

解説

光学におけるベリーの位相

北野正雄

京都大学工学部電子工学科 〒606 京都市左京区吉田本町

(1991年2月4日受理)

Berry's Phases in Optics

Masao KITANO

Department of Electronics, Faculty of Engineering, Kyoto University,
Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606

1. ま え が き

1984年の論文¹⁾で、Berryは量子系のパラメータを断熱的に変化させてふたたび元へ戻したとき、波動関数に余分の位相が付加されることを指摘した。そして、この位相がパラメータ空間での変化の経路に沿った線積分あるいは経路が囲む面に関する面積分として表されることを示した。Berryはこの位相を幾何学的量子位相と名付けたが、一般にはベリーの位相と呼ばれている。

この発見をきっかけにして、ベリーの位相に関するおびただしい数の論文が出版されている。特徴的なことはその分野が非常に多岐にわたっていることである。本稿で述べる光学の分野のみならず、力学、流体力学、分子・原子・原子核物理、相対論、固体物性、場の理論、電離層物理など枚挙に暇がない。これは、ベリーの位相の普遍性の現れだと考えられる。なお、各分野の重要な論文は文献2)に章別に収録されている。各章の冒頭には編集者らによる優れた解説がある。

さらに興味深いことは、1984年以前にいくつかの分野でベリーの位相がすでに発見されていたことが報告されている点である³⁾。本稿でも解説する Pancharatnum の位相はその一例である。このことは、Berryの発見の価値を減ずるものではなく、むしろ彼の発見によって過去の例に新しい光があてられたと見るべきである。

さて、光学の分野では以下のような場合にベリーの位相が現れることが知られている⁴⁾。

1. 光ファイバーや鏡を用いて光の k -ベクトルを変化させた場合⁵⁻⁷⁾。この場合、パラメータ空間は $k=$

const の球面である。

2. 損失のない偏光素子(波長板, 回転素子)で偏光状態を変化させたとき。およそ30年前に Pancharatnum⁸⁾ が異なる偏光の干渉の研究に関連して見いだしていたのが再発見された。この位相はポアンカレ球と深い関係がある。
3. 損失のある偏光素子(偏光板)で偏光状態を変化させたとき⁹⁾。この場合ポアンカレ球に代わって2葉双曲面が重要な役割を果たす。
4. 光子を squeeze したとき。Chiao ら¹⁰⁾によって提案されているが実験的にはまだ実現されていない。

2. 非ホロノミー

系のパラメータを一巡したとき元へ戻らない量が存在する状況は非ホロノミー (anholonomy, 非可積分性) と呼ばれる。電磁場に関するゲージ構造は非ホロノミーの典型である。アハラノフ-ボーム効果¹¹⁾ において、無限長ソレノイドの回りを一巡した荷電粒子の波動関数は位相シフト

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{e}{\hbar c} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{e}{\hbar c} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = e\Phi/\hbar c \end{aligned} \quad (1)$$

を受ける。ここで、 e は電荷、 Φ はソレノイドの磁束、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルであり、積分はそれぞれ荷電粒子の軌跡 C およびそれに囲まれた面積 S に関して行う (図1)。

非ホロノミーのもっと身近な例を、簡単な机上実験で示そう。図2(a)のようにペンをそのクリップが左にな

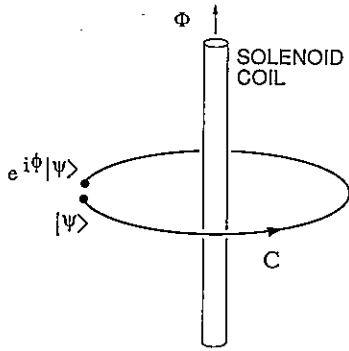


図1 アハラノフ-ボーム効果

と書ける。ここで、 \mathbf{R} はペンを表すベクトルである。このような回転を幾何学的回転とよぶことができる。注意することは、一連の操作においてペン軸を軸まわりに積極的に回転したことはないにもかかわらず、結果として軸の回転が得られたことである。このような非回転性の操作は幾何学の言葉を借りて“平行移動”(parallel transport) とよばれる。

上の式(2)を式(1)と比較すると、原点に磁荷 $-\hbar c/e$ をもつ磁気単極をおいた場合のアハラノフ-ボーム効果に対応づけることができる。このような仮想的な磁場(ベクトルポテンシャル)を考えることは有効なので幾何学的位相の議論ではしばしば導入される。

3. Chiao の実験

Berkeley の Chiao らは光ファイバーを用いて光子に対するベリーの位相を測定した⁵⁾。

前節のペンの例に合わせるため、図4のように3箇所直角に曲げられた光ファイバーを考えよう。ただし、歪みによる複屈折などを防ぐため曲げの部分は十分滑らかにしておく。下方から入射した光の k -ベクトルは $z \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow z$ の順にゆっくり変化させられる。 k -ベクトルは球面上で図3と同様の閉路を描く。

入射偏光が x -方向に直線の場合を考えよう。出力の偏光が y -方向になることは図4中の矢印の根元の実線を追跡すれば明らかであろう。同様に破線を追えば y -偏光入射に対し、 x -偏光が出てくることがわかる。これらから、このファイバーは偏光を 90° 回転させる回転素子になっていることがわかる。異方性媒質なしに旋光性が実現できているわけである。この回転角はファイバーの曲げ方の詳細、材質、コア径、波長などには無関係で、 k -ベクトルが球面上で描く閉路の立体角 $\Omega(C)$ の

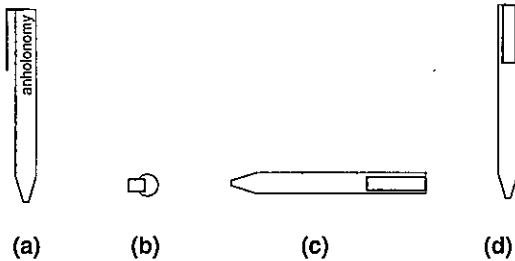


図2 ペンの非ホロノミー

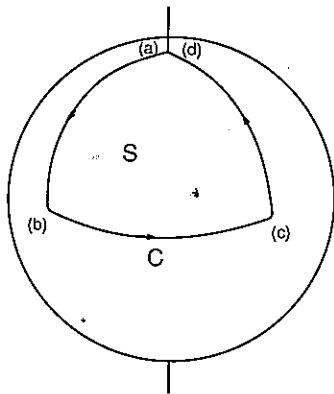


図3 ペンの軌跡

るように垂直に立てる。次にペン先を中心にして手前に倒す(b)。やはりペン先を中心にして水平面内で反時計回りに 90° 回転させる(c)。そしてペンを立てて元の状態に戻す(d)。ペンはもとの位置に戻ったにもかかわらずクリップはペン軸の回りに 90° 回転している。つまり非ホロノミーが現れている。

回転角 θ はペン尻が描いた閉路 C が張る立体角 $\Omega(C)$ に等しい(図3)。つまり、

$$\theta = \Omega(C) = - \int_S (\mathbf{R}/R^3) \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

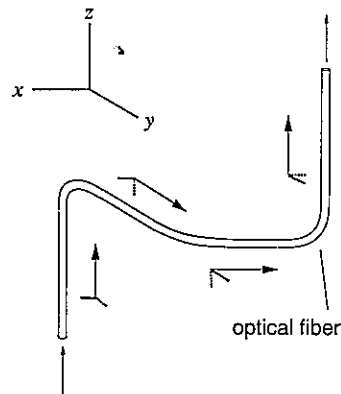


図4 Chiao の実験

みに依存する純幾何学的なものである。また、ファイバーの代りに鏡で k を変化させても同様の位相が得られる⁶⁾。

ところで、よく知られているように光子はスピン1のボーズ粒子である。スピンの量子化軸は k -ベクトル方向にとられ、 $|m=+1\rangle$ が右回り円偏光に、 $|m=-1\rangle$ が左回り円偏光に対応する ($m=0$ の不存在は光速で走る光の特殊事情である)。旋光性は円複屈折すなわち左右円偏光に対する位相差と考えられるので、 k -ベクトルをファイバーで変化させることによって光子の状態は

$$|k, m\rangle \rightarrow \exp(-im\Omega(C)) |k, m\rangle, \quad (m=\pm 1) \quad (3)$$

と変化したことになる。

一般に磁気量子数 m のスピン状態 $|m\rangle$ を閉路 C に沿って動かすと $-m\Omega(C)$ なる位相を獲得する¹⁾。この場合 $-m\hbar c/e$ の大きさの“磁気単極”を考えればよいことがわかる。一方、磁気単極の大きさ g は Dirac の量子化条件 $g=N\hbar c/(2e)$ (N : 整数)¹¹⁾ に従うが、上の仮想的磁気単極にこれをあてはめると、 m は半整数でなければならないことがわかる。このように幾何学的考察により半整数スピンの存在が自然に導けることは大変興味深い。

4. 状態空間のゲージ構造

前節の例を一般化しておこう¹²⁾。量子力学において系の状態はヒルベルト空間 \mathbf{H} の要素 (状態ベクトル) $|\phi\rangle$ で表される。しかし、この表現には規格化 $\langle\phi|\phi\rangle=1$ を行っても位相因子だけの不定性がある。すなわち、 $|\phi'\rangle = \exp(i\phi)|\phi\rangle$ は $|\phi\rangle$ と物理的には同じ状態を表している。このような二つの状態ベクトルは同じ密度行列をもつ。

$$\rho = |\phi\rangle\langle\phi| = |\phi'\rangle\langle\phi'| \quad (4)$$

つまり、ベクトルの集合 $\{\exp(i\phi)|\phi\rangle | 0 \leq \phi < 2\pi\} \subset \mathbf{H}$ と密度行列 ρ は1対1に対応している。これを模式的に表したのが図5である。状態空間はちょうど霜柱のような構造をもっており、霜柱の一本一本が状態に対応している。このような状況は数学でいうファイバー束¹³⁾に対応している。同値な状態の集合をファイバー、密度行列 ρ の集合 \mathbf{P} を基底集合、 \mathbf{H} をファイバー束と呼ぶことができる。

従来、状態ベクトルの位相因子の不定性は考える必要のないものであり、密度行列による記述にはこの不定性がなく好都合であると考えられてきた。しかし、Berryの位相はこの位相因子の不定性に深く関係しており、これから述べるように空間 \mathbf{H} のファイバー構造の表象と

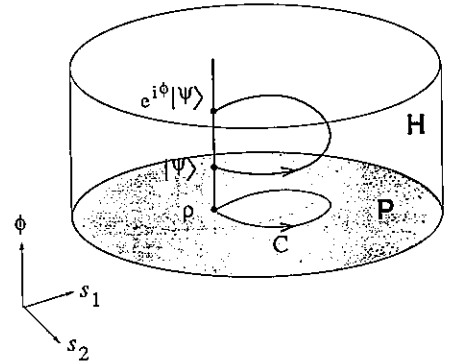


図5 状態空間のファイバー構造

考えられる。このように基本的な事象が量子力学の誕生以来、60年あまりの間ほとんど気付かれずにいたのは、まったく不思議なことである。この事情は、Maxwell方程式のゲージ変換に対する認識とよく似ている。当初、ベクトルポテンシャル A の不定性は単に面倒な問題と考えられてきたが、今日ではむしろ物理の基本原則として認識されている。

さて、隣接するファイバー間の関係 (ファイバーの接続) を見るために、ある状態ベクトル $|\phi\rangle \in \mathbf{H}$ 、および密度行列 $\rho \in \mathbf{P}$ のミルトニアン H による運動を考えよう。 H は二つの部分に分解できる。

$$H = H_a + H_g \quad (5)$$

このうち、 H_a は $[H_a, \rho] = 0$ をみたし、ファイバーに沿った運動を表す。一方、 H_g はファイバーを渡る運動に対応する。このことは ρ の運動方程式

$$i \frac{d}{dt} \rho = [H, \rho] = [H_g, \rho] \quad (6)$$

から容易に理解される。つまり、 H_a は ρ の変化に寄与しない。

ここで便宜のため \mathbf{H} に座標を導入する。ファイバーすなわち ρ を指定するための座標を $\{s_i\}$ 、各ファイバー上の座標を ϕ とする。すると、 $H_g dt$ による運動は \mathbf{P} 上の1形式 (one form)

$$d\phi_g = \sum_i A_i ds_i \quad (7)$$

として表せる。また、 $H_a dt$ による位相変化は

$$d\phi_a = -i \langle\phi| H_a |\phi\rangle dt = -i \langle\phi| H |\phi\rangle dt \quad (8)$$

であり、動力的位相と呼ばれる。

さてここで、時刻 $t=0$ に $|\phi(0)\rangle$ から出発して、時刻 $t=T$ に同じファイバーに戻ってくる運動を考える。つまり $|\phi(T)\rangle = \exp(i\phi)|\phi(0)\rangle$ とする。この全移相量 ϕ は

$$\phi_a = -i \int_0^T \langle \phi | H | \phi \rangle dt \quad (9)$$

と

$$\begin{aligned} \phi_s &= \int_C d\phi_s = \int_S d(d\phi_s) \\ &= \int_S \sum_{i>j} \frac{\partial A_i}{\partial s_j} ds_i \wedge ds_j \end{aligned} \quad (10)$$

の和になる。ここで、 C は H 内の軌跡 $|\phi(t)\rangle (0 \leq t \leq T)$ を P に写像して得られる閉曲線、 S はその閉曲線で囲まれる曲面をそれぞれ表す ($C = \partial S$)。 (10) 式の変形にはストークスの定理: $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$ (ω は微分形式) を用いた。ここで重要なことは ϕ_s がハミルトニアン H には直接依存せず、 P 上の経路 C のみによって決定されていることである。

各ファイバーごとに座標 ϕ の原点の取り方を

$$\phi \rightarrow \phi + A(s) \quad (11)$$

のように変えるとき、 A_i は

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial A}{\partial s_i} \quad (12)$$

と変換される。しかし、このような変換を行っても ϕ_s は不変である (ゲージ不変性)。

なお、Berry が当初仮定した断熱条件は状態を一巡させるための一方法であって必須条件ではないことがこれまでの議論でわかる。

5. Pancharatnum の位相

前節の議論を光に対するもう一つのベリー位相に適用してみよう。状態空間 H として k -ベクトル一定の光の偏光状態を考える。このとき、密度行列の集合はポアンカレ球で表すことができる。ここで得られる幾何学的位相は Pancharatnum の位相と呼ばれるものである。この位相は 1956 年 Pancharatnum⁸⁾ が異なった偏光間の干渉を研究して得たものであるが、ベリーの位相として解釈できることが明らかになった¹⁴⁾。

z 軸方向に伝搬する光を考え、偏光状態の基底ベクトルとして直交する直線偏光 $|x\rangle, |y\rangle$ をとる。任意の偏光状態は

$$|\phi\rangle = a_x |x\rangle + a_y |y\rangle \quad (13)$$

で表せる。ただし、 $|a_x|^2 + |a_y|^2 = 1$ 。この状態に対する密度行列は Stokes のパラメータ

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (s_1, s_2, s_3) \\ &= (|a_x|^2 - |a_y|^2, a_x a_y^* + a_x^* a_y, i(a_x a_y^* - a_x^* a_y)) \end{aligned} \quad (14)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \rho &= \langle \phi | \phi \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+s_1 & s_2 - i s_3 \\ s_2 + i s_3 & 1-s_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{J} \end{aligned} \quad (15)$$

と表せる。ただし、 \mathbf{J} はパウリのスピン行列 σ を用いて $J_1 = \sigma_x/2, J_2 = \sigma_y/2, J_3 = \sigma_z/2$ と書け、交換関係

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad (16)$$

をみたす。 ϵ_{ijk} は反対称テンソルである。

$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ が成り立つから、密度行列の空間は単位球面と同一視できる。これがポアンカレ球である。極点 ($s_3 = \pm 1$) は左右円偏光を、赤道 ($s_3 = 0$) は直線偏光を、その他の点は楕円偏光を表す。また共役点 (\mathbf{s} と $-\mathbf{s}$) に対応する偏光は互いに直交している。

偏光状態は偏光素子を通過することで変化する。この場合、運動方程式は時間 t の代りに空間座標 z に関するものになる。偏光素子としては、光の強度を保存するもののみを考える。

$$i \frac{d}{dz} |\phi\rangle = N |\phi\rangle \quad (17)$$

N は Jones 行列で $N = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}$ と書ける。 B_1, B_2 はそれぞれ主軸が x 軸、 x 軸から 45° 方向の位相板、 B_3 は回転素子に対応する。密度行列の運動方程式は

$$\frac{d}{dz} \mathbf{s} = \mathbf{B}(z) \times \mathbf{s} \quad (18)$$

となり、ポアンカレ球上の運動を与える。

さて、ポアンカレ球上の閉ループに関する幾何学的位相を求めてみよう。簡単のために、二つの独立な無限小発展 N_1, N_2 で張られる P 上の四辺形無限小ループを考える。 $|\phi\rangle$ に対し N_1, N_2' の順に作用させた場合と、その逆に N_2, N_1' の順に作用させた場合の位相差 Δ を計算する。

$$\begin{aligned} &(1 - iN_2')(1 - iN_1)|\phi\rangle \\ &= \exp(-i\Delta J_i)(1 - iN_1')(1 - iN_2)|\phi\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

ここで $J_i = \mathbf{s} \cdot \mathbf{J}$ と置いた。また、

$$N_i' = (1 - iN_{3-i})N_i(1 + iN_{3-i}), \quad (i=1, 2) \quad (20)$$

である。高次の微小量を見捨てる

$$i\Delta J_i = [N_1, N_2] \quad (21)$$

が得られる。 N_1, N_2 を

$$N_i = \epsilon [J_i - (s_i/s_3)J_3], \quad (i=1, 2) \quad (22)$$

のように選ぶと、四辺形の各辺が平行移動になるので、 Δ は幾何学的なものになる。

$$\Delta = (2s_3)^{-1} \epsilon^2 \quad (23)$$

この位相差 Δ をループの囲む面積 ϵ^2 で割ったものが単位面積あたりの幾何学的位相である。有限ループに対する位相 ϕ_s は

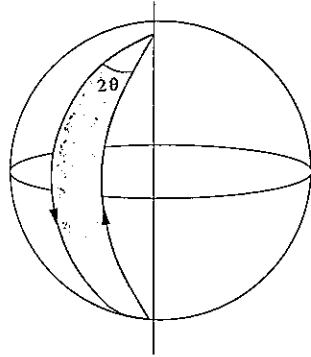


図6 ポアンカレ球上で偏光が描く軌跡. 主軸の角度差が θ の2枚の $\lambda/2$ -板に右旋円偏光を入射した場合.

$$\begin{aligned} \phi_g &= 2^{-1} \int_S s_3^{-1} ds_1 \wedge ds_2 \\ &= 2^{-1} \int_S \sin \theta d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (24)$$

で与えられる. 2番目の式は極座標で表したものである. 容易に確かめられるように s_3^{-1} は単位球面の面積要素である. つまり, ϕ_g はループが囲む球面の面積の半分になっている. この場合, 光子はスピン1/2のように振舞う.

従来, ポアンカレ球は単に偏光を表すのに便利なパラメータ化の方法だと考えられてきたが, 球の曲率は幾何学的位相を反映していたのである.

一例として, 主軸が θ だけずれた2枚の $\lambda/2$ -板を考えよう. 右旋円偏光のポアンカレ球上の運動は図6のようにN極→S極→N極となる. 閉路の面積は -4θ であるので -2θ の位相シフトがある. 同様に左旋偏光は球の裏側をS極→N極→S極と運動し, $+2\theta$ の位相シフトをうける. 両偏光の合成である直線偏光は偏光面が 2θ 回転する. このようなことが簡単にみとれるのも, 幾何学的位相の利点である.

6. ローレンツ群

これまで述べてきたベリーの位相はいずれも球面に関連したものであった. したがって, これらは3次元回転群に関連した位相であるといえる. 回転群の兄弟ともいえるローレンツ群に関連した位相の例⁹⁾ をここでは説明する.

不完全な直線偏光子の作用は直線偏光を基底にとると,

$$\begin{pmatrix} t_x & 0 \\ 0 & t_y \end{pmatrix} = t_k \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa^{-1} \end{pmatrix} \quad (25)$$

SQUEEZED CAT

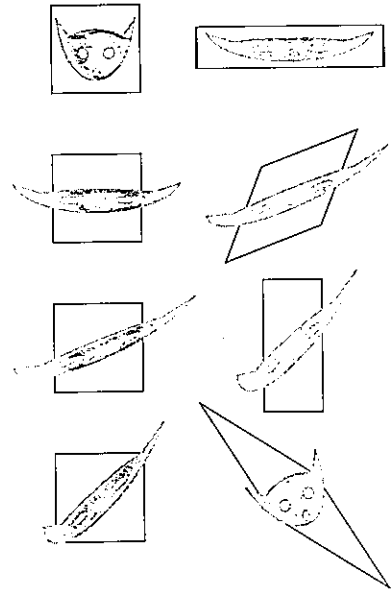


図7 ローレンツ変換による回転

のように表される¹⁵⁾. ここで, $t_x(t_y)$ は $x(y)$ 成分に関する透過率である. この作用は等方的損失 $t_x=(t_x t_y)^{1/2}$ と, その割合が $\kappa=(t_x/t_y)^{1/2}$ で与えられる圧縮伸長の合成で表される. この面積を保存する圧縮伸長がローレンツ変換の特徴である.

さて, 幾何学的位相をみるためにここでは, 図7を使おう. 第1段階(図の1段目)で, 猫の顔は横方向に伸ばされる. 引き続いて $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ 方向に引き延ばしを行うと顔の形自体は元へもどっているが, 全体は回転してしまっている.

前のペンの例と同じく一つ一つの操作は回転を含んでいないにもかかわらず, 全体として回転を生成しており, 幾何学的回転と呼ぶことができる. この回転角は球面ではなく, 双曲面の面積として与えられることが知られている⁹⁾.

この結果は直線偏光子のみを用いて旋光性, すなわち回転子を実現できることを意味している.

ローレンツ変換の繰り返しにより生ずる回転はトーマス歳差運動として知られており, 相対論的速度で軌道運動している電子と自由電子の磁気回転比の差を与える効果である(この効果の発見の経緯については朝永先生¹⁶⁾の興味深いお話がある). トーマス効果を正面から計算するとひどく複雑なものになるが, 幾何学位相の考え方で非常に容易に捉えることができる.

7. おわりに

光学におけるベリーの位相は古典的な Maxwell 方程式から導けるもので、量子位相と呼ぶのはふさわしくないという意見がある。しかし、光の場合、1光子状態でもそのモード関数は Maxwell 方程式に従うため、量子的領域でも上述の議論は成立する。

本稿で述べてきた例はいずれも簡単なものであり、幾何学的位相を持ち出さずとも理解できる。しかし、最近注目されている分数量子ホール効果や高温超伝導の担い手の候補であるエニオン (フェルミオン, ボゾンとは異なる統計を示す粒子) の理解にとってベリーの位相は本質的役割を果たしている。

本研究の一部は財団法人松尾学術振興財団および文部省科学研究費 02650029 の助成を受けた。

文 献

- 1) M. V. Berry: Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 392 (1984) 45.
- 2) A. Shapere and F. Wilzek eds.: *Geometric Phases in Physics* (World Scientific, Singapore, 1989). ここに掲げた文献のいくつかも収録されている。
- 3) M. V. Berry: Phys. Today, December (1990) 34.
- 4) R. Y. Chiao: in *Proceedings of the 3rd International Symposium on Foundations of Quantum Mechanics* (Physical Society of Japan, Tokyo, 1989) p. 80.
- 5) T. Tomita and R. Y. Chiao: Phys. Rev. Lett., 57 (1986) 937; R. Y. Chiao and Y.-S. Wu: Phys. Rev. Lett., 57 (1986) 933.
- 6) M. Kitano, T. Yabuzaki and T. Ogawa: Phys. Rev. Lett., 58 (1987) 523.
- 7) M. V. Berry: Nature, 326 (1987) 278; R. Y. Chiao, A. Antaramian, K. M. Ganga, H. Jiao, S. R. Wilkinson and H. Nathel: Phys. Rev. Lett., 60 (1988) 1214.
- 8) S. Pancharatnam: Proc. Indian Acad. Sci., A 44(1956) 247.
- 9) M. Kitano and T. Yabuzaki: Phys. Lett. A, 142 (1989) 321.
- 10) R. Y. Chiao and T. F. Jordan: Phys. Lett. A, 132 (1988) 77.
- 11) たとえば, J. J. Sakurai: *Modern Quantum Mechanics* (Addison Wesley, Redwood City, 1985) p. 136.
- 12) Y. Aharonov and J. Anandan: Phys. Rev. Lett., 58 (1987) 1593.
- 13) B. F. Schutz: *Geometrical Method of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1980).
- 14) S. Ramaseshan and R. Nityananda: Curr. Sci., 55 (1986) 1225.
- 15) H. Takenaka: Nouv. Rev. Opt., 4 (1973) 37.
- 16) 朝永振一郎: スピンはめぐる (中央公論社, 1974) pp. 39-68, pp. 284-325.