

解説

電場と磁場が平行となる電磁波

上原 喜代治

慶応大学理工学部物理学科 〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1

(1991年2月4日受理)

Electromagnetic Waves with Parallel Electric and Magnetic Fields

Kiyoji UEHARA

Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Keio University,
3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223

1. はじめに

真空中で時間と共に変化する電磁場すなわち電磁波では、電場と磁場の向きの間にはどのような関係があるだろうか。あらゆる位置で、常に電場 E と磁場 H が垂直となる平面波が存在することはよく知られたとおりである。直線偏波に限らず、円偏波や楕円偏波でもそのような波が存在する。しかし、それらに任意の様な静場を重ね合わせてできる電磁場もまた存在する波であるから、 $E \perp H$ とならない電磁波があることも明らかである。では、あらゆる位置で、常に E と H が平行となる電磁波は存在するだろうか。

1982年に、Chu と Ohkawa はそのような電磁波の例を示し¹⁾、その後の一連の議論の引き金となった²⁻⁸⁾。 $E \parallel H$ ならばポインティングベクトルはゼロとなるから、正味のエネルギーの流れを伴うような進行波では $E \parallel H$ とはなりえない。そこで、対向して進む等振幅の二つの平面波の重ね合わせがまず考えられる。周波数が等しいとき、合成してできた波は定在波となるが、もとの波が直線偏波のときは、ポインティングベクトルは時間平均ではゼロになるものの、各瞬間には必ずしもゼロではない。しかし、もとの波がともに円偏波ならば、合成波では常に $E \parallel H$ となることが証明できる。Chu と Ohkawa の最初の論文¹⁾ と、その後 Zaghoul らとの議論^{7,8)} で示された二つの解はそのような波であった。

このように電場と磁場が平行となる波の存在は、実は

それ以前にも知られており、一部の教科書には記されている⁹⁾。また、レーザー共振器の特殊なモードとしても、既に議論されていた¹⁰⁻¹²⁾。

霜田、川合、上原は最近、 $E \parallel H$ となる電磁波の新しい解を求めることに取り組み、まず、一様な横波平面波の一般解を得た¹⁴⁾。Zaghoul と Buckmaster もほぼ同じところ同等の解を求めた¹⁵⁾。上原らは続いて、横波平面波に限らない、より一般的な解を得ることができた¹⁶⁾。

本稿では、まず、一様な横波平面波とそれ以外の場合に分けて解法を示し、それぞれの解のいくつかの具体例を与える。そのあと、このような電磁波の性質や応用について簡単に述べる。

2. 一様な横波平面波の解

真空中のマクスウェルの方程式は、自然単位系 ($\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$) を用いると、

$$\dot{E} = \text{rot } H \quad (1)$$

$$\dot{H} = -\text{rot } E \quad (2)$$

$$\text{div } E = 0 \quad (3)$$

$$\text{div } H = 0 \quad (4)$$

と書かれる。また、 $E \parallel H$ の条件は、 E または H がゼロになる場合を含めると、

$$E \times H = 0 \quad (5)$$

と同等である。式(1)~(5)をみだし、時間 t に依存する解を求めることが、いま考えている問題である。

まず、この章では一様な横波平面波を扱う。この場

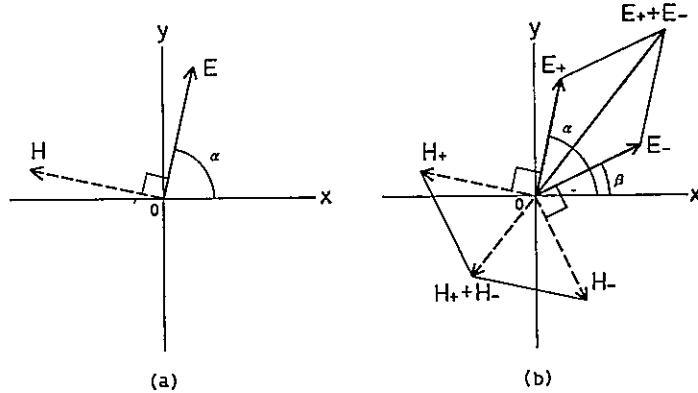


図1 (a) +z 方向に伝搬する横波平面波の電場 E と磁場 H . (b) +z 方向および -z 方向に伝搬する等振幅の二つの波の合成.

合の一般解は, Zaghoul と Buckmaster¹⁵⁾ および霜田ら¹⁴⁾が独立に, いずれも解析的な方法で求めた. ここでは, 通常の $E \perp H$ である波から出発して, 直観的な方法によって $E \parallel H$ となる解を求めてみよう.

E と H が x 成分をもたず, $|E| = |H|$ (通常の単位系では $\sqrt{\epsilon_0}|E| = \sqrt{\mu_0}|H|$) で図1(a)のように, +z 方向から見て H が E より 90° 左向きにあるとき,

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A \cos \alpha, & E_y &= A \sin \alpha \\ H_x &= -A \sin \alpha, & H_y &= A \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

と書けるが, この場がマクスウェルの方程式をみただけでは, 振幅 A と回転角 α は, それぞれ $z-t$ の関数であれば任意でよい. すなわち, これは +z 方向に伝搬する波を与えるが, E と H が等振幅で, 相対角度が図1(a)のようになっていれば, どんな波形の波も存在しうることを示している (これに任意の様な静場を重ね合わせた場もやはり解であるので, $E \perp H$ でない解もある). 同様に, -z 方向に伝わる波の一つの解として, $z+t$ の任意関数 B と β で表される

$$\left. \begin{aligned} E_x &= B \cos \beta, & E_y &= B \sin \beta \\ H_x &= B \sin \beta, & H_y &= -B \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を得るが, +z 方向から見ると, こゝでは当然ながら H は E より 90° 右向きにある.

さて, +z 方向と -z 方向に伝わるこのような波をそれぞれ E_+, H_+ と E_-, H_- で表し, それを合成してみよう. 図1(b)のように, もし, $|E_+| = |E_-|$ ($|H_+| = |H_-|$) ならば, E_++E_- と H_++H_- は平行 (反平行を含む) になることは明らかである. そして, 二つの波は向き合って進んでいるので, z や t によらず $|E_+| = |E_-|$ の関係が保たれるには, $|E_+| = |E_-| = \text{一定}$ であることが要求される. その結果, $E \parallel H$ となる波の解と

して

$$E_x = A(\cos \alpha + \cos \beta) = 2A \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (8)$$

$$E_y = A(\sin \alpha + \sin \beta) = 2A \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (9)$$

$$H_x = A(-\sin \alpha + \sin \beta) = -2A \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (10)$$

$$H_y = A(\cos \alpha - \cos \beta) = -2A \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (11)$$

を得る. ここで, α, β はそれぞれ $z-t$ と $z+t$ の任意関数, A は定数である. これは, 文献 14) と 15) の結果と一致する.

3. 一様な横波平面波の解の例

一様な横波平面波の一般解を与える式(8)~(11)中の関数 α と β の任意性のため, 具体的な解の種類は無数である. ここでは, α と β として比較的簡単ないくつかの関数を与え, 対応する解を示す. わかりやすいように, 通常の単位系に戻し, $z+t$ と $z-t$ をそれぞれ $z+ct$ と $z-ct$ に置きかえる. また, $A=1/2$ とする.

例1 $\alpha = -k(z-ct), \beta = k(z+ct)$

これは, もとの二つの波が, 同方向に回転する, 等周波数の円偏波の場合である. このときの解は

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \cos kz \cdot \cos \omega t \\ E_y &= \cos kz \cdot \sin \omega t \\ H_x &= \sin kz \cdot \cos \omega t \\ H_y &= \sin kz \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる. ここで, $\omega = kc$ である. $E_y/E_x (= H_y/H_x) = \tan \omega t$ となるので, 図2のように, 各ベクトルの向きは

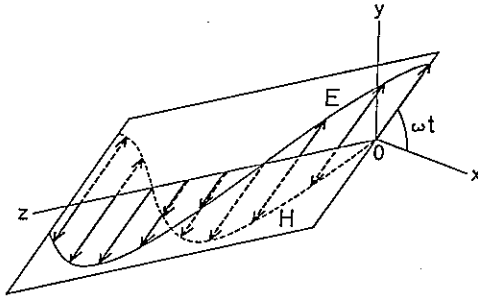


図2 式(12)で表される波の電場 E (実線) と磁場 H (破線)

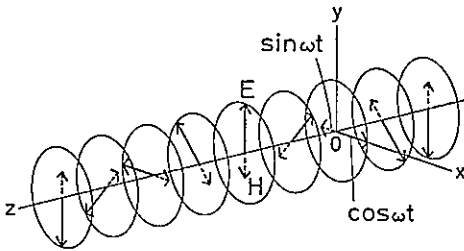


図3 式(13)で表される「振れモード」の E (実線) と H (破線) の分布

角周波数 ω で回転し、同時刻では z によらず一定である。 E と H の振幅は、符号も入れるとそれぞれ $\cos kz$, $\sin kz$ で変化する。

例2 $\alpha = k(x-ct)$, $\beta = k(x+ct)$

これは、二つの波が互いに反対方向に回転する、等周波数の円偏波の場合である。解は

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \cos \omega t \cdot \cos kz \\ E_y &= \cos \omega t \cdot \sin kz \\ H_x &= \sin \omega t \cdot \cos kz \\ H_y &= \sin \omega t \cdot \sin kz \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる。この解を図3に示す。 $E_y/E_x = \tan kz$ なので、ベクトルの振動する方向は各位置で決まっており、 z 方向に沿って周期的に回転する。あらゆる位置で E は同位相で振動し、 H は E より 90° 遅れる。後に述べるように、このような波を共振器の中で作ることができ、「振れモード」とよばれている¹⁰⁾。

例3 $\alpha = 2k_1(x-ct)$, $\beta = 2k_2(x+ct)$

もとの二つの波が、異なる周波数をもつ円偏波の場合である。このときの解は

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \cos(\Delta kz + \omega t) \cdot \cos(kz + \Delta \omega t) \\ E_y &= \cos(\Delta kz + \omega t) \cdot \sin(kz + \Delta \omega t) \\ H_x &= \sin(\Delta kz + \omega t) \cdot \cos(kz + \Delta \omega t) \\ H_y &= \sin(\Delta kz + \omega t) \cdot \sin(kz + \Delta \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

となる。ここで $k = \omega/c = k_1 + k_2$, $\Delta k = \Delta\omega/c = k_2 - k_1$ で

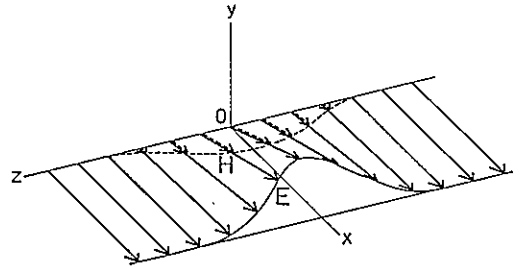


図4 式(16)で表される波の、 $t=0$ での E (実線) と H (破線) の分布。パルス波形は $-z$ 方向に伝わる。

ある。この解では、一般にはベクトルの向きも大きさも z と t 両方の関数であり、図示するにはやや複雑すぎる。

例4 $\alpha = 0$, $\beta = k(z+ct)$

これは、例3で $k_1 = 0$ と置いた特別の場合である。すなわち、一つの円偏波と1組の静場の重ね合わせとなる。解は

$$\left. \begin{aligned} 2E_x &= 1 + \cos(kz + \omega t) \\ 2E_y &= 2H_x = \sin(kz + \omega t) \\ 2H_y &= 1 - \cos(kz + \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

である。

例5 $\alpha = 0$, $\beta = \xi \exp[-(kz + \omega t)^2]$

これは、パルス波と静場の組み合わせである。パルス波の振幅は一定で、定点で見ていると、回転角 β がゼロから徐々に変化し、最大値 ξ をとったあと再びゼロに戻る。解は

$$\left. \begin{aligned} 2E_x &= 1 + \cos[\xi \exp\{-(kz + \omega t)^2\}] \\ 2E_y &= 2H_x = \sin[\xi \exp\{-(kz + \omega t)^2\}] \\ 2H_y &= 1 - \cos[\xi \exp\{-(kz + \omega t)^2\}] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

となる。 ξ が小さい場合の、 $t=0$ での場の分布を図4に示す。 $z \rightarrow \pm\infty$ では静磁場とパルス波の磁場は相殺して静電場だけが残る。 ξ が小さいときは、 E は xz 面から一度だけ起き上がるが、 ξ が大きくなると、 xz 面の上下に何度も振動する。

4. 一般的な解法

互いに平行する二つのベクトル E と H は、位置 r と時間 t のスカラー関数 $f(r, t)$ とベクトル関数 $v(r, t)$ を使って

$$E = v(r, t) \cos f(r, t) \quad (17)$$

$$H = v(r, t) \sin f(r, t) \quad (18)$$

と表すことができる。式(17)と(18)をマクスウェルの方程式の第1式と第2式に代入し、恒等式 $\text{rot}(av) = a \text{rot} v$

$-\mathbf{v} \times \text{grad } a$ を使うと,

$$\mathbf{f} \mathbf{v} = -\text{rot } \mathbf{v} \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{v} \times \text{grad } f \quad (20)$$

を得る。また、式(17)と(18)をマクスウェルの方程式の第3式と第4式に代入し、 $\text{div}(a\mathbf{v}) = a \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } a$ を用いると

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (21)$$

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad } f = 0 \quad (22)$$

を得る。逆に、式(19)~(22)からマクスウェルの方程式を導くことができるので、この四つの式は f と \mathbf{v} で表したマクスウェルの方程式である。

したがって、式(19)~(22)を解くことがここでの課題である。しかし、一般解はいまのところ得られていない、そこで、 \mathbf{v} が t だけの関数である場合と、反対に r だけの関数である場合をまず扱い、そのあと t と r 両方の関数である一般の場合について考える。

4.1 $\partial v/\partial x = \partial v/\partial y = \partial v/\partial z = 0$ の場合

この場合、まず式(21)は無条件に満たされる。また、式(19)の右辺はゼロとなるので、 $\mathbf{f} = 0$ 、すなわち f は r だけの関数である。そうすると、残る二つの式(20)と(22)から $\text{grad } f$ は一定で、 \mathbf{v} は $\text{grad } f$ に垂直な平面内で等速回転をしなければならない。したがって、この場合の解は

$$f = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + C \quad (23)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = A[\mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{k}t + C') + \mathbf{e}_2 \sin(\mathbf{k}t + C')] \quad (24)$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{k} は任意の定ベクトルで、その大きさを k と表す。また、 \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 は $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{k}/k$ をみたす任意の単位ベクトルである。 $k=0$ は静場を与えるので除外する。

この解は、 \mathbf{k} を z 方向にとり、 $k = \omega$ とおくと、図2で示した解に一致する。

4.2 $\dot{\mathbf{v}} = 0$ の場合

この場合は、式(20)と(22)より $\text{grad } f = 0$ 、すなわち f は t のみの関数である。また、式(19)より \mathbf{f} は t に依存しない。したがって f は

$$f = kt + C \quad (25)$$

と書かれる。そうすると、式(20)は

$$\mathbf{k} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (26)$$

となる。式(26)と残るもう一つの式(21)が $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ に対する条件であるが、恒等式 $\text{div rot} = 0$ を使うと、式(26)の解は自動的に式(21)をみたすことがわかる。したがって、式(26)だけを解けばよいことになる。

そこで、式(26)の両辺の rot をとってみると、 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ に対するヘルムホルツ方程式

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \quad (27)$$

を得る。式(27)の解 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ は必ずしも式(26)の解ではないが、もし同時に

$$\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (28)$$

をみたすならば、

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) - (1/k)\text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (29)$$

によって作られる $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は式(26)の解であることが容易に証明できる¹⁾。したがって、問題は式(27)と(28)をみたす $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ を見いだすことに帰着する。

では、その $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ はどのようにして見つけれられるだろうか。それには次の方法がある。角周波数 k で正弦振動する任意の電磁波の $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ は $(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = 0$ 、 $\text{div } \mathbf{E} = 0$ 、 $(\nabla^2 + k^2)\mathbf{H} = 0$ 、 $\text{div } \mathbf{H} = 0$ をみたすことはわかっている。いま求めている \mathbf{u} は r だけの関数であるから、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ や $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ で t を定数で置きかえてそれを $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ とすればよい。すなわち、既知の任意の正弦電磁波の $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ または $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ をもとにして、式(26)の二つの解として

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, C') - (1/k)\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, C') \quad (30)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, C') - (1/k)\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, C') \quad (31)$$

を得る。これらは式(1)と(2)を使って

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, C') + (1/k)\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, C') \quad (32)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, C') - (1/k)\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, C') \quad (33)$$

とも書ける。

試みに、既知の正弦電磁波として、最も単純な直線偏光した進行波

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A \cos(kz - kt) \\ H_y &= A \cos(kz - kt) \\ E_y = E_z = H_x = H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

をとってみよう。式(34)の t を定数で置き換えて、式(30)または(32)に代入すると

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = A[\mathbf{e}_x \cos(kz + C') + \mathbf{e}_y \sin(kz + C')] \quad (35)$$

を得る。これと式(25)によって、解

$$\mathbf{E} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cos(kt + C)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \sin(kt + C)$$

を得る。これは、既に図3に示された「振れモード」の解である。

既知の正弦電磁波をもとにして $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ となる解を求める別の具体例は次章にゆずり、ここで、ある解から新しい解を作る方法を考えよう。

式(26)に戻って考えると、新しい解を作る三つの方法が見いだされる。まず、多変数の微分では、微分の順序は任意に入れ替えられるので、ある解を x, y, z に関して任意に微分して得られる関数もまた解である。次

に, v_1, v_2, \dots が解であり共通の k をもつならば, 任意の重み W_i をつけたそれらの和

$$v = \sum_i W_i v_i \quad (35)$$

も解であることは明らかである. さらに, 解 v がある連続変数 τ をパラメーターとして含むとき, それを $v(r, \tau)$ と書くと, 任意の重み関数 $W(\tau)$ に対して, 積分

$$v = \int W(\tau) v(r, \tau) d\tau \quad (36)$$

も解である.

4.3 v が r と t の関数である場合

この場合の一般解はまだ見つけられていない. しかし, 2章で求めた横波平面波の一般解(式(8)~(11))はこの場合に属する. この解は f と v を用いると

$$f = (\alpha - \beta)/2 \quad (37)$$

$$v = 2A \left[e_x \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + e_y \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \quad (38)$$

と書かれる. ここで α と β はそれぞれ $x-t$ と $x+t$ の任意関数である. もちろん, α と β の選び方によっては, v は t のみの関数にも r のみの関数にもなる.

さらに, 求め方は省略するが, 次のような別の解も見つかっている¹⁶⁾.

$$f = k_1 x + k_2 t + C \quad (39)$$

$$v = A \exp(k_3 x) \left[e_x \cos(-k_3 y + k_2 z + k_1 t + C') + e_y \sin(-k_3 y + k_2 z + k_1 t + C') \right] \quad (40)$$

この解で $k_1=0$ とおくと, f は t のみ, v は r のみの関数になるので, 前記4.2の場合に当てはまる. また, $k_3=0$ とおくと, 前章例3の横波平面波の一つの解に一致する. $k_3 \neq 0$ のときは, $x \rightarrow +\infty$ または $-\infty$ で振幅は発散する.

5. 一様な横波平面波以外の解の例

まず, 4.2 で述べた新しい解を作りだす方法を, 具体例に応用してみよう.

例1 和の解

図3に示されたような「振れモード」の一般式は, 任意の定ベクトル k (大きさ k) を用いて

$$f = kt + C \quad (41)$$

$$v = A[e_1 \cos(k \cdot r + C') + e_2 \sin(k \cdot r + C')] \quad (42)$$

と書かれる. いま, 式(42)で単位ベクトルの組 $(e_1, e_2, k/k)$ として (e_x, e_x, e_y) または (e_y, e_x, e_x) と選んで得られる解をそれぞれ v_1, v_2 とするとき, それらに重み W_1, W_2 をつけて加え合わせると, 新しい解として

$$v = e_x W_1 \sin(ky + C') + e_y W_2 \cos(kx + C'') + e_x [W_1 \cos(ky + C') + W_2 \sin(kx + C'')] \quad (43)$$

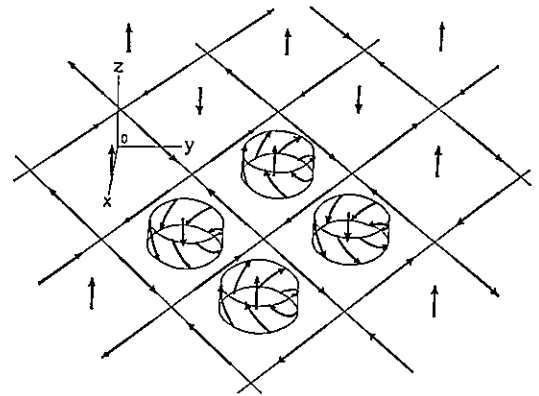


図5 式(43)で表される $v(r)$ の力線 ($W_1=W_2 \neq 0, C'=C''=0$ とおいた). マス目の直線は x 軸と 45° の角をなす. 振幅は各マス目の中心で最大で, 隅でゼロになる. z 方向には一様.

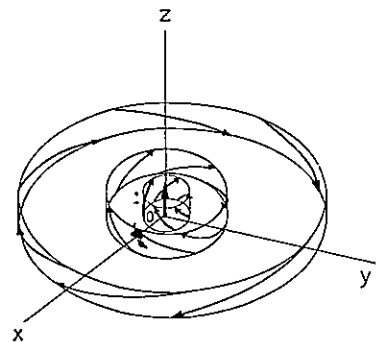


図6 式(44)で表される $v(r)$ の力線. 場は z 方向に一様.

を得る. 電場と磁場は $E = v \cos(kt + C)$ と $H = v \times \sin(kt + C)$ で与えられる. この波の力線の概略を図5に示す. 場の分布は z 方向に一様であるが, 場のベクトルは一つの平面内にはないのでは横波ではない.

例2 積分の解

「振れモード」の v の式(42)で, e_1 を e_x にとり, k と x 軸のなす角を τ とおくと, $e_2 = e_x \sin \tau - e_y \cos \tau$, $k/k = e_x \cos \tau + e_y \sin \tau$ と書ける. この τ をパラメーターとみて, 積分(36)を $\tau=0$ から 2π の範囲で実行すると, 重み関数 $W(\tau)=1, C'=0$ の場合に, 新しい解として

$$v = B[e_x J_1(kr)y/r - e_y J_1(kr)x/r + e_z J_0(kr)] \quad (44)$$

を得る. ここで, J_0 と J_1 はそれぞれ0次と1次の第1種ベッセル関数であり, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ である. 電場と磁場は $E = v \cos(kt + C)$ と $H = v \sin(kt + C)$ で与えられる. この波の力線を図6に示す. この波は z 軸に関して軸対称で, z 方向に一様である. さらに, $r \rightarrow \infty$ の

とき振幅がゼロに近づくので、この波はいわゆる非回折性ビーム¹⁷⁾の一種である。

例3 微分の解

v が r だけの関数のとき、 v を任意に微分してできる関数もまた解である。そこで、すぐ上で得た解、式(44)を x で微分してみると、新しい解

$$v = B[e_x \{J'_1(kr)kxy/r^2 - J_1(kr)xy/r^3\} - e_y \{J'_1(kr)kx^2/r^2 + J_1(kr)y^2/r^3\} + e_z J'_0(kr)kx/r] \quad (45)$$

が得られる。

例4 既知の正弦電磁波から作られる解

振動双極子から出る球面波は、極座標 r, θ, ϕ を使って

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 2(F'/r^2 - F/r^3) \cos \theta \\ E_\theta &= (-F''/r + F'/r^2 - F/r^3) \sin \theta \\ H_\phi &= (-F''/r + F'/r^2) \sin \theta \\ E_\phi &= H_r = H_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

と表せる。ここで、 $F = \cos(kr - kt)$ で、 F', F'' は r に関する微分を表す。式(46)を式(30)に代入し、簡単のため $C' = 0$ とおくと、球面波の解

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -2[(k/r^2) \sin kr + (1/r^3) \cos kr] \cos \theta \\ v_\theta &= [(k^2/r) \cos kr - (k/r^2) \sin kr - (1/r^3) \cos kr] \sin \theta \\ v_\phi &= [(k^2/r) \sin kr + (k/r^2) \cos kr] \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

が得られる。電場と磁場はそれぞれ $E = v \cos(kt + C)$ と $H = v \sin(kt + C)$ で与えられる。

さらに、この解を x, y, z に関して微分すると、微分階数に応じて4重極放射、8重極放射等に対応する解が得られる。

次に、前章の式(39)と(40)で与えられる解を取り上げよう。

例5 一様でない横波定在波の解

式(39)と(40)で $k_1 = 0$ とおくと、

$$f = k_2 z + C \quad (48)$$

$$v = A \exp(k_3 x)[e_x \cos(-k_3 y + k_2 z + C') + e_y \sin(-k_3 y + k_2 z + C')] \quad (49)$$

となる。 $z=0$ 面上での v が描く力線を図7に示した。別の z の面上では y 方向へ平行移動したものになる。この波は、場が x 成分と y 成分だけをもつ定在波で、仮りに z 方向を縦方向とするなら横波平面波と呼べるが、場はどの面内でも一様ではない。

例6 一様でない伝搬する波の解

式(40)と(41)で今度は $k_2 = 0$ とおくと、

$$f = k_1 z + C \quad (50)$$

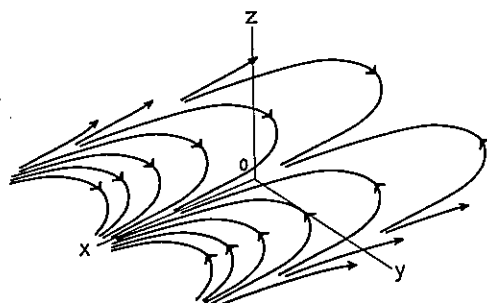


図7 式(49)で表される $v(r)$ の $z=0$ 面上の力線 ($C'=0$ とおいた)

$$v = A \exp(k_3 x)[e_x \cos(-k_3 y + k_1 t + C') + e_y \sin(-k_3 y + k_1 t + C')] \quad (51)$$

となる。 $z=0, t=0$ での力線は図7と同じであるが、今度は時間と共に y 方向に移動する。すなわち、波は y 方向に伝搬する。また、 z が変わると、力線の形は一定だが電気力線と磁力線の密度が交互に周期的に変化する。

6. $E \parallel H$ となる電磁波の性質

$E \parallel H$ ならばポインティングベクトル $S=0$ であるから、上に掲げたどの解においても、正味のエネルギーの流れはない。しかし、エネルギーは流れなくても波は伝搬しうる。一つの例は、図4に示した、静場とパルス波を重ね合わせてできた波である。この場合、波形は一定のまま z 方向に伝搬する。もう一つの例は、すぐ上の式(50)と(51)および図7で表された波であり、これは y 方向に伝搬する。このように、波形は伝わるのにエネルギーの流れがないときは、エネルギー密度は流れの方向に一樣である(ただし、その逆は真ではない。進行する円偏波は一樣なエネルギー密度をもつが、エネルギーも一緒に流れる)。また、図4で、例えばコイルを使って、磁束の変化からパルス信号を検出することができる。したがって、正味のエネルギーの流れがなくても、信号を発信し、また受信することができる。

ポインティングベクトル S_1 と S_2 をもつ二つの波を重ね合わせてできる波のポインティングベクトル S は、一般には $S_1 + S_2$ に等しくない。これは $(E_1 + E_2) \times (H_1 + H_2)$ の計算から容易にわかる。したがって、 $S_1 = -S_2$ であっても、重ね合わせによって $S=0$ すなわち $E \parallel H$ の波ができるとは限らない。同様に、 $S_1 = S_2 = 0$ であっても、 $S=0$ になるとは限らない。

ところで、電場と磁場はそれぞれ不変量ではなく、観測者の座標系によって相互に変換される。二つの慣性系の間での関係はローレンツ変換で与えられる。しかし、

よく知られたように、スカラー積 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ は不変量である。したがって、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ すなわち $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ がある座標系で成り立てば、その性質は他の座標系でも成り立つ。これから、 $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ である場とそうでない場は、座標系によらず互いに排他的であると結論される¹⁵⁾。

それでは、 $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ の性質はどうであろうか。ローレンツ変換に対してベクトル積 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は不変量ではない。したがって、 $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ や正味のエネルギーの流れがないという性質は保存されない¹⁵⁾。 $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ となるのは特別の場合であるといえる。

次に、ポインティングベクトルとエネルギー密度の関係を調べてみよう¹⁶⁾。場の他の不変量として $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ (通常の単位系では $\epsilon_0 \mathbf{E}^2 - \mu_0 \mathbf{H}^2$) がある。そこで $\kappa_1 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ 、 $\kappa_2 = 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ として $\kappa_1^2 + \kappa_2^2$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 + \kappa_2^2 &= (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)^2 - 4(\mathbf{E} \times \mathbf{H})^2 \\ &= 4(\xi^2 - S^2/c^2) = \text{一定} \end{aligned} \quad (52)$$

という関係が得られる。ここで、 ξ はエネルギー密度である。もし、 $S=0$ となる座標系があり、その座標系でみたエネルギー密度を ξ_{sw} とすると、式(52)は

$$\xi^2 = \xi_{sw}^2 (\text{定数}) + S^2/c^2 \quad (53)$$

と書ける。したがって、 S が大きく観測される座標系ほど、エネルギー密度も大きくなる。エネルギーの流れを伴う普通の進行波では $S=c\xi$ なので、 $\xi_{sw}=0$ である。

最後に、 $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ となる波はどのようにして実現できるか、そして、どんな応用があるかを考える。一番作りやすい波は、振幅が等しく、対向して進む円偏波の重ね合わせ (図2と3) であるが、これらの波は、直線偏波をもとにして、ビームスプリッター、鏡、1/4波長板を使って容易に作る事ができる。ただし、現実にはビームの大きさは有限であるから、 $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ は近似的にしか成り立たない。

このような円偏波の重ね合わせは、共振器内でも実現できる¹⁰⁾。図8のように、偏光板と1/4波長板を配置し、それらの角度を適当に選ぶと、2枚の1/4波長板の間で、どちらに進む波も円偏波になり、光軸方向から見ると、それらは互いに反対向きに回転する。そして、合

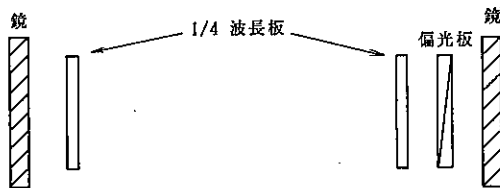


図8 「換れモード」を生じる共振器の構成

成してできた波は、図3で示された「換れモード」となる。

この波の特徴は、電場や磁場の振幅が光軸に沿って一様になり、節や腹ができない。したがって、その領域にレーザー媒質を置けば、空間的なホールバーニングが生じない。その結果、単一モードで大きな発振出力を得やすい。この効果は実際に確認された^{11,12)}。

7. おわりに

真空中で電場と磁場が平行となる、一見すると直感に反するような電磁波が、マクスウェルの方程式の解として存在することを示し、いくつかの具体的な解を求めた。真の一般解はまだ得られておらず、それを求めることが残された当面の課題である。この種の波が物理の基本原理とどのように関わり合っているかをさらに研究することも必要であろう。

本稿執筆にあたって助言をいただいた霜田光一、川合敏雄両先生に感謝いたします。

文 献

- 1) C. Chu and Ohkawa: "Transverse electromagnetic waves with $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$," Phys. Rev. Lett., 48 (1982) 837-838.
- 2) K.K. Lee: "Comments on 'Transverse electromagnetic waves with $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$,'" Phys. Rev. Lett., 50 (1983) 138.
- 3) C. Chu: "Chu responds," Phys. Rev. Lett., 50 (1983) 139.
- 4) A. Khare and T. Pradhan: "Transverse electromagnetic waves with finite energy, action, and $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} d^3x$," Phys. Rev. Lett., 49 (1982) 1227-1228; 49 (1982) 1594 (E); 51 (1983) 1108 (E).
- 5) F.C. Michel: "Transverse electromagnetic waves with nonzero $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$," Phys. Rev. Lett., 52 (1984) 1351.
- 6) A. Khare and T. Pradhan: "Khare and Pradhan respond," Phys. Rev. Lett., 52 (1984) 1352.
- 7) H. Zaghoul, K. Volk and H. A. Buckmaster: "Comment on 'Transverse electromagnetic wave with $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$,'" Phys. Rev. Lett., 58 (1987) 423; 58 (1987) 2506 (E).
- 8) C. Chu and T. Ohkawa: "Chu and Ohkawa respond," Phys. Rev. Lett., 58 (1987) 424.
- 9) R. F. Harrington: *Time-Harmonic Electromagnetic Fields* (McGraw-Hill, New York, 1961) pp. 47-48.
- 10) V. Evtuhov and A. E. Siegman: "A 'twisted-mode' technique for obtaining axially uniform energy density in a laser cavity," Appl. Opt., 4 (1965) 142-143.
- 11) A. Draegert: "Efficient single-longitudinal-mode Nd: YAG laser," IEEE J. Quantum Electron., QE-8 (1972) 235-239.
- 12) D. J. De Jong and D. Andreou, "An Nd: YAG laser whose active medium experiences no hole burning effects," Opt. Commun., 22 (1977) 138-142.

- 13) A. E. Siegman: "Historical note on spatial hole burning and twisted-mode laser resonators," *Opt. Commun.*, **24** (1978) 365.
- 14) K. Shimoda, T. Kawai and K. Uehara: "Electromagnetic plane waves with parallel electric and magnetic fields $E \parallel H$ in free space," *Am. J. Phys.*, **58** (1990) 394-396.
- 15) H. Zaghoul and H. A. Buckmaster: "Transverse electromagnetic waves with $E \parallel B$," *Am. J. Phys.*, **56** (1988) 801-806.
- 16) K. Uehara, T. Kawai and K. Shimoda: "Non-transverse electromagnetic waves with parallel electric and magnetic fields," *J. Phys. Soc. Jpn.*, **58** (1989) 3570-3575.
- 17) K. Uehara and H. Kikuchi: "Generation of nearly diffraction-free laser beams," *Appl. Phys. B*, **48** (1989) 125-129.
- 18) N. Salingaros: "Invariants of the electromagnetic field and electromagnetic waves," *Am. J. Phys.*, **53** (1985) 361-363.