



## 赤外光横ゼーマンレーザーによる複屈折測定

高和 宏行・梅田 倫弘

東京農工大学工学部機械システム工学科 〒184 小金井市中町 2-24-16

(1990年2月7日受付, 1990年4月26日受理)

### Automated Birefringence Measurement Using Infrared Transverse Zeeman Laser

Hiroyuki KOWA and Norihiro UMEDA

Department of Mechanical Systems Engineering, Faculty of Technology, Tokyo University of  
Agriculture and Technology, 2-24-16, Naka-machi, Koganei 184

(Received Feb. 7, 1990; Accepted April 26, 1990)

This paper represents an automated birefringence measurement system using a Zeeman laser. This system allows the simultaneous measurement of relative retardation and azimuth angle of fast axis in an optical sample with a heterodyne technique. Two optical elements were used as samples; one is a calibrated Babinet-Soleil compensator. When its retardation was varied within the range of  $\pm 5$  degrees, measurement values obtained agreed well with the calibrated values. The other is a high Nd-doped laser glass which operates in the wave-length of  $1.06 \mu\text{m}$ . The vector operation for the net birefringence of the tandem samples is also discussed.

#### 1. はじめに

残留歪をもつガラスや透明プラスチックなど、透明体の異方性の状態を調べるには、複屈折量を測定するのが一般的である。従来から定量的に複屈折を測定する方法として、バビネ、バビネ-ソレイユ補償子、セナルモン法などの偏光補償法がある<sup>1)</sup>。しかし、これらの方法は感度が1 nm 程度と低く、また装置の偏光軸と被測定物の複屈折進相軸(遅相軸)とを合わせなければ正確な値を得ることができない。とりわけ内部応力によるガラスの残留歪を測定する場合、リターデーションが小さいためその複屈折の進相軸を決めることは、容易ではない。

最近、複屈折量を精密に測定するために光ヘテロダイン技術を用いたり、光弾性変調素子を用いて偏光状態に時間的な変調を与え、これを電気的に検出する方法が提案されている。たとえば、軸ゼーマンレーザーを用いて四分の一波長板のリターデーションを測定した報告がある<sup>2)</sup>。この方法は、四分の一波長板のような比較的複屈折量の大きな被測定物に有効である。しかし、ガラスの

ように複屈折量の小さなものに対する議論はされていない。光弾性変調素子を用いた例では、比較的小さなオーダーの複屈折量を0.01 nmの分解能で測定できる<sup>3)</sup>、としている。しかし、変調素子の作成精度がシステムの測定精度に大きな影響を与えることから、システムが高価になるきらいがある。また、試料を回転させて進相軸の方位を求めなければならないので、被測定物の大きさに制限がでてくる。

そのため、光ヘテロダイン法として、周波数安定化横ゼーマンレーザー(STZL)を使い、簡単な構成の複屈折量の精密測定システムが開発されている<sup>4-6)</sup>。このシステムは、複屈折量の測定分解能が0.01 nmであるだけでなく、試料を回転させることなく進相軸方位を求められる、というところに特徴がある。しかし、このシステムに使われているSTZLは、可視光の633 nm He-Neレーザーであって、可視光を透過しないガラス、たとえば赤外域透過フィルターや、Ndハイドープレーザーガラスの複屈折測定はできない。

そこでわれわれは、赤外光 STZL (IRSTZL) を試作

し、これを光源としたガラスの複屈折測定システムでの測定精度の検討を行ったので、これらに関する結果を報告する。

## 2. 原 理

**Fig. 1** に、STZL を光源とする複屈折測定システムの光学素子配置図を示す<sup>4-6)</sup>。

STZL から出射する光は、互いに直交する二つの直線偏光成分からなり、その二つの成分の周波数差は数百 kHz である。二つの偏光成分の振動方向をそれぞれ  $x$  方向 (横磁場方向)、 $y$  方向とすると、それぞれの振動成分は次のように表せる。

$$\begin{aligned} E_x &= a_x \cos \omega t \\ E_y &= a_y \cos (\omega t + 2\pi f_b t) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $a_x$ 、 $a_y$  は  $x$  および  $y$  成分の振幅、 $\omega$  は  $x$  成分の光周波数、 $f_b$  は  $x$  と  $y$  成分の周波数差で縦モード内ビートと呼ぶ<sup>8)</sup>。

試料  $X$  の進相軸と  $x$  方向の偏光成分とを合わせると  $y$  方向振動成分の位相は  $\Delta$  だけ遅れる。

$$\begin{aligned} E_x &= a_x \cos \omega t \\ E_y &= a_y \cos (\omega t + 2\pi f_b t + \Delta) \end{aligned} \quad (2)$$

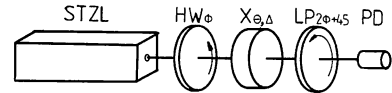
これが、 $x$  方向と  $45^\circ$  に方位を設定した検光子を通過すると、透過光強度  $I$  は次式のようになる。

$$\begin{aligned} I &= |(1/\sqrt{2})E_x + (1/\sqrt{2})E_y|^2 \\ &= (1/2)(E_x + E_y)(E_x^* + E_y^*) \\ &= (1/2)\{|E_x|^2 + |E_y|^2 + E_x E_y^* + E_x^* E_y\} \\ &= (1/2)\{a_x^2 + a_y^2 + 2a_x a_y \cos (2\pi f_b t + \Delta)\} \end{aligned} \quad (3)$$

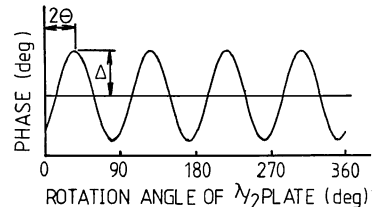
ここで、 $E_x^*$ 、 $E_y^*$  はそれぞれ、 $E_x$ 、 $E_y$  の複素共役を表す<sup>9)</sup>。(3)式は光電検出器 PD に入射する信号が縦モード内ビート  $f_b$  を周波数とするビート信号で、その位相が試料  $X$  のリターデーション  $\Delta$  によって変化することを表している。

この位相を電気位相計で求めれば、試料のリターデーション  $\Delta$  を精度よく測定できる。位相測定をするときの基準信号は、次の2通りの方法で得られる。① STZL からの出射光を、二分の一波長板に入射する前にビームスプリッターで分割し、その一方を用いる。② STZL の周波数安定化のための制御信号に用いているビート信号を用いる。

**Fig. 1** において、二分の一波長板  $HW_\phi$  は偏光方位の変換素子として働く。 $HW_\phi$  の方位を回転させると、透過光の偏光の方位は  $HW_\phi$  の回転  $\phi$  に伴い同方向へ2倍の角度  $2\phi$  で回転する。 $HW_\phi$  の回転角  $\phi$  と検光子の回転角  $2\phi + (\pi/4)$  の関係を保ったまま両素子を回



**Fig. 1** Principle for birefringence measurement by the use of STZL. STZL: stabilized transverse Zeeman laser.  $HW_\phi$ : half-wave plate.  $LP_{2\phi+45}$ : linear polarizer.  $X_{\theta,\Delta}$ : sample. PD: photodiode.



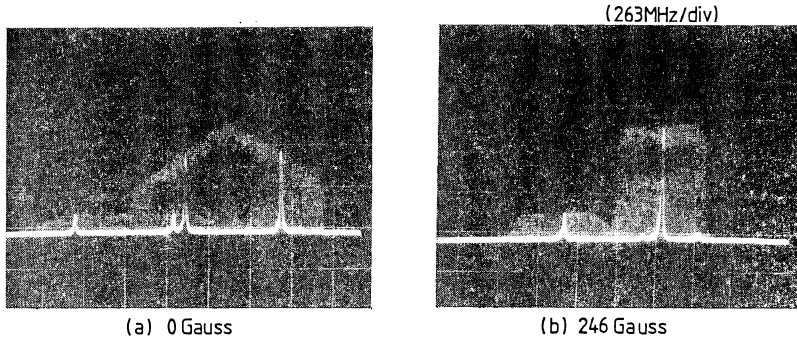
**Fig. 2** Phase change of intramode beat signal as a function of rotation angle of half-wave plate.

転させると、光電検出器で検出される縦モード内ビート信号に影響を与えることなく偏光の方位だけを変化させることができる。被測定試料  $X_{\theta,\Delta}$  を、光路中の  $HW_\phi$  と検光子  $LP_{2\phi+45}$  との間に置き、 $HW_\phi$  と  $LP_{2\phi+45}$  とを同期させながら回転させ、位相差を測定すると検出信号は **Fig. 2** のように変化する。直交する二つの偏光成分のうち一つが試料の進相軸と重なったとき、位相差は最大になる。 $HW_\phi$  が1回転すると偏光方位は2回転するので、このときの位相の変化は4周期成分として現れる。この4周期成分の振幅と余弦成分の初期位相量が、それぞれ試料のリターデーション  $\Delta$ 、進相軸方位の2倍の角  $2\theta$  となる。

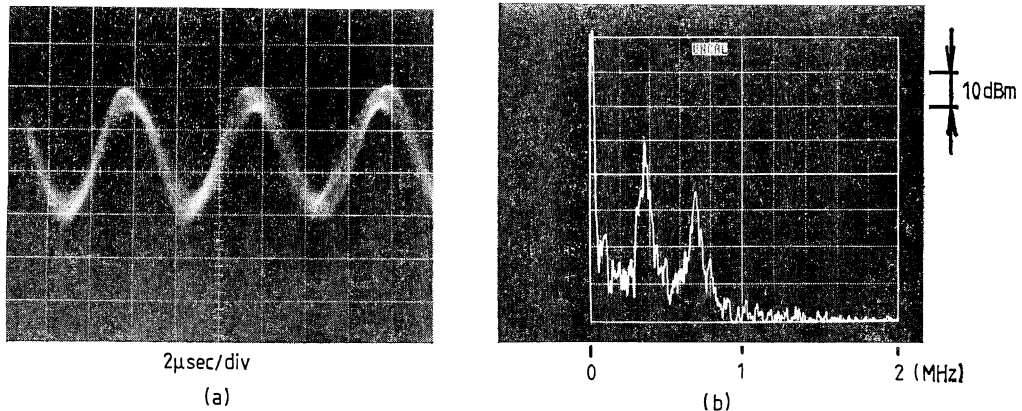
## 3. 実験装置

### 3.1 赤外光 STZL<sup>7)</sup>

今回使用したレーザーは、日本科学エンジニアリング社製 NEO-R 2 型で、共振器長 335 mm、縦モード間隔 448 MHz、横モード TEM<sub>00</sub>、光出力 2 mW のものである。このレーザーは、一般に使われている 632.8 nm のレーザーの形と違い、共振器部とカソード部が分離した形状になっている。レーザー光をファブリペロー型光スペクトルアナライザとストレージオシロスコープを使って観測した結果が **Fig. 3(a)** である。三つの利得形状が観測される。これはレーザーが 1152.3 nm, 1161.4 nm, 1198.5 nm (以下、それぞれ 1152 nm 光, 1161 nm 光, 1198 nm 光とする) の三つの波長を同時に発振しているためである<sup>7)</sup>。発振強度比は、1152 nm 光を1とす



**Fig. 3** Gain profile and axial mode spectra of infrared He-Ne laser tube under no magnetic field (a) and transverse magnetic field (b).

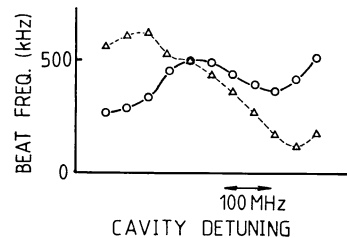


**Fig. 4** Examples of beat waveform (a) and intramode beat spectrum (b) in a characteristic magnetic field.

ると、1161 nm 光が 0.24, 1198 nm 光は 0.05 となっている。

このレーザーに縦モード間隔に等しいゼーマン分離を与える横磁場 (246 Gauss) をかけたときの結果を Fig. 3 (b) に示す。1152 nm 光の利得幅は縦モード間隔とほとんど同じになり、モード強度の変化もなく、全利得域で等強度な単一縦モードとなっていることがわかる。このとき、単一縦モードの中には直交する二つの偏光成分が含まれている<sup>9)</sup>。

次に、方位 45° の検光子を通して Ge-PIN フォトダイオードで縦モード内ビートを観察した。Fig. 4(a) に示すように、いくつかのビート周波数が混在した波形となっている。Fig. 4(b) に高周波スペクトラムアナライザで観察したビートスペクトルの状態を示す。1152 nm 光のビート ( $\approx 0$  dBm) と 1161 nm 光のビート ( $\approx -15$  dBm) が観測できるが、1198 nm 光のビートは検出されなかった。ほかのピークは全て 1152 nm 光か 1162 nm 光によるビートの高調波である。



**Fig. 5** Tuning curve of the intramode beat frequency of infrared He-Ne laser.

縦モードの共振器離調に伴うビート周波数の変化の様子を Fig. 5 に示す。モードは、曲線で結んだ範囲内で単一モード化している。1152 nm 光の縦モード内ビート周波数曲線は、単一縦モード化領域のほぼ中央と端との 2 個所に極値を示す。しかし、二つの極値の間では単調変化する領域があるので、ビート信号による無変調制御を行うことができる。

このレーザー管を使った STZL の構成図を、Fig. 6 に示す。横磁場は、希土類マグネット M (住友金属鉱山

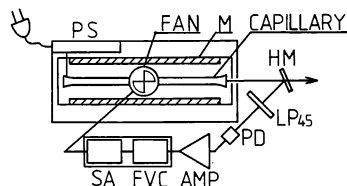


Fig. 6 Schematic diagram for frequency stabilization of infrared transverse Zeeman laser.

製・ウェルマックス, 127×13×7 mm) を用いて, レーザー管に加えられた. 対向して並べて置いた磁石間の磁場の強さは長さ 260 mm において, 246 Gauss±2% である. 希土類マグネットを選んだ理由として, ①加工が簡単で形状を任意に作製できること; ②複数個の磁石を使うとき, 個々の磁力による磁場のばらつきが少ない均一な磁場を作りやすいこと; ③軽量であることがあげられる.

周波数安定化用の信号は, レーザーからの出力光をハーフミラー HM で分離してその一方を使った. この光は, 方位 45° の検光子 LP<sub>45</sub> を通り, 光検出器 PD (Ge-PIN フォトダイオード) に入射する. 光電変換されたビート信号を増幅し, 周波数-電圧変換回路 FVC, サーボアンプ SA を通して, フィードバック信号とする. これをレーザー管長の風冷制御用のファンへ入力し, 周波数安定化を行う.

周波数安定化用の信号としては, 単一周波数を使うのが理想である. ビート信号の高調波, あるいは他波長による別のビート周波数があると, それがノイズとなり安定度を低下させる. Fig. 4 でもわかるように, 本実験で使っている IRSTZL の縦モード内ビートは単一周波数とはなっていない. レーザー光を回折格子を用いて分光し, 一次回折光を取り出して周波数安定化をする方法がある<sup>7)</sup>. しかし, 光量が落ちること, 光学系が複雑になる, などの欠点もある. そのため, 主波長である 1152 nm 光のビート信号と他の信号との強度の差が 15 dB 以上あることから, レーザーの安定化や, 複屈折測定 (位相測定) には大きな影響を与えないと考え, この信号をそのまま用いた.

### 3.2 複屈折測定装置

試作した IRSTZL を用いて, 複屈折測定装置を構成した. Fig. 7 にその実験系を示す. IRSTZL からの出射光は, 方位  $\phi$  の二分の一波長板 HW $_{\phi}$ , 被測定試料 X $_{\theta,\Delta}$ , 方位  $2\phi+(\pi/4)$  の検光子 LP $_{2\phi+45}$  を通り, 光検出器 PD $_{sig}$  に入射する. X $_{\theta,\Delta}$  は, (3)式で示したように, ビート信号の中にリターデーション  $\Delta$  の情報を与える.

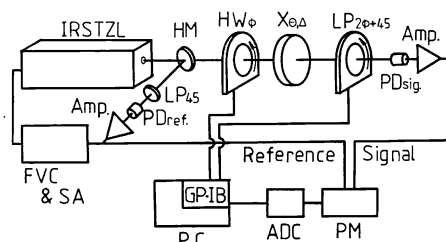


Fig. 7 Schematic diagram of the experimental setup. IRSTZL: stabilized 1152 nm He-Ne transverse Zeeman laser. HM: beam splitter. HW $_{\phi}$ : half-wave plate. LP $_{2\phi+45}$ : linear polarizer. LP $_{45}$ : linear polarizer. X $_{\theta,\Delta}$ : objective sample. PD $_{sig}$ : photodiode. PD $_{ref}$ : photodiode. AMP: amplifier. FVC & SA: frequency to voltage converter and servo amplifier. PM: phase meter. ADC: analog to digital converter. PC: personal computer.

電気位相計 PM (ドラネッツ社: 305 C) は, PD $_{sig}$  で光電変換され, アンプで増幅されたビート信号 (検出信号) と, IRSTZL の安定化制御に用いている信号 (基準信号) との位相差を測定し, 出力する. これをアナログ-デジタル変換器 ADC で AD 変換し, コンピュータに取り込む.

試料の進相軸方位  $\theta$  は, 一般に不明である. これを求めるために, コンピュータは, 二分の一波長板と検光子を同期させて回転させつつ, 逐次位相データを取り込んでゆく. 二分の一波長板を 1 回転 (360°) させると, 試料のもつリターデーションの大きさに比例した振幅をもつ 4 周期成分が現れる. この 4 周期変化する余弦成分から, リターデーションと進相軸方位を求める.

## 4. 結果および考察

### 4.1 最小検出限界

装置の最小検出限界を求めるために, 測定試料のない状態で実験した. この状態では, 理論的にリターデーションはゼロになるが, 測定系のノイズによりわずかに有限値を示す. そこで, このようにして計った値を, 最小検出限界とした.

実験結果を Fig. 8 に示す. グラフの横軸は, レーザーの周波数を安定化し始めたときの時刻を 0 時としたときからの経過時間を表している. 光学系のアライメント終了直後 (0 h 15 min) では, 0.01 deg であったリターデーションは, 時間とともにしだいに増加し 3 時間経過の後一定した値をとり続けた. この変化の原因は次の点があげられる.

- ① レーザー管の熱ドリフト: 共振器長を風冷制御し

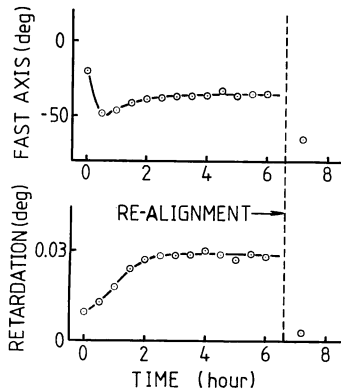


Fig. 8 Minimum detectable birefringence vs. time.

しているため、レーザーキャピラリーに、気流による温度分布が生じ、キャピラリーは変形する。このため光軸がわずかに偏向し、測定系のアライメントにずれが生じる。この効果はIRSTZLのキャピラリーが一般の同軸型のタイプよりも細いので、より影響を受けやすい、と考えられる。

- ② 偏光素子の熱ドリフト：二分の一波長板と検光子は、ステッピングモーターで回転するステージに取り付けられている。モーターが駆動するとき生じる熱が回転ステージを通して素子に伝わり、熱ドリフトを与える。

光学系の再アライメントを行うとリターデーション $\Delta$ が小さくなることから、①の影響がより大きいと考えられる。

6時間経過した後、光学系の再アライメントを行うと、 $\Delta$ は0.003 deg になった。各時刻における測定値のばらつきは、おおむね0.005 deg 以下である。これから光学系の光軸を正確に合わせることによって、最小検出限界を、0.005 deg にすることができることがわかった。

#### 4.2 バビネ-ソレイユ補償子 (BSC) の測定

バビネ-ソレイユ補償子は、水晶クサビを組み込んだ補正器である。Fig. 9 に示すように3枚のクサビを組み合わせ、視野内全面に一樣なリターデーションを与える仕組みになっている。クサビBとB'の結晶軸は同方向(紙面に垂直)、これに対してAはBB'と直交した向き(紙面に平行)になっている。クサビB'はマイクロメータで矢印方向に動かせるようになっており、マイクロメータの動きに対しリターデーションが一次関数で変化する。そこで、本測定系の精度を検討するため、移動

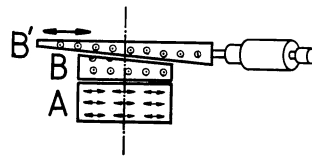


Fig. 9 Schematic diagram of Babinet-Soleil compensator.

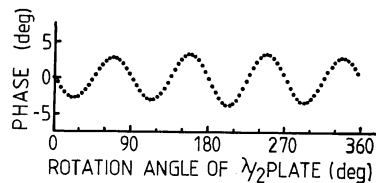


Fig. 10 Plots of phase data for the BSC used as a sample.

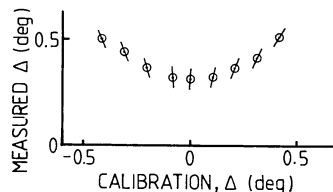
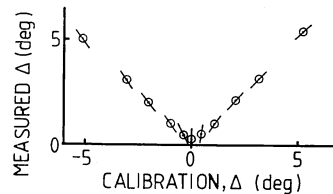


Fig. 11 Plots of experimental retardation value and orientation of fast axis by changing retardation of BSC.

クサビの移動量に対するリターデーションの変化を測定した。

BSCのリターデーションを $\pm 5$  degの範囲で変化させ、そのときのマイクロメータの移動量から算出する値(理想値)と実際に測定した値とを比較してみた。ここで、符号+と-は進相軸が互いに直交していることを表す。Fig. 10に、このとき得られた $HW_{\phi}$ 1回転に対する位相計出力の変化の一例を示す。この測定では、 $HW_{\phi}$ を4度ピッチで回転させながら90点のデータを取り込んだ。このデータをDFT解析した結果、振幅=リターデーションは3.195 (deg); 初期位相=進相軸方位は44.31 (deg)と求まった。

マイクロメータを順に変化させたときの、測定値をFig. 11に示す。図中、リターデーションを表す○印に

ついている線分は進相軸方位を表している。ここで、方位  $0^\circ$  は IRSTZL にかける横磁場に平行な方向である。リターデーションの絶対値で  $1 \text{ deg}$  より大きい範囲では、ほぼ一次関数的に変化しているが、それよりも値が小さくなるにしたがって直線上からはずれている。リターデーションが  $\pm 1 \sim \pm 5 \text{ deg}$  では、実測値はマイクロメータの読みから計算で求める〈理想値〉に対して  $\pm 0.15 \text{ deg}$  の範囲内にある。このばらつきは、BSC 素子の入射位置におけるリターデーションの不均一によるものと考えられる。というのも、マイクロメータを一定に保ち、光線の入射する位置を変えるとリターデーションが変化するからである。

リターデーションが  $\pm 1 \text{ deg}$  以下の範囲で、実測値が直線関係からはずれるのは、BSC の各水晶クサビの主軸が理想状態からはずれていることが原因であると考えられる。

#### 4.3 2枚のガラスの合成複屈折量の測定

レンズなどの非平面試料、または非研磨面試料の複屈折量を測定する場合、一般に液浸法が用いられる。液浸法は、測定試料と同じ屈折率をもつオイルの入ったセルの中に試料を浸して計測する方法である。この方法を用いたとき検出される複屈折量は、試料の複屈折量とセルの複屈折量との合計値であるため、試料の複屈折量を正確に求めるためには両者を分離させなければならない。そこで、複屈折量をベクトルとして考え、二つの試料の複屈折量を合成、分離することを試みた。ここで、複屈折量  $\Delta$  をベクトルの大きさ、進相軸方位  $\theta$  をベクトルの方向と定義する。

ポアンカレ球上の任意の微小領域では、球面を近似的に平面として考えることができるので、複屈折量の合

成、分離はベクトルの加、減算で簡単に求めることができる。ベクトル演算が、複屈折の合成に適用できることについてミューラ行列を用いて検討した。詳細は、付録に示す。

複屈折のベクトル合成の有意性を、実験的に確かめた。Fig. 7 に示した試料  $X_{\theta, \Delta}$  の位置に、リターデーションをもったガラス試料を1個、または2個重ねてセットする。ここでガラス試料をそれぞれA、Bとする。試料1個ずつを別々に測定し、それをベクトル加算した値と、2個を重ねて並べ一度に測定したときの値とを求め、両者を比較する。試料は、大きさが  $30 \times 20 \times 10 \text{ mm}$  のNd ハイドロプガラス (ドープ量 8%) で、 $30 \times 20$  の2面を研磨加工してある。このガラスレーザーの発振波長は、 $1060 \text{ nm}$  であることから、複屈折を測定する波長を発振波長に近くすることで、複屈折の波長依存性による誤差を小さくすることができる。結果を **Table 1** に示す。ここで、A+B 値は付録に示した(A-1)式から(A-4)式に従って複屈折量のベクトル合成を行った結果である。

実験は、互いの位置関係を変えながら3回行った。試料Aの、測定 No. 1 と 2、および試料Bの測定 No. 2 と 3は、同一個所を測定している。試料A No. 3 と試料B No. 1 は、試料の測定位置を変えている。

ベクトル計算で求めた値と、2個重ねて実測した値との差は、リターデーションが  $\pm 0.02 \text{ deg}$ 、進相軸方位は  $0.3 \text{ deg}$  以内となっている。リターデーション値の再現性は、 $0.01 \text{ deg}$  であることが確認できているが、進相軸方位は、それよりも1桁大きくなっている。この原因は、二分の一波長板、および検光子を回転させるステージの送りの乱れが考えられる。また、二分の一波長板が

**Table 1** Comparison of experimental values with the calculated values of two samples.

		A (deg)	B (deg)	① A+B (deg)	② AB (deg)	①-② (deg)
1	$\Delta$	0.374	0.972	0.935	0.953	-0.018
	$\phi$	5.32	58.34	47.46	47.28	0.17
2	$\Delta$	0.374	0.777	1.107	1.106	0.001
	$\phi$	5.32	-11.62	-6.19	-6.17	0.12
3	$\Delta$	0.367	0.777	1.107	1.088	0.019
	$\phi$	4.00	-11.62	-6.67	-6.36	0.31

A, B: experimental value of sample A and B, respectively. ① A+B: a calculated value using A and B by vector addition. ② AB: a compound experimental value of A and B. ①-②: the difference between ① A+B and ② AB.  $\Delta$ : the retardation.  $\phi$ : the orientation of fast axis.

完全な平行平面ではなく、わずかながらクサビ状になっているところに起因する光軸の偏向が、進相軸の検出精度に影響を与えていることも考えられる。

## 5. ま と め

微少な複屈折量を定量的に測定するために、発振波長1152.2 nm の STZL を試作し、これを光源とする複屈折測定システムを試作した。赤外光 He-Ne レーザーは複数の発振波長をもっていて、これを STZL としたときの縦モード内ビートには複数のビート成分が混在する。しかし、主波長以外のビート成分による影響を無視できるものと考え、レーザーの安定化、および複屈折測定システムの試作を行った。

試作した複屈折測定システムの最小検出限界を、測定試料の無い状態で求めた。その結果、光学素子の光軸を正確に合わせることで、最小検出限界を、0.005 deg に出来ることがわかった。このときの、測定値の再現性は、約 0.005 deg であった。

BSC を被検物とし、リターデーションに変化を与え位相測定を行った。リターデーションが  $\pm 1 \sim \pm 5$  deg では、実測値とマイクロメータの読みから算出する値とは、ほぼ比例関係にあることがわかった。しかし、リターデーションが  $\pm 1$  deg 以下の範囲では比例関係が得られなかったが、これは BSC のそれぞれの素子の進相軸方位がわずかにずれているためと考えられる。

ポアンカレ球上の微小領域では、複屈折をベクトルとして考えることができる。複屈折のベクトル合成の有意性を確認するために、2個の試料(Nd ハイドープガラス)のリターデーションを別々に測定し、ベクトル合成した値と、2個を一度に実測した値とを比較した。その結果両者の差は、リターデーションが  $\pm 0.02$  deg、進相軸方位が  $\pm 0.15$  deg であることがわかった。

## 文 献

- 岸井 貢：“歪検査器の利用技術”，New Glass Technol., 2 (1982) 44-56.
- L. Yao, Z. Zhiyao and W. Runwen: "Optical heterodyne measurement of the phase retardation of aquarter-wave plate," Opt. Lett., 13 (1988) 553-555.
- 持田悦宏：“位相変調法による複屈折測定と応用”，光技術コンタクト, 27 (1989) 127-134.
- 角口文敏, 田村恵祐, 梅田倫弘, 高和宏行: 第35回応用物理学関係連合講演会, 28p-ZF-6 (1988).
- N. Umeda, K. Tamura and T. Kadoguchi: "Measurement of residual birefringence in the glass laser disk," Laser and Electro-Optics Society Annual Meeting (1988).
- 梅田倫弘, 高和宏行: "周波数安定化横ゼーマンレーザーによる複屈折測定", 電子情報通信学会論文誌, C-I (1990) (投稿中).
- 梅田倫弘, 高橋秀俊: "周波数安定化レーザーの高出力化と赤外多波長化", 静岡大学電子工学研究所研究報告, 20 (1985) 69-79.
- 梅田倫弘, 築地光雄, 高崎 弘: "横磁場印加により単一縦モード化したレーザー光の特性", 応用物理, 47 (1978) 1053-1057.
- 高崎 弘: "偏光の表示", 結晶光学, 応用物理学学会光学懇話会編 (森北出版, 東京, 1975) pp. 102-163.
- 梅田倫弘, 築地光雄, 桂 卓史, 高崎 弘: "横ゼーマンレーザーの安定化制御", 光学, 8 (1979) 279-284.

## 付録 複屈折量のベクトル演算の証明

複屈折量の小さな範囲で、複数の位相子の合成値が、ベクトル演算により簡単に求められることを証明する。複屈折量  $\Delta$  をベクトルの大きさ、進相軸方位  $\theta$  をベクトルの方向と定義し、複屈折ベクトルと呼ぶことにする。

いま、二つの位相子 A, B のもつ複屈折量と進相軸方位をそれぞれ  $\Delta_A, \theta_A, \Delta_B, \theta_B$  とする。ここで、偏光の性質により、ベクトル計算で用いる進相軸方位は、実測値を2倍した値を用いることに注意する。二つのベクトルのはさむ角度を

$$\theta_C = 2\theta_A - 2\theta_B \quad (\text{A-1})$$

として、合成後の複屈折量  $\Delta_{A+B}$  と進相軸方位  $\theta_{A+B}$  を求める。

光軸に垂直な平面内に  $x-y$  直交座標をとり、IRS TZL に横磁場を与える方位を  $x$  軸に定める。A, B の複屈折ベクトルの  $x$  成分,  $y$  成分はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{Ax} &= \Delta_A \cos(2\theta_A) \\ \Delta_{Ay} &= \Delta_A \sin(2\theta_A) \\ \Delta_{Bx} &= \Delta_B \cos(2\theta_B) \\ \Delta_{By} &= \Delta_B \sin(2\theta_B) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-2})$$

二つのベクトルを加算すると合成複屈折ベクトルは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{(A+B)x} &= \Delta_A \cos(2\theta_A) + \Delta_B \cos(2\theta_B) \\ \Delta_{(A+B)y} &= \Delta_A \sin(2\theta_A) + \Delta_B \sin(2\theta_B) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{A+B} &= (\Delta_{(A+B)x}^2 + \Delta_{(A+B)y}^2)^{1/2} \\ &= (\Delta_A^2 + \Delta_B^2 + 2\Delta_A\Delta_B \cos \theta_C)^{1/2} \\ \sin 2\theta_{A+B} &= \Delta_B \sin 2\theta_C / \Delta_{A+B} \\ \cos 2\theta_{A+B} &= (\Delta_A + \Delta_B \cos 2\theta_C) / \Delta_{A+B} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-4})$$

複屈折性をもつ試料は直線位相子であるから、これを表すミューラ行列は次のようになる。

$$R_{\Delta, \theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - (1 - \cos \Delta) \sin^2 2\theta & (1 - \cos \Delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin \Delta \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \Delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & 1 - (1 - \cos \Delta) \cos^2 2\theta & \sin \Delta \cos 2\theta \\ 0 & \sin \Delta \sin 2\theta & -\sin \Delta \cos 2\theta & \cos \Delta \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

(A-4)式を(A-5)式に代入し、 $\Delta_{A+B} \ll 1$  として整理するとAとBの合成後のミューラ行列は次のようになる。

$$R_{\Delta_{A+B}, \theta_{A+B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - (1 - \cos \Delta_{A+B}) \sin 2\theta_{A+B} & (1 - \cos \Delta_{A+B}) \sin 2\theta_{A+B} \cos 2\theta_{A+B} & -\sin \Delta_{A+B} \sin 2\theta_{A+B} \\ 0 & (1 - \cos \Delta_{A+B}) \sin 2\theta_{A+B} \cos 2\theta_{A+B} & 1 - (1 - \cos \Delta_{A+B}) \cos^2 2\theta_{A+B} & \sin \Delta_{A+B} \cos 2\theta_{A+B} \\ 0 & \sin \Delta_{A+B} \sin 2\theta_{A+B} & -\sin \Delta_{A+B} \cos 2\theta_{A+B} & \cos \Delta_{A+B} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_B \sin 2\theta_C \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_A + \Delta_B \cos 2\theta_C \\ 0 & \Delta_B \sin 2\theta_C & -\Delta_A - \Delta_B \cos 2\theta_C & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

次に、二つの直線位相子を表すミューラ行列の合成について考える。(A-5)式において  $\Delta \ll 1$  なる範囲を考え、 $\Delta_A \cdot \Delta_B \doteq 0$ ,  $\theta_C = \theta_A - \theta_B$  とすると、

$$R_{\Delta_{A+B}, \theta_{A+B}} = R_{\Delta_A, \theta_A} \cdot R_{\Delta_B, \theta_B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_A \sin 2\theta_A \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_A \cos 2\theta_A \\ 0 & \Delta_A \sin 2\theta_A & -\Delta_A \cos 2\theta_A & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_B \sin 2\theta_B \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_B \cos 2\theta_B \\ 0 & \Delta_B \sin 2\theta_B & -\Delta_B \cos 2\theta_B & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_B \sin 2\theta_C \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_A + \Delta_B \cos 2\theta_C \\ 0 & \Delta_B \sin 2\theta_C & -\Delta_A - \Delta_B \cos 2\theta_C & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-7})$$

となる。(A-6)式と(A-7)式は等しくなっているので、複屈折量のベクトル演算が成り立つことがわかる。