

## 研究

## 位相差からの最小自乗位相推定におけるエラーの考察

高城 洋明\*・高橋 徹\*\*

\* 九州工業大学電子工学教室 〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1

\*\* 大分工業高等専門学校電気工学教室 〒870-01 大分市大字牧 1666

(1989年12月20日受付, 1990年3月10日受理)

Analysis of Error in Least-Squares Phase Estimation  
from the Phase Difference

Hiroaki TAKAJO\* and Tohru TAKAHASHI\*\*

\* Department of Electronic Engineering, Kyushu Institute of Technology,  
1-1, Sensuicho, Tobata-ku, Kitakyushu 804\*\* Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology,  
1666, Maki, Oita 870-01

(Received Dec. 20, 1989; Accepted March 10, 1990)

In this paper, we discuss the influence of the measurement noise on the extended least-squares phase estimation from the phase difference (ELPE) and clarify the characteristics of the phase estimation error in ELPE. Regarding the function of ELPE, we introduce the concepts of normality and abnormality. It is shown that (i) the measurement noise is the reason that ELPE becomes abnormal and (ii) phase estimation error is generally the summation of the inevitable error and the error resulting from the abnormality. Computer simulations reveal that the error resulting from the abnormality is much larger than the inevitable error even when the number of the index of rotational source incorrectly estimated is small and thus it is of essential importance to realize the accurate estimation of the index.

## 1. ま え が き

Speckle imaging や compensated imaging は光学の重要な分野である<sup>1,2)</sup>。これらの分野に共通する重要な問題の一つに、物体のフーリエ位相を測定された位相差から回復する問題がある。近年著者らは最小自乗推定による位相差からの位相回復について研究<sup>3,4)</sup>、次の結果を得た。(1)従来の最小自乗位相推定<sup>5-11)</sup>(CLPE (conventional least-squares phase estimation from the phase difference) と呼ぶ)には第1種と第2種の困難が存在することを示した。すなわち CLPE の機能はフーリエ・スペクトルにおける孤立零点によって破壊されること、測定ノイズもまた CLPE を不能にしまうことを示した。(2)これらの困難を克服して位相を回復できる新しい最小自乗位相推定を構築した。本論文ではこれを ELPE (extended least-squares phase estimation from the phase difference) と呼ぶ。(3)さらに ELPE を正

確に実行する非繰返し型のアルゴリズムを開発した。

本論文の目的は、測定ノイズが ELPE に与える影響を議論し、ELPE における推定エラーの特性を明らかにすることである。CLPE における推定エラーについてはすでに多くの研究が行われている<sup>5-12)</sup>。しかしながら、これらの研究には上述の困難の存在は想定されていない。実際には困難は多くの場合に存在するので、CLPE の適用範囲は狭く、これらの研究の適用範囲もまた狭いと考えられる。

すでに示したように、ELPE では測定位相差を信号分が保存的である修正位相差に変換することによって困難を克服する。この変換を行うためには、測定位相差の信号分を位相面における各 minimum enclosure に沿って加算した値が必要である。本論文ではこれらの値を  $2\pi$  で割って得られる整数を渦源の指標と呼ぶ。ELPE では渦源の指標を推定するプロセスが不可欠であり、測定ノイズはこのプロセスを乱す原因となる。これは CLPE

では経験されない状況である。われわれは先の論文<sup>3,4)</sup>において、ELPEにおける推定エラーについて議論した。しかしながら、それらは主として渦源の指標が正しく推定される場合の議論であった。本論文では、(i)測定ノイズが渦源の指標の推定に及ぼす影響を及ぼすか、(ii)それによってELPEに及ぼす結果がもたらされるか、に注目してELPEにおける位相推定エラーを議論する。

2. CLPEの機能と特性

ELPEについて議論するためにはCLPEを理解しておく必要がある。本章では、記号の導入を図りながら、CLPEの機能と特性を後章での議論に適した形式で記述する。

2.1 CLPEの定義

位相は  $N \times N$  点でサンプルされているものとし、それらを、 $\phi_{mn}(m, n=1, \dots, N)$  と表す。測定によって得られる位相差は  $2\pi$  の範囲に値が限られている。ここではその範囲を  $(-\pi, \pi]$  に選ぶ。このとき、ノイズが存在しない場合の測定位相差は、

$$S_{mn}^1 = \langle \phi_{m+1,n} - \phi_{mn} \rangle_p$$

$$m=1, \dots, N-1, \quad n=1, \dots, N$$

$$S_{mn}^2 = \langle \phi_{m,n+1} - \phi_{mn} \rangle_p$$

$$m=1, \dots, N, \quad n=1, \dots, N-1$$

で与えられ、ノイズが存在する場合の測定位相差は、

$$\tilde{S}_{mn}^l = S_{mn}^l + n_{mn}^l + 2\pi L_{mn}^l$$

$$= \bar{S}_{mn}^l + n_{mn}^l, \quad l=1, 2$$

と表される。ただし、 $\langle \rangle_p$  は主値を表し、 $n_{mn}^l$  は測定ノイズを表す。 $L_{mn}^l$  は、 $\tilde{S}_{mn}^l$  が  $(-\pi, \pi]$  の範囲に制限された量であるために必要な整数である。 $\bar{S}_{mn}^l$  は、

$$\bar{S}_{mn}^l \triangleq \tilde{S}_{mn}^l - n_{mn}^l$$

$$= S_{mn}^l + 2\pi L_{mn}^l$$

である。すなわち、 $\bar{S}_{mn}^l$  は測定位相差からノイズを差し引いて得られる量で、われわれはそれを  $\tilde{S}_{mn}^l$  の信号分と呼ぶ。サンプルされた位相と位相差の配置を Fig. 1 に  $N=4$  の場合について示す。

通常の物理量の測定では、ノイズが存在しない場合の測定値と、測定値からノイズを差し引いた値とは一致し、それらは真の値と呼ばれる。しかしながら、位相差の測定においては、両者すなわち  $S_{mn}^l$  と  $\tilde{S}_{mn}^l$  とは  $2\pi L_{mn}^l$  だけ異なる。これは位相差測定の特質である。文献4)で議論したように、推定問題すなわちノイズを含んだ測定値から真の値に最も近い値を決定しようとする問題においては、 $S_{mn}^l$  よりもむしろ  $\tilde{S}_{mn}^l$  のほうを真

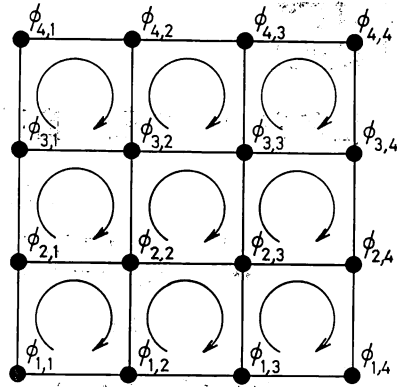


Fig. 1 A sampling geometry of phase difference and phase mesh points for  $N=4$ . The symbol  $\odot$  indicates the minimum enclosures.

の値とみなすほうが妥当である。言うまでもなく、測定ノイズが存在しないときには  $2\pi L_{mn}^l$  はゼロであり、 $\tilde{S}_{mn}^l$  は  $S_{mn}^l$  に一致する。

文献3)あるいは8)によれば、CLPEとは  $\tilde{S}_{mn}^l$  から次の正規方程式

$$[P]^T [P] \check{\phi} = [P]^T \tilde{S}$$

(4) を満足する  $\check{\phi}$  を求めるプロセスである。ただし  $\tilde{S}$  は  $\tilde{S}_{mn}^l$  を要素とする列ベクトル、 $\check{\phi}$  は  $\phi_{mn}$  の推定  $\check{\phi}_{mn}$  を要素とする列ベクトルであり、 $[P]$  は文献3)の418頁に示すマトリックスである。しかしながら本論文では、CLPEを次のように定義する：

「 $\tilde{S}_{mn}^l$  のように値が  $2\pi$  の範囲に限られてはいない“任意”の量  $E_{mn}^l$  から、次の方程式

$$[P]^T [P] \check{\phi} = [P]^T E$$

(5) を満たす  $\check{\phi}$  を求めるプロセスをわれわれはLSED (least-squares signal estimation from its difference) と呼ぶことにする。CLPEとは入力とくに  $2\pi$  の範囲に値が限られている測定位相差である場合のLSEDである。ただし  $E$  は  $E_{mn}^l$  を要素とする列ベクトルである」

われわれがCLPEをこのように再定義するのは、後述するELPEとの対比を考慮に入れてのことである。

Fig. 2にCLPEの概念図を示す。

入力が  $E_{mn}^l$  であるとき、LSEDの出力は、

$$\check{\phi}_{mn} = \int_{(0,0)}^{(m,n)} (\{E_{ij}^l - \langle^T E_{ij}^l\}) + C$$



Fig. 2 Conceptual diagram of CLPE.  $\tilde{S}_{mn}^l$  is the measured phase difference restricted in the range of  $2\pi$ .

で与えられる。ただし、 $\overset{(m,n)}{\mathcal{L}}$  はある量を点  $(m', n')$  から点  $(m, n)$  まである経路に沿って加算する演算子である。 $\langle \mathcal{T} \rangle E_{ij}^l$  は  $E_{ij}^l$  の横方向成分である (添字  $\langle \mathcal{T} \rangle$  は横方向成分であることを示す)。それは任意の  $m, n$  に対して

$$H_{mn}(\{\langle \mathcal{T} \rangle E_{ij}^l\}) = 0 \quad (7)$$

を満足する。ただし  $H_{mn}$  は二次元離散システムにおけるダイバージェンス演算子であり、

$$H_{mn}(\{\langle \mathcal{T} \rangle E_{ij}^l\}) = \langle \mathcal{T} \rangle E_{mn}^2 - \langle \mathcal{T} \rangle E_{m,n-1}^2 + \langle \mathcal{T} \rangle E_{mn}^1 - \langle \mathcal{T} \rangle E_{m-1,n}^1 \quad (8)$$

である。また、(6)式における  $C$  は任意の定数である。物体のフーリエ位相回復問題においては  $C$  は重要ではないので、しばらくの間  $C$  を無視して議論する。

### 2.2 CLPE の特性

文献 4) で示したように、CLPE の実行可能条件は、測定位相の信号分  $\bar{S}_{mn}^l$  が保存的であることである\*1。すなわち、Fig. 1 に描かれている  $(N-1)^2$  個の minimum enclosure のおのおのにおいて次式、

$$\begin{aligned} 2\pi D_{mn} &\triangleq R_{mn}(\{\bar{S}_{ij}^l\}) \\ &= R_{mn}(\{S_{ij}^l\}) + R_{mn}(\{2\pi L_{ij}^l\}) \quad (9) \\ &= 0 \quad \text{for } m, n = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

が成立することである。ただし、 $R_{mn}$  はある量を  $mn$  番目の minimum enclosure  $C_{mn}$  に沿って加算するローテーション演算子であり、

$$R_{mn}(\{\bar{S}_{ij}^l\}) = \bar{S}_{mn}^1 + \bar{S}_{m+1,n}^2 - \bar{S}_{m,n+1}^1 - \bar{S}_{mn}^2 \quad (10)$$

である。ほとんどの物体のフーリエ変換には孤立零点が存在する<sup>3,13)</sup>。孤立零点の近傍では、物体のフーリエ変換  $F(u, v)$  は\*2、

$$F(u, v) = \{\exp(i\alpha)\} (A_1 u + i A_2 v) \quad (11)$$

と近似できる。ただし、原点は孤立零点に一致するものとし、 $\alpha, A_1, A_2$  は定数である。

したがって、孤立零点の周りを一周するとき、位相はもとの値に戻らず、もとの値と  $+2\pi$  あるいは  $-2\pi$  だけ異なる値になる。その結果 (9) 式の 2 段目の式の第 1 項は、

$$R_{mn}(\{S_{ij}^l\}) = 2\pi M_{mn} \quad (12)$$

となる。ただし、 $M_{mn}$  は  $C_{mn}$  が孤立零点を取り囲むときには  $+1$  か  $-1$  であり、そうでないときにはゼロである。孤立零点の存在は、(9) 式の 2 段目の式の第 1 項に

ゼロと異なる値をとらせることができ、その結果 (9) 式が成立しなくなるようにすることができる。第 1 項がゼロと異なることが原因で CLPE にもたらされる困難を、第 1 種の困難と呼ぶ。2 段目の式の第 2 項は  $2\pi L_{mn}^l$  を通して測定ノイズに依存する。言うまでもなく、第 2 項がゼロと異なることもまた (9) 式が成立しなくなる原因となりうる。(2) 式から明らかのように、 $2\pi L_{mn}^l$  は、

$$-\pi < S_{mn}^l + n_{mn}^l \leq \pi \quad (13)$$

が成立しないときにゼロと異なる値になる。したがって、 $|S_{mn}^l|$  が  $\pi$  に近いほど第 2 項がゼロと異なる確率は高くなる。われわれは、第 2 項がゼロと異なることが原因で CLPE に生ずる困難を、第 2 種の困難と呼ぶ。以下の議論では、困難が第 1 種か第 2 種かあるいはそれらが複合したものかを必ずしも区別する必要がない。そのような場合にはただ単に困難と呼ぶことにする。

円形や矩形の物体の位相はフーリエ面内のいくつかの線上で  $\pi$  だけ不連続になる。この場合には、 $|S_{mn}^l| = \pi$  となる  $S_{mn}^l$  が存在し、わずかの測定ノイズでも第 2 種の困難が生じる。これは第 2 種の困難が現れる最も著しい例である。

(9) 式での定義から明らかのように、 $2\pi D_{mn}$  は離散的な二次元場である  $\bar{S}_{mn}^l$  の  $C_{mn}$  に存在する渦源の強さを表す量であるとみなすことができる。この量は  $2\pi$  の整数倍以外の値をとらないので、 $D_{mn}$  は常に整数である。本論文では  $D_{mn}$  を渦源の指標と呼ぶ。上述の議論から明らかのように、 $D_{mn}$  の分布は孤立零点の分布と測定ノイズの分布に依存する。

さて、(2) 式と (6) 式とから、CLPE による推定位相は一般に、

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{mn} &= \underset{(0,0)}{\mathcal{L}}^{\langle m,n \rangle} (\{\bar{S}_{ij}^l - \langle \mathcal{T} \rangle \bar{S}_{ij}^l\}) \\ &+ \underset{(0,0)}{\mathcal{L}}^{\langle m,n \rangle} (\{n_{ij}^l - \langle \mathcal{T} \rangle n_{ij}^l\}) \quad (14) \end{aligned}$$

となることが導かれる。実行可能条件、(9) 式、が成立するときには、

$$\langle \mathcal{T} \rangle \bar{S}_{ij}^l = 0 \quad (15)$$

が成立し、推定位相は、

$$\bar{\phi}_{mn} = \bar{\phi}_{mn} + \epsilon_{mn}^{(1)} \quad (16)$$

となる。ただし、

$$\bar{\phi}_{mn} = \underset{(0,0)}{\mathcal{L}}^{\langle m,n \rangle} (\{\bar{S}_{ij}^l\}) \quad (17)$$

である。 $\bar{\phi}_{mn}$  は加算が行われる経路には依存せず、この場合の推定の真の値である。第 2 項は

$$\epsilon_{mn}^{(1)} = \underset{(0,0)}{\mathcal{L}}^{\langle m,n \rangle} (\{n_{ij}^l - \langle \mathcal{T} \rangle n_{ij}^l\}) \quad (18)$$

\*1 文献 3) では、CLPE の実行可能条件は  $S_{mn}^l$  が保存的であることとした。しかし文献 4) で述べたように、 $\bar{S}_{mn}^l$  が保存的であるとするほうが正しい。

\*2 この部分だけは、離散系ではなく連続系で記述する。

で定義される推定エラーである。本論文ではこれを不可避エラーと呼ぶ。これまで多くの研究者によって研究されてきたのは<sup>5-12)</sup>、この不可避エラーである。CLPEが一経路加算<sup>1)</sup>による位相回復よりも優れているといわれている理由は、このエラーが $\int_{(0,0)}^{(m,n)} (\{S_{ij}^i\})$ ではなくて、ノイズの横方向成分が差し引かれた(18)式で与えられるからである。しかしながら、(9)式が成立しないときには、(14)式から明らかのように、CLPEの推定位相から $\bar{S}_{mn}^i$ の横方向成分に関する情報が失われるという事態が生じる。これにより多くの場合 CLPE は不能となる(文献4)の Fig. 6 (a)と Fig. 9 (a)参照)。これが CLPE における困難のより具体的な記述である。

3. ELPE の機能と推定エラー

3.1 ELPE の概念図

ELPE では上述の困難を次のようにして克服する。まず、次式

$$2\pi \check{D}_{mn} = R_{mn}(\{\check{S}_{ij}^i\}) - \arg[\exp\{i R_{mn}(\{\check{S}_{ij}^i\})\}] \quad (19)$$

によって  $D_{mn}$  の推定  $\check{D}_{mn}$  を求める。この推定法は次の条件

$$-\pi < R_{mn}(\{n_{ij}^i\}) \leq \pi \quad (20)$$

が成立するとき  $D_{mn}$  の正しい値を与える。 $\check{D}_{mn}$  は  $D_{mn}$  と同じく常に整数であり、それは正しいか正しくないかのどちらかである。つぎに  $\check{D}_{mn}$  と文献3)の(37)式と(38)式とから  $K_{mn}^i$  を計算し、次式

$$\check{S}_{mn}^i = \bar{S}_{mn}^i + 2\pi K_{mn}^i \quad (21)$$

によって修正位相差  $\check{S}_{mn}^i$  を生成する。全ての  $D_{mn}$  が正しく推定されるときには、次式

$$\bar{S}_{mn}^i \triangleq \check{S}_{mn}^i - n_{mn}^i \quad (22)$$

で定義される  $\check{S}_{mn}^i$  の信号分  $\bar{S}_{mn}^i$  は、たとえ  $\bar{S}_{mn}^i$  が(9)式を満足しなくても、保存的となる。すなわち

$$R_{mn}(\{\bar{S}_{ij}^i\}) = 0 \text{ for } m, n = 1, \dots, N-1 \quad (23)$$

が成立する。したがって、 $\check{S}_{mn}^i$  を LSED の入力とし、その出力を推定位相とすれば問題は解決する。Fig. 3 に ELPE の概念図を示す。この図では ELPE は二つのステップから構成されると考えられている。点線で囲ま

れた第一のステップは保存場への変換を行うステップである。第二のステップは LSED である。

3.2 推定エラーの発生機構

ELPE では Fig. 3 に示す二つのステップのおおの推定機能が存在する。測定ノイズは LSED ばかりでなく  $D_{mn}$  の推定に対しても好ましくない影響を与える。われわれはこの点に注意を払って ELPE における位相推定エラーを議論する。

測定ノイズが小さくて全ての minimum enclosure で(20)式が成立するときには、全ての  $D_{mn}$  に対して正しい値を得ることができる。この場合には保存場への変換が正しく行われ、推定位相は(6)式から明らかのように、

$$\begin{aligned} \check{\phi}_{mn} &= \int_{(0,0)}^{(m,n)} (\{\check{S}_{ij}^i - \langle T \rangle \bar{S}_{ij}^i\}) \\ &= \bar{\phi}_{mn} + \varepsilon_{mn} \quad (24) \end{aligned}$$

となる。ただし

$$\bar{\phi}_{mn} = \int_{(0,0)}^{(m,n)} (\{\bar{S}_{ij}^i\}) \quad (25)$$

である。 $\bar{\phi}_{mn}$  は加算が行われる経路には依存せず、この場合の推定における真の値である。推定エラーは(18)式で与えられる不可避エラーである。

これに対して、minimum enclosure の少なくともどちらか一つで(20)式が成立しない場合には、保存場への変換はもはや不完全にしか行えず、 $\bar{S}_{mn}^i$  には横方向成分が現れる。このとき推定位相は

$$\check{\phi}_{mn} = \int_{(0,0)}^{(m,n)} (\{\check{S}_{ij}^i - \langle T \rangle \bar{S}_{ij}^i\}) + \varepsilon_{mn} \quad (26)$$

となる。

ELPE は、第1種と第2種の困難を克服しようという点において CLPE とは決定的に異なる。しかしながら、測定ノイズの大きさが少なくとも一つの  $D_{mn}$  を正しく推定できないようなレベルを越えたときには、ELPE の機能もまた正常ではなくなり、推定位相から  $\bar{S}_{ij}^i$  の横方向成分に関する情報が失われるという事態を招く。しかしこのときに失われる情報は、CLPE の場合と異なり、フーリエ・スペクトルの孤立零点の分布には依存せず、また第2種の困難の状況にもあからさまには関係し

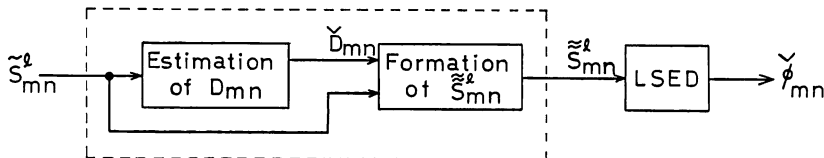


Fig. 3 Conceptual diagram of ELPE.

ない\*3. それは誤って推定される  $D_{mn}$  の分布だけから完全に決定される. われわれは ELPE のこのような特性を明確にするため正常および異常の概念を次のように導入する: 「全ての  $D_{mn}$  が正しく推定されるとき ELPE は正常であると言い, そうではないときには異常であるという」

われわれがこれらの概念を導入するのにはもう一つの理由がある. それは, 後章に示すように, 誤って推定される  $D_{mn}$  の出現が ELPE に与える影響は大きいけれど, それらの個数が少ない間は ELPE の機能は完全に失われるわけではないからである. 測定ノイズは, ELPE を正常な状態から異常な状態に遷移させるばかりでなく,  $D_{mn}$  の推定を通して異常さの“程度”を支配する.

### 3.3 推定エラーの解析

推定の“良さ”あるいは“悪さ”を定量的に評価するための, 最も簡単でよく用いられる尺度の一つは, 推定値と真の値との差, いわゆるエラーである. ところで ELPE の場合には, エラーの定義には注意を要する. なぜならば, ELPE が異常のときには (26) 式の第 1 項

$$\int_{(0,0)}^{(m,n)} (\{S_{ij}^i\})$$

は加算が行われる経路に依存し, どの経路から得られる値を真の値とすればよいか判然としないからである. この事態に対処するため, 常に  $D_{mn}$  の正しい値を使って位相を回復できる ELPE を仮想し, ELPE による推定結果を仮想された ELPE による結果と比較するという手段をとる. われわれは, このように仮想された ELPE を idealized ELPE と呼ぶ.

Idealized ELPE における修正位相差  ${}^{(1)}\bar{S}_{mn}^i$  の信号分  ${}^{(1)}\bar{S}_{mn}^i$  は常に保存的で推定位相は

$${}^{(1)}\bar{\phi}_{mn} = {}^{(1)}\bar{\phi}_{mn} + \varepsilon_{mn}^{(1)} \quad (27)$$

となる. ただし,

$${}^{(1)}\bar{\phi}_{mn} = \int_{(0,0)}^{(m,n)} (\{S_{ij}^i\}) \quad (28)$$

である. この値は idealized ELPE における真の値であって経路に依存しないことはいうまでもない (添字 (i) は idealized を表す).

われわれは ELPE の推定エラーを次式

$$\varepsilon_{mn} = \bar{\phi}_{mn} - {}^{(1)}\bar{\phi}_{mn} \quad (29)$$

で定義する. ELPE が正常であるときには, この定義は

前章までのエラーの定義と一致する. さらに,

$$\varepsilon_{mn}^{(2)} = \bar{\phi}_{mn} - {}^{(1)}\bar{\phi}_{mn} \quad (30)$$

で定義されるエラー,  $\varepsilon_{mn}^{(2)}$  を導入する. このとき, ELPE の推定エラーは,

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{mn}^{(1)} + \varepsilon_{mn}^{(2)} \quad (31)$$

と書くことができる.

(31) 式は, ELPE における推定エラーが一般に 2 種類のエラーから構成されることを示している. ELPE が正常な場合には推定エラーは  $\varepsilon_{mn}^{(1)}$  だけである.  $\varepsilon_{mn}^{(1)}$  は, idealized ELPE においてさえ, すなわち全ての  $D_{mn}$  を正しく推定できたとしてもなお残るエラーである. このエラーを不可避エラーと呼ぶのはこのためである. (18) 式から明らかのように  $\varepsilon_{mn}^{(1)}$  は測定ノイズだけから決定される.

ELPE が異常になると  $\varepsilon_{mn}^{(2)}$  が加わる. 前章で議論したように, ELPE が異常な場合に失われる情報は誤って推定される  $D_{mn}$  の分布だけから定まる. その結果,  $\varepsilon_{mn}^{(2)}$  もまたその分布によって完全に決定される. すなわち,  $\varepsilon_{mn}^{(2)}$  は  $D_{mn}$  の推定誤りだけを原因とするエラーである. われわれはこれを異常さによるエラーと呼ぶ.  $\varepsilon_{mn}^{(2)}$  は  $D_{mn}$  の推定を通して測定ノイズに依存する.

$D_{mn}$  の推定が (19) 式によって行われる場合には, 誤って推定される  $D_{mn}$  の分布は測定ノイズだけから決定される. したがってこの場合には,  $\varepsilon_{mn}^{(1)}$  だけでなく  $\varepsilon_{mn}^{(2)}$  もまた測定ノイズだけから決定され, 回復されるべき物体の形状には依存しない. これは, CLPE の特性が  $D_{mn}$  の分布に依存し, その結果物体の形状に依存するのと対照的な事実である.

さてこれまでのところわれわれは, 位相を表す量,  $\bar{\phi}_{mn}, \bar{\phi}_{mn}, \dots$ , に加えることのできる任意の定数を無視してきた. 実際には, 上で定義したエラーはこれらの定数に依存する.  $\varepsilon_{mn}^{(2)}$  が誤って推定される  $D_{mn}$  の分布だけから定まるという事実も, もちろんこれらの定数への依存を別にしての話である. われわれはこれらの定数の上述のエラーへの物理的に意味をもたない影響を極力抑えるために, 位相を表す各量の平均値がゼロとなるように, これらの定数を決定する.

## 4. 計算機シミュレーションによる検討

ELPE が異常な場合の推定エラーの大きさを理論的に求めることは興味ある問題であるが容易ではない. そこで本章では, 推定エラーを計算機シミュレーションによって数値的に求め, 議論する. 幸いにわれわれは,

\*3 第 2 種の困難の状況も  $D_{mn}$  の推定誤りの状況も測定ノイズに依存するので, 両者は無関係ではない. しかしながら, 失われる情報が誤って推定される  $D_{mn}$  の分布によって完全に定まるということは常に言える.

ELPE を文献 4) のアルゴリズム A によって正確にかつ繰返しを用いることなく実行できる。

前章で明らかにしたように、 $D_{mn}$  の推定を (19) 式で行う場合には、ELPE の推定エラーは回復すべき物体の形状には依存しない。したがってここでは Fig. 4 に示す物体を例にとって議論する。画素数は  $128 \times 128$  である ( $N=128$ )。この物体はフーリエ・スペクトルに 484 個の孤立零点をもっている。測定ノイズとして平均値がゼロで標準偏差が  $\sigma_n$  の正規乱数を用いる。

Table 1 に、誤って推定される  $D_{mn}$  の数と  $\sigma_n$  との関係の一例を示す。また、Fig. 5 に  $\sigma_\phi^{(1)}$  と  $\sigma_n$  の関係および  $\sigma_\phi^{(2)}$  と  $\sigma_n$  の関係をグラフで示す。ただし、 $\sigma_\phi^{(1)}$  と  $\sigma_\phi^{(2)}$  はそれぞれ  $\varepsilon_{mn}^{(1)}$  と  $\varepsilon_{mn}^{(2)}$  の rms 値であって、

$$\sigma_\phi^{(j)} = \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (\varepsilon_{mn}^{(j)})^2 \right\}^{1/2} \quad j=1,2 \quad (32)$$

で定義される。この例では  $\sigma_n=0.38$  rad までは全ての  $D_{mn}$  が正しく推定される。 $\sigma_n=0.39$  rad で誤って推定される  $D_{mn}$  が一つ出現する。ELPE は、 $\sigma_n=0.38$  rad と  $\sigma_n=0.39$  rad の間で正常な状態から異常な状態に移移する。正常な状態では  $\sigma_\phi^{(2)}$  はもちろんゼロである。これらの結果は、(i)  $\sigma_\phi^{(1)}$  は  $\sigma_n$  の増大とともに増大する。増大の仕方は連続的である、(ii)  $\sigma_\phi^{(2)}$  は  $\sigma_n$  の増大に対して  $\sigma_\phi^{(1)}$  よりも急速に増大する傾向を示す、しかもその様子は、より複雑である、(iii)  $\sigma_\phi^{(2)}$  は異常

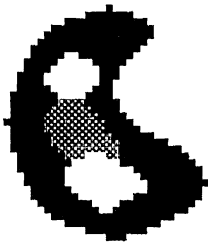


Fig. 4 Original object.

Table 1 Estimation characteristics of  $D_{mn}$ .

$\sigma_n$	The number of $D_{mn}$ incorrectly estimated
0.0	0
0.38	0
0.39	1
0.45	8
0.5	36
0.6	146
0.7	435
0.8	829

領域全般にわたって  $\sigma_\phi^{(1)}$  より格段に大きい、ことを示している。

Fig. 6 は、 $\sigma_\phi^{(2)}$  と  $\sigma_n$  の関係を  $\sigma_n=0.39$  rad から  $\sigma_n=0.45$  rad までの区間について詳細に示したものである。 $D_{mn}$  の推定に (19) 式を用いているので、 $\sigma_\phi^{(1)}$  も  $\sigma_\phi^{(2)}$  も確かに測定ノイズだけで決定はされるが、両者の測定ノイズへの依存の仕方は根本的に異なることを Fig. 6 は示している。すなわち、 $\sigma_\phi^{(1)}$  が  $\sigma_n$  の増大とともに連続的に変化するのに対して、 $\sigma_\phi^{(2)}$  は不連続的

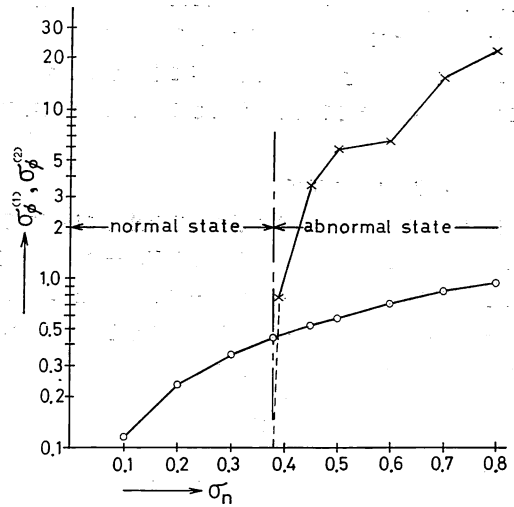


Fig. 5 Relations of  $\sigma_\phi^{(1)}$  versus  $\sigma_n$  and  $\sigma_\phi^{(2)}$  versus  $\sigma_n$ . O and  $\times$  represent  $\sigma_\phi^{(1)}$  and  $\sigma_\phi^{(2)}$  respectively.

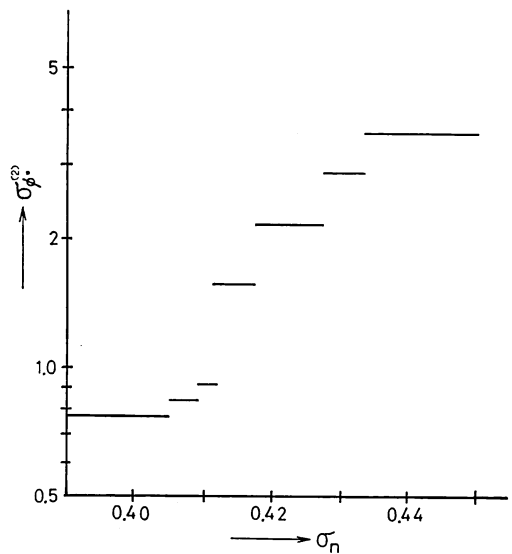


Fig. 6 Details of the relation of  $\sigma_\phi^{(2)}$  versus  $\sigma_n$  for  $0.39 \text{ rad} \leq \sigma_n \leq 0.45 \text{ rad}$ .

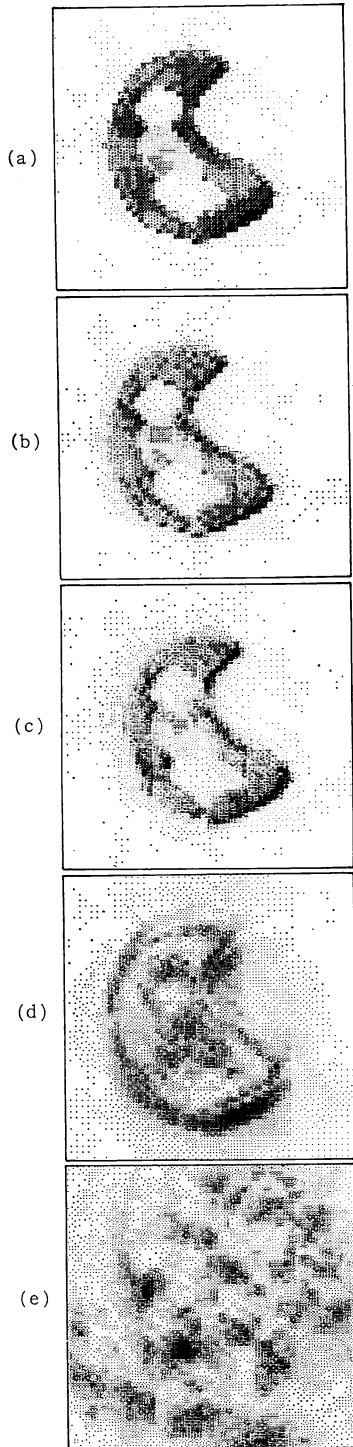


Fig. 7 Images reconstructed by ELPE. (a)  $\sigma_n = 0.38$  rad, (b)  $\sigma_n = 0.39$  rad, (c)  $\sigma_n = 0.45$  rad, (d)  $\sigma_n = 0.5$  rad, (e)  $\sigma_n = 0.8$  rad.

に変化する. しかも不連続点と不連続点の間では,  $\sigma_\phi^{(2)}$  はたとえ  $\sigma_n$  が増大しても全く変化しない.  $\sigma_\phi^{(2)}$  の不連続な変化は誤って推定される  $D_{mn}$  の分布が変化するときだけに起こっている. Fig. 6 は,  $\varepsilon_{mn}^{(2)}$  が  $D_{mn}$  の推定誤りを直接的な原因とするエラーであること, したがってあくまでも  $D_{mn}$  の推定を通して測定ノイズに依存することを如実に示している.

次にわれわれは ELPE における推定エラーが像回復にどの程度の影響を与えるかを検討する. Fig. 7 の (a)~(e) に, 上述の例における推定位相  $\phi_{mn}$  と真の振幅とから回復された像を掲げる.  $\sigma_n = 0.38$  rad と  $\sigma_n = 0.39$  rad とでは不可避エラーはほとんど変わらないので, Fig. 7 の (a) と (b) の違いのほとんどは誤って推定された  $D_{mn}$  が一つ出現したことによるものである. Fig. 7 に示す結果は,  $D_{mn}$  の推定誤りが像回復に与える影響は誤りの個数がたとえ一つでも大きいこと, しかしながら誤りの個数が少ない間は, 像から原物体を識別できることを示している.

## 5. ま と め

測定ノイズが ELPE に与える影響を議論し, 推定エラーの特性を明らかにした. 測定ノイズは ELPE が異常になる原因である. ELPE における推定エラーを定義するため, 常に渦源の指標の正しい値を使って位相を回復できる idealized ELPE の存在を仮定した. 推定エラーは一般に不可避エラーと異常さによるエラーの和である. 前者は idealized ELPE においてさえ存在するエラーであり, 測定ノイズだけから決定される. 後者は渦源の指標の推定誤りだけを原因とするエラーであって, 誤って推定される渦源の指標の分布によって完全に決定される. このため後者は, 渦源の指標の推定を通して測定ノイズに支配され, 測定ノイズの変化に対して不連続的に変化する.

われわれは計算機シミュレーションによって, (1) ELPE が異常なときの推定エラーは, たとえ誤って推定される渦源の指標が一つでも, 不可避エラーよりかなり大きいこと, (2) しかしながら誤って推定される指標の個数が少ない間は ELPE による回復像から原物体を識別できること, を示した. これらの結果は, ELPE にとっては渦源の指標をできるだけ正確に推定することが重要であり, ELPE の改善には指標の推定を改善することが最も効果的であることを示している.

## 文 献

- 1) K. T. Knox: "Image retrieval from astronomical speckle patterns," *J. Opt. Soc. Am.*, **66** (1976) 1236-1239.
- 2) J. W. Hardy, J. E. Lefebvre and C. L. Koliopoulos: "Real-time atmospheric compensation," *J. Opt. Soc. Am.*, **67** (1977) 360-369.
- 3) H. Takajo and T. Takahashi: "Least-squares phase estimation from the phase difference," *J. Opt. Soc. Am. A*, **5** (1988) 416-425.
- 4) H. Takajo and T. Takahashi: "Noniterative method for obtaining the exact solution for the normal equation in least-squares phase estimation from the phase difference," *J. Opt. Soc. Am. A*, **5** (1988) 1818-1827.
- 5) D. L. Fried: "Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements," *J. Opt. Soc. Am.*, **67** (1977) 370-375.
- 6) R. H. Hudgin: "Wave-front reconstruction for compensated imaging," *J. Opt. Soc. Am.*, **67** (1977) 375-378.
- 7) R. J. Noll: "Phase estimates from slope-type wave-front sensors," *J. Opt. Soc. Am.*, **68** (1978) 139-140.
- 8) B. R. Hunt: "Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences," *J. Opt. Soc. Am.*, **69** (1979) 393-399.
- 9) J. Herrmann: "Least-squares wave front errors of minimum norm," *J. Opt. Soc. Am.*, **70** (1980) 28-35.
- 10) W. H. Southwell: "Wave-front estimation from wave-front slope measurements," *J. Opt. Soc. Am.*, **70** (1980) 998-1006.
- 11) K. R. Freischlad and C. L. Koliopoulos: "Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3** (1986) 1852-1861.
- 12) A. Menikoff: "Wave-front reconstruction with a square aperture," *J. Opt. Soc. Am. A*, **6** (1989) 1027-1030.
- 13) M. S. Scivier and M. A. Fiddy: "Phase ambiguities and the zeros of multidimensional band-limited functions," *J. Opt. Soc. Am. A*, **2** (1985) 693-697.