折角 θ (すなわち開口角) との関係が次式で表される。

$$\Delta \cdot \lambda / (f d \lambda) = -1 / \cos^2 \theta \quad (32)$$

Fig. 4 はその特性曲線を示し、縦収差量 Δ は $\sin \theta$ に対し単調に増加する。(22), (32)式より波長誤差に伴う

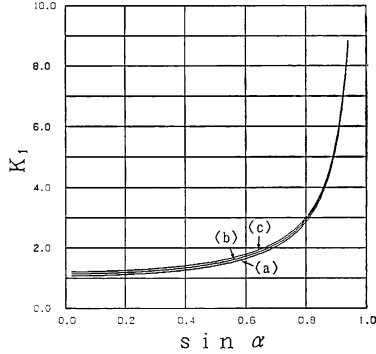


Fig. 5 Characteristic curves of displacement factor (K_1) vs. aperture shape factor ($\sin \alpha$): $n=0$; (a) $S=0.5$, (b) $S=1.0$, (c) $S=1.5$.

収差を含んだ開口面出射直後の位相 $\Psi_0(\theta)$ は次式で表される。

$$\Psi_0(\theta) = A_0 + (f/\cos \theta)(1 + d/\lambda) \quad (33)$$

ここで A_0 は常数項である。

グレーティングレンズに入射する光が $v(\theta) = \cos^2 \theta$ の分布のとき、常数項 A_0 は(26)式を解いて次式で与えられる。

$$A_0 = -(fd/\lambda) \cdot I_{2-n}/I_{1-n} + z \cdot I_{-n}/I_{1-n} \quad (34)$$

ここで I_n は次式で与えられる。

$$I_n = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (35)$$

(28), (33), (34)式より最良像点位置 z は次式で与えられる。

$$z = -K_1 \cdot fd/\lambda \quad (36)$$

ただし、

$$K_1(n) = (I_{1-n}^2 - I_{-n}I_{2-n}) / (I_{-n}^2 - I_{1-n}I_{-n}) \quad (37)$$

係数 K_1 は最良像点位置の変位のしやすさを示し、変位係数と呼ぶ。Fig. 5 に、 $n=0$ の条件で開口面積に関する値 $S = \pi(\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha)$ をパラメータにした場合の、 $\sin \alpha$ に対する変位係数 K_1 の特性曲線を示す。 K_1 は $\sin \alpha$ に対し単調に増加するので、開口面積一定 ($S=一定$) の条件下では輪帯を外周側にとるほど最良像点の変位しやすさ。なお $\beta \rightarrow \alpha$ のとき、近似的に次式が成り立つ。

$$I_n = \{2(\beta - \alpha) \tan \alpha + (\beta - \alpha)^2(1 + n \tan^2 \alpha)\} / 2 \cos^{n-1} \alpha \quad (38)$$

したがって、 $\beta \rightarrow \alpha$ のとき $K_1 \rightarrow 1/\cos^2 \alpha$ となり、(36)式より次式が得られる。

$$z \cdot \lambda / (fd) = -1/\cos^2 \alpha \quad (39)$$

(39)式は、輪帯の幅を狭めた場合の最良像点変位量 z と開口角 α との関係を示しており、幾何光学的な結果

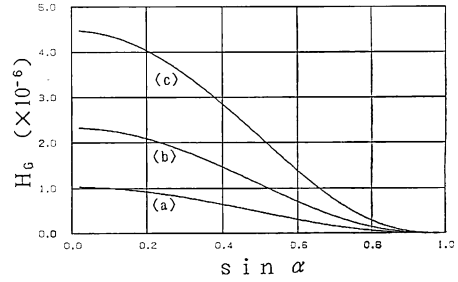


Fig. 6 Characteristic curves of degrading factor (H_g) vs. aperture shape factor ($\sin \alpha$): $n=0$; (a) $S=0.8$, (b) $S=1.0$, (c) $S=1.2$.

(すなわち波面に直交する光線を追跡することで得られる結果)である(32)式と一致する。この事実は重要で、フラウンホッフ近似では波面収差とフーリエ複素指数との矛盾から $\beta \rightarrow \alpha$ のごとく輪帯の幅を狭めた場合の最良像点変位量が幾何光学的結果と一致せず、そのずれは開口、収差が大きいくほど広がってくる。すなわち先に縦の焦点移動収差を例にとりて示された、座標変換近似の妥当性がここでも確認できる。

軸上の最良像点における光強度 (Strehl 強度) は(24)式に(36)式を代入して次式に近似できる (ただし、光強度 $I(x, y, z) = |u(x, y, z)|^2$ である)。

$$I(0, 0, z) = (2\pi f I_{1-n} / \lambda)^2 \{1 - H_g(\kappa f d / \lambda)^2 / 2\}^2 \quad (40)$$

ただし、

$$H_g(n) = (I_{1-n} K_1^2 + 2I_{-n} K_1 + I_{3-n}) / I_{1-n} - k_1^2 \quad (41)$$

$$k_1(n) = (I_{2-n} + I_{-n} K_1) / I_{1-n} \quad (42)$$

係数 H_g は Strehl 強度の劣化しやすさを示す定数であり、色収差による強度劣化係数と呼ぶ。Fig. 6 に $n=0$ の条件で $S = \pi(\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha)$ をパラメータにした場合の、 $\sin \alpha$ に対する強度劣化係数 H_g の特性曲線を示す。 H_g は $\sin \alpha$ に対し単調に減少し、開口面積一定 ($S=一定$) の条件下では輪帯を外周側にとるほど Strehl 強度が劣化しにくい。なお円形開口 ($\sin \alpha = 0.0$) で $n=0$, $S=1$ の場合、Fig. 6 から $H_g = 2.3 \times 10^{-6}$ であり、 $f=3$ mm, $\lambda=780$ nm とすると(40)式から $\pm 0.61\%$ (すなわち ± 4.8 nm) の波長誤差で Strehl 強度は 5% 劣化する。このようにグレーティングレンズ等の回折レンズにおける大きな色収差の発生はその実用化を妨げる原因の一つとなっている。

$v(\theta) = \cos^2 \theta$ のとき、開口を透過する光の光量は次式で与えられる。

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) v^2(x, y) dx dy = 2\pi f^2 I_{3-2n} \quad (43)$$

したがって、光量で標準化した Strehl 強度は $I_{1-n}^2 /$

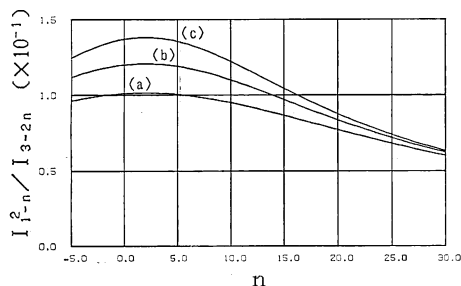


Fig. 7 Characteristic curves of Strehl intensity vs. amplitude distribution factor n : $\sin \alpha = 0.0$; (a) $S=0.8$, (b) $S=1.0$, (c) $S=1.2$.

I_{3-2n} に比例する。式(43)より $n \geq 1$ のとき、光の蹴られ率(レンズへの入射光量に対する出射光量の比)が $2(n-1)I_{3-2n}$ で表されるので、これまで数値解析的にしか示されなかった Strehl 強度と蹴られ率との関係が解析的な積分値 I_{3-2n} , I_{1-n} の関係式として与えられる。Fig. 7 は円形開口 ($\sin \alpha = 0$) で $S = \pi(\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha)$ をパラメータにした場合の、 n に対する I_{1-n}^2/I_{3-2n} の値をプロットしている。Fig. 7 から Strehl 強度は $n=2$ で極大となり $-1 < n < 5$ の領域で安定することがわかる。

6. 波面収差の標準偏差による 最良像点条件とその応用

波面収差の標準偏差を用いた方法での最良像点条件を求めてみる(この手法自体はよく知られた一般的な手法であるが⁹⁾、移動定理の表現が従来のフラウンホッフ近似に基づくものから座標変換近似に基づくものへ変わったので、後とのつながりも考えて改めて説明しておく)。

座標変換近似に基づく移動定理から、焦点から光軸の正方向に z_R , x 軸方向に x_R , y 軸方向に y_R だけ移動した点を中心とする参照波面に対する波面収差 $\Phi_R(x, y)$ は $(X, Y) = (f \sin \theta \cos \phi, f \sin \theta \sin \phi)$ より位相関数 $\Psi_0(x, y)$ を用いて次式で表される。

$$\Phi_R(x, y) = -\Psi_0(x, y) + f \cos \theta + z_R \cos \theta - x_R \cos \phi \sin \theta - y_R \sin \phi \sin \theta \quad (44)$$

前述した軸上像点の収差関数 $\Phi_0(x, y, z)$ は $z_R = z$, $x_R = y_R = 0$ の場合の波面収差 $\Phi_R(x, y)$ に相当する。

波面収差 $\Phi_R(x, y)$ を用いて、(11)~(13)式から参照波面中心での光分布について次式が成り立つ。

$$u(x_R, y_R, z_R) = (1/i\lambda f) \iint_{-f}^f P(x, y) v(x, y) / \cos^2 \theta \times \exp \{i\kappa \Phi_R(x, y)\} dXdY \quad (45)$$

簡単のため $v(x, y) = \cos^2 \theta$ とすると(45)式は次式に書き

換えられる。

$$u(x_R, y_R, z_R) = (1/i\lambda f) \iint_{-f}^f P(x, y) \times \exp \{i\kappa \Phi_R(x, y)\} dXdY \quad (46)$$

ここで、波面収差 $\Phi_R(x, y)$ の平均 $\overline{\Phi_R}$ と自乗平均 $\overline{\Phi_R^2}$ を用いて参照波面に対する波面収差の標準偏差 Φ_{SD} を次式で定義する。

$$\Phi_{SD} = (\overline{\Phi_R^2} - \overline{\Phi_R}^2)^{1/2} \quad (47)$$

ただし、

$$\overline{\Phi_R} = \iint_{-f}^f P(x, y) \Phi_R(x, y) dXdY / \iint_{-f}^f P(x, y) dXdY \quad (48)$$

$$\overline{\Phi_R^2} = \iint_{-f}^f P(x, y) \Phi_R^2(x, y) dXdY / \iint_{-f}^f P(x, y) dXdY \quad (49)$$

$\Phi_R(x, y)$ が $\lambda/2\pi$ よりも小さいときには積分内の指数関数はべき級数に展開し2次の項までとって次式に近似できる。

$$\exp \{i\kappa \Phi_R(x, y)\} \doteq 1 + i\kappa \Phi_R(x, y) - (\kappa^2/2) \Phi_R^2(x, y) \quad (50)$$

また積分内の $\Phi_R(x, y)$ が $\lambda/2\pi$ よりも小さいときには $\kappa \overline{\Phi_R^2}/2 \ll \Phi_{SD}$ と考えてよく、 $1 - \kappa^2 \overline{\Phi_R^2} + \kappa^2 \overline{\Phi_R^2} + (\kappa^2 \overline{\Phi_R^2}/2)^2 \doteq 1 - \kappa^2 \Phi_{SD}^2$ が成り立つ。したがって(47)式より次式が成り立つ。

$$I(x_R, y_R, z_R) = (1/\lambda f)^2 \left| \iint_{-f}^f P(x, y) dXdY \right|^2 \times (1 - \kappa^2 \Phi_{SD}^2) \quad (51)$$

したがって、波面収差の標準偏差 Φ_{SD} を最小にする x_R, y_R, z_R の値が最良像点位置となり、そのときの Strehl 強度は無収差 ($\Phi_{SD} = 0$) に比べ $(1 - \kappa^2 \Phi_{SD}^2)$ 倍の大きさとなる。ただし $v(x, y) = \cos^2 \theta$ としたので、瞳面上光分布に対する一般性はない。球面収差等の回転対称の収差では(28)式により最良像点位置が解析的に求められたが、コマ収差等の回転対称でない収差では解析的でなく、像点位置をパラメータにして式(11)を数値計算し、最大強度位置を探索しなければならない。これに対し波面収差の標準偏差による方法では x_R, y_R, z_R の値をある程度解析的に求められるので、瞳面上光振幅分布に対する一般性はないにしても最良像点位置の近傍を示す目安として有効である。

この波面収差の標準偏差による方法を用いて、斜入射に対するグレーティングレンズの集光特性を調べてみる。グレーティングレンズの伝播ベクトルダイヤグラム

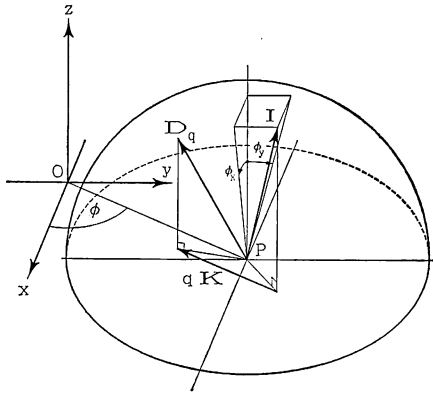


Fig. 8 Propagation vector diagram of grating lens.

を Fig. 8 に示す。xy 平面上の点 P(x, y) への入射光の伝播ベクトル I および点 P からの q 次の透過回折光伝播ベクトル D_q の終端は点 P を中心とする半径 κ の球面上にある。グレーティングレンズへ x 軸方向に ϕ_x 、y 軸方向に ϕ_y の傾きで入射する光の伝播ベクトル $I = (a_0, b_0, c_0)$ は次式で表される。

$$a_0 = \kappa_1 \sin \phi_x \cos \phi_y \quad (52)$$

$$b_0 = \kappa_1 \cos \phi_x \sin \phi_y \quad (53)$$

$$c_0 = \kappa_1 \cos \phi_x \cos \phi_y \quad (54)$$

ただし、

$$\kappa_1 = \kappa / (\cos^2 \phi_x \sin^2 \phi_y + \cos^2 \phi_y)^{1/2} \quad (55)$$

グレーティングの格子ベクトル K は xy 平面上にあり、その位置でのグレーティングに直交する。位置 (x, y) での格子ベクトル方向に測ったグレーティングピッチを $A(x, y)$ とすると、 K の大きさは $2\pi/A$ に等しい。したがって位置 $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ における格子ベクトルは次式で表される。

$$K = (-\kappa\lambda/A(x, y) \cdot \cos \phi, -\kappa\lambda/A(x, y) \cdot \sin \phi, 0) \quad (56)$$

Fig. 8 から q 次の透過回折光伝播ベクトル D_q の xy 平面成分ベクトルはベクトル I の xy 平面成分ベクトルとベクトル qK の和に等しい。すなわち、点 P における 1 次 ($q=1$) の透過回折光伝播ベクトル $D_1 = (a, b, c)$ は次式で表される。

$$a = a_0 - \kappa\lambda/A(x, y) \cdot \cos \phi \quad (57)$$

$$b = b_0 - \kappa\lambda/A(x, y) \cdot \sin \phi \quad (58)$$

$$c = (\kappa^2 - a^2 - b^2)^{1/2} \quad (59)$$

したがって、 $R = (X^2 + Y^2)^{1/2} = f \sin \theta$ として (19), (20) 式から次式が成り立つ。

$$\Psi_0(x, y) = f / \cos \theta - \{a_0 / \kappa \cdot R \cos \phi$$

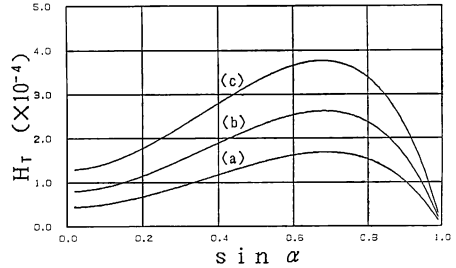


Fig. 9 Characteristic curves of degrading factor (H_T) vs. aperture shape factor ($\sin \alpha$): (a) $S=0.8$, (b) $S=1.0$, (c) $S=1.2$.

$$+ b_0 / \kappa \cdot R \sin \phi \} / \cos \theta \quad (60)$$

式 (60) の右辺第 2 項には像点の横移動収差成分とコマ収差成分が含まれる。 $\phi_y = 0$ のときには $a_0 / \kappa = \sin \phi_x$ 、 $b_0 / \kappa = 0$ であり、次式が成り立つ。

$$\Psi_0(x, y) = f / \cos \theta - R \cos \phi \sin \phi_x / \cos \theta \quad (61)$$

したがって焦点から光軸の正方向に z_R 、x 軸方向に $x_R \sin \phi_x$ だけ移動した点を中心とする参照波面に対する波面収差 $\Phi_R(x, y)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \Phi_R(x, y) &= -\Psi_0(x, y) + f / \cos \theta + z_R \cos \theta \\ &\quad - R \cos \phi x_R \sin \phi_x / f \\ &= f \cos \phi \sin \phi_x \sin \theta (1 / \cos \theta \\ &\quad - x_R f) + z_R \cos \theta \end{aligned} \quad (62)$$

開口角 $\alpha \sim \beta$ の輪帯開口の場合、波面収差の平均 $\overline{\Phi_R}$ と自乗平均 $\overline{\Phi_R^2}$ は次式で表される。

$$\overline{\Phi_R} = z_R I_{-2} / I_{-1} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_R^2} &= I_{-3} z_R^2 / I_{-1} + f^2 \sin^2 \phi_x \\ &\quad \times \{(x_R / f - S_T)^2 (I_{-1} - I_{-3}) / 2I_{-1} + H_T\} \end{aligned} \quad (64)$$

ただし、

$$S_T = (I_0 - I_{-2}) / (I_{-1} - I_{-3}) \quad (65)$$

$$H_T = \{(I_{-1} - I_{-1}) - S_T^2 (I_{-1} - I_{-3})\} / 2I_{-1} \quad (66)$$

(47) 式により、波面収差の標準偏差値 Φ_{SD} は次式で表される。

$$\begin{aligned} \Phi_{SD}^2 &= z_R^2 (I_{-1} I_{-3} - I_{-2}^2) / I_{-1}^2 + f^2 \sin^2 \phi_x \{(x_R / f \\ &\quad - S_T)^2 (I_{-1} - I_{-3}) / 2I_{-1} + H_T\} \end{aligned} \quad (67)$$

したがって $x_R = f S_T$ 、 $z_R = 0$ で波面収差の標準偏差 Φ_{SD} は最小値 $f \sin \phi_x H_T^{1/2}$ をとる。(51) 式から H_T は斜入射による Strehl 強度の劣化のしやすさを表し、斜入射による強度劣化係数と呼ぶ。Fig. 9 に $S = \pi(\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha)$ をパラメータにした場合の、 $\sin \alpha$ に対する強度劣化係数 H_T の特性曲線を示す。 H_T は $\sin \alpha = 0.68$ 近傍で極大となる曲線を描く。波面収差が Marechal's Criterion (波面収差の標準偏差が $\lambda/14$ となる限界⁹⁾ を越える条件は次式で与えられる。

$$\sin \phi_x = \lambda / (14fH_T^{1/2}) \quad (68)$$

$\lambda=780 \text{ nm}$, $f=3 \text{ mm}$ とすれば Marechal's Criterion を越える角度は $\text{NA}=0.49$ ($S=1$) の円形開口で $\phi_x=0.12^\circ$ ときわめて小さく, 有効視野角が極端に狭いことはグレーティングレンズを実用化するうえで重大な課題である。

7. ま と め

投影座標への座標変換によって回折式をフーリエ積分式に変形する近似法(座標変換近似)を提示し, この解法が非正弦条件下の結像系における正確な近似法であることを明らかにした。フラウンホッフ近似等の従来の近似法はグレーティングレンズ等の正弦条件を満たさない結像系での誤差が大きく, とくに波面収差の定義との矛盾による誤差があったが, 座標変換近似は近似に伴う誤差がきわめて小さく, 収差を含んだ集束光の像面上の光分布やピーク強度などを正確に計算することができる。この座標変換近似に基づき波面と収差関数との関係を明らかにし, 球面収差における最良像点条件(最良像点位置を与える条件)を求めた。さらに, フラウンホッフ近似に基づく移動定理を座標変換近似に基づく移動定理に書き換え, 波面収差の標準偏差を用いた方法での最良像点条件を記述した。

本論では実際に球面収差の最良像点条件をグレーティングレンズの色収差に適用することで, 波長誤差量と最

良像点位置の変位幅や Strehl 強度の劣化の度合の関係を解析的に求めた。その結果, グレーティングレンズは色収差に伴う縦収差量 Δ が開口角 θ に対して単調に増加し, Strehl 強度の劣化が 5% まで許容できるものとするれば, $f=3 \text{ mm}$, $\text{NA}=0.49$ の円形開口で波長誤差が $\pm 0.61\%$ (すなわち 780 nm の波長に対し $\pm 4.8 \text{ nm}$) の許容値しかないことを明らかにした。さらに波面収差の標準偏差を用いた方法での最良像点条件をグレーティングレンズの斜入射特性に適用し, Marechal's Criterion を越える斜入射角度の限界が $\text{NA}=0.49$ の円形開口で 0.12° ときわめて小さいことを明らかにした。

文 献

- 1) M. Born and E. Wolf: 光学の原理, 草川 徹, 横田英嗣訳 (東海大学出版会, 東京, 1975) pp. 690-691.
- 2) 森 一成: "マイクロフレネルレンズ", 光学, **16** (1987) 52.
- 3) 後藤顕也, 森 一成, 樋口義則, 上田勝宣: "プラスチックグレーティングコリメータレンズ", 光学, **18** (1989) 358.
- 4) J. W. Goodman: *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York, 1968) pp. 44-45.
- 5) J. W. Goodman: *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York, 1968) pp. 57-62.
- 6) 三宅和夫: 幾何光学 (共立出版社, 東京, 1979) p. 96.
- 7) M. Born and E. Wolf: 光学の原理, 草川 徹, 横田英嗣訳 (東海大学出版会, 東京, 1975) p. 689.
- 8) 久保田広: 波動光学 (岩波書店, 東京, 1971) p. 323.
- 9) M. Born and E. Wolf: 光学の原理, 草川 徹, 横田英嗣訳 (東海大学出版会, 東京, 1975) p. 697.