



バイスペクトル位相からの最小自乗位相推定に おけるノイズの影響の低減化

高城 洋明*・高橋 徹**

* 九州工業大学電子工学教室 〒804 北九州市戸畠区仙水町 1-1

** 大分工業高等専門学校電気工学教室 〒870-01 大分市大字牧 1666

(1991年2月4日受付, 1991年4月15日受理)

Suppression of the Influence of Noise in Least-Squares Phase Estimation from the Bispectrum Phase

Hiroaki TAKAJO* and Tohru TAKAHASHI**

* Department of Electronic Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1, Sensuicho, Tobata-ku, Kitakyushu 804

** Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology,
1666, Maki, Oita 870-01

(Received February 4, 1991; Accepted April 15, 1991)

In order to estimate the Fourier phase of an object from its bispectrum phase with recourse to the least-squares technique, we have to unwrap the measured bispectrum phase so that the unwrapped bispectrum phase satisfies the feasibility condition of least-squares estimation. In this unwrapping process, the integers which are called, in this paper, indices of the necessity of unwrapping must be estimated from the measured bispectrum phase. Incorrect estimation of the indices brings large error in the retrieved phase. In this paper, for achieving the accurate estimation of the indices, we develop a new method which estimates the indices appealing to majority rule. Simulations that test the performance of this method are given.

1. はじめに

Triple correlation 法は、被観測物体のフーリエ位相（以下簡単に位相という）を回復できる方法として天体観測などの分野で注目されている¹⁾。この方法では測定されたバイスペクトル位相（bispectrum phase）から位相を回復する過程が不可欠でありかつ重要な部分を占めている。この過程を実行する最も簡単な方法は逐次法であるが、この方法では回復位相にノイズが蓄積するという問題が生じる²⁾。ノイズの蓄積を抑えて位相を回復するには最小自乗推定法を用いるのが最も効果的であると考えられるが、測定によって得られるバイスペクトル位相の値が 2π の範囲に限られているため、この方法による位相回復は成功していなかった。ところが最近 Marmon らは、最小自乗推定が有効であるための条件を導き、バイスペクトル位相をこの条件を満足するようにア

ンラッピング（unwrapping）し、アンラッピングされたバイスペクトル位相から位相を回復することによって困難を克服した³⁾。このアンラッピングを行うには測定されたバイスペクトル位相の信号分によって定義される整数（アンラッピング必要指標あるいは簡単に指標と呼ぶ）の値を知らねばならない。これら指標の値は測定されたバイスペクトル位相から推定されねばならないが、測定ノイズはこの推定を妨害する。本報告の目的は、最小自乗位相推定をより大きなノイズに適用できるように拡張することであり、そのためこれら指標のより優れた推定法を構築することである。

2. 最小自乗位相推定

2.1 最小自乗位相推定有効条件

位相は N 点でサンプルされているものとし、それらを ϕ_m ($m=1, \dots, N$) と表す。バイスペクトルは信号の 3 次

の相関のフーリエ変換で定義される。バイスペクトル位相からの最小自乗位相推定は、バイスペクトル位相が

$$\beta_{mn} = \phi_m + \phi_n - \phi_{m+n} \quad (1)$$

と書くことができるという事実に基づいている。ただし β_{mn} はバイスペクトル位相である。上式はバイスペクトル位相が位相と線形連立方程式で結ばれることを表している。われわれはそれを、ベクトルマトリックス形式で

$$\beta = A\phi \quad (2)$$

と書くことができる³⁾。ただし、 ϕ と β は文献3)の(7)と(8)式で定義される列ベクトルで、 N を偶数とするときそれぞれ N 個および $(N^2/4)$ 個の成分をもつ。 A は係数マトリックスである。バイスペクトル位相にノイズ n_{mn} が存在するときには

$$\beta + n = A\phi \quad (3)$$

である。ただし、 n は n_{mn} を成分とする列ベクトルである。(2)と(3)式は方程式の個数が未知数 ϕ_m の個数よりも大きい優決定の方程式である。推定位相は(3)式を最小自乗の意味で解くことによって、すなわち次の正規方程式

$$(A^T A)\check{\phi} = A^T(\beta + n) \quad (4)$$

を解くことによって得られる。

ところで(4)式の解 $\check{\phi}$ が、すなわち $\beta + n$ からの推定位相が、位相の有効な推定であるためには、 β が(2)式を正確に満足しなければならないこと、換言すれば(2)式が近似解ではなく厳密解 ϕ をもたねばならないことは言うまでもない。何故ならば(4)式は(2)式が厳密に成り立つことを前提として導出されているからである。

(2)式は優決定であるので、このことは β の各成分が互いに独立ではないこと、すなわち β の各成分の間にいくつかの関係が存在しなければならないことを意味する。Marron らは、 β の各成分の間には次の関係

$$R_{mn}(\{\beta_{ij}\}) = 0, \quad 2 \leq m \leq N/2, \quad m \leq n \leq N-m \quad (5)$$

がなければならないことを示した。ただし、 R_{mn} は演算子で

$$R_{mn}(\{\beta_{ij}\}) = \beta_{mn} - \beta_{m-1,n+1} - \beta_{1,n} + \beta_{1,m-1} \quad (6)$$

である。(文献3)の(21)式参照。(2)式が成立するとき(5)式が成り立つことは容易に確かめられる。)本報告では、ある量からノイズを差し引いて得られる量をもとの量の信号分と呼ぶ。われわれは、最小自乗位相推定が有効であるために、 $\beta + n$ の信号分 β の各成分が満足すべき(5)式の条件を最小自乗位相推定有効条件と呼ぶ。

2.2 バイスペクトル位相の測定値とそのアンラッピング

さて、測定によって得られるバイスペクトル位相は 2π の範囲にラッピングされていることに注意しよう。このことは、以下に示すように位相推定に困難をもたらす。われわれはラッピングされる範囲を $(-\pi, \pi)$ に選ぶ。このとき、ノイズが存在しない場合のバイスペクトル位相の測定値は(1)式ではなく、

$$\beta_{mn}' = \phi_m + \phi_n - \phi_{m+n} + 2\pi L_{mn} \quad (7)$$

と表され、ノイズが存在する場合の測定値は

$$\tilde{\beta}_{mn} = \beta_{mn}' + n_{mn} + 2\pi M_{mn} \\ = \bar{\beta}_{mn} + n_{mn} \quad (8)$$

と表される。ただし、 L_{mn} と M_{mn} は β_{mn}' と $\tilde{\beta}_{mn}$ とが $(-\pi, \pi)$ に制限された量であるために必要な整数である。 $\bar{\beta}_{mn}$ は $\tilde{\beta}_{mn}$ からノイズを差し引いて得られる量で、 $\bar{\beta}_{mn}$ の信号分である。通常の物理量の測定では、ノイズが存在しない場合の測定値と、測定値からノイズを差し引いた値とは一致する。しかしながらバイスペクトル位相の測定においては両者すなわち β_{mn}' と $\tilde{\beta}_{mn}$ とは $2\pi M_{mn}$ だけ異なる。もちろん、ノイズが存在しない場合には両者は一致する。これらの状況は位相差の測定においてみられる状況と類似である^{4),5)}。

さて、2.1節の議論から明らかのように測定値 $\tilde{\beta}_{mn}$ からの最小自乗位相推定が有効であるためには、その信号分 $\bar{\beta}_{mn}$ が(5)式を満足しなければならない。すなわち、

$$R_{mn}(\{\bar{\beta}_{ij}\}) = 0, \quad 2 \leq m \leq N/2, \quad m \leq n \leq N-m \quad (9)$$

が成立しなければならない(ノイズが存在しないときには $\bar{\beta}_{mn}$ は β_{mn}' に一致するので、(9)式は β_{mn}' からの最小自乗位相推定有効条件を含んでいる)。しかしながら $\bar{\beta}_{mn}$ は 2π の範囲に値が限られているため、その信号分 $\bar{\beta}_{mn}$ と位相 ϕ_{mn} との間には(2)式のような線形な関係は一般的には存在せず、(9)式は成立しない。したがって、 $\bar{\beta}_{mn}$ からの最小自乗位相推定は不可能である。この困難は以下のようにして克服できる。すなわち、 $\tilde{\beta}_{mn}$ を次式

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{mn} &= \bar{\beta}_{mn} + 2\pi K_{mn} \\ &= \tilde{\beta}_{mn} + n_{mn} \end{aligned} \quad (10)$$

によってアンラッピングする。ただし、 K_{mn} は整数である。 $\tilde{\beta}_{mn}$ は β_{mn}' の信号分で

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{mn} &= \tilde{\beta}_{mn} - n_{mn} \\ &= \bar{\beta}_{mn} + 2\pi K_{mn} \end{aligned} \quad (11)$$

である。困難は、信号分 $\tilde{\beta}_{mn}$ が(5)式を満足するよう

に、すなわち、

$$R_{mn}(\{\bar{\beta}_{ij}\}) = R_{mn}(\{\bar{\beta}_{ij}\}) + R_{mn}(\{2\pi K_{ij}\}) = 0, \\ 2 \leq m \leq N/2, \quad m \leq n \leq N-m \quad (12)$$

が成立するように K_{mn} を決定し、位相を $\bar{\beta}_{mn}$ から回復することにより克服される。

3. アンラッピング必要指標推定法の改善

(12)式から明らかなように整数 K_{mn} を決定するためには、 $R_{mn}(\{\bar{\beta}_{ij}\})$ の値、あるいはそれと等価なことだが、

$$E_{mn} = R_{mn}(\{\bar{\beta}_{ij}\})/2\pi \quad (13)$$

で定義される量 E_{mn} の値が必要である。((12)式は文献3)の(19)式において $C\beta'$ を $C\bar{\beta}$ で置き換えた式と等価である。ただし、 β' と $\bar{\beta}$ はそれぞれ β_{mn}' と $\bar{\beta}_{mn}$ を成分とする列ベクトルである。実は K_{mn} は(12)式から決定されるのであって、文献3)の(19)式からだと考えるのは適切ではない。 E_{mn} は $C\bar{\beta}/2\pi$ の成分である。したがって、 K_{mn} の決定に必要なのは Marron らの言うように $C\beta'/2\pi$ の値ではなくて $C\bar{\beta}/2\pi$ の値、換言すれば E_{mn} の値である。)われわれは、 E_{mn} をアンラッピング必要指標と呼ぶ。(12)式からわかるように E_{mn} の値は整数である。この事実を利用して Marron らは、 E_{mn} を次式

$$\check{E}_{mn}^{(1)} = \text{Int}[R_{mn}(\{\bar{\beta}_{ij}\})/2\pi] \quad (14)$$

によって測定値 $\bar{\beta}_{mn}$ から推定した*1。ただし、 $\text{Int}[\delta]$ は δ に最も近い整数を表す。われわれは、この推定法を推定法1と呼ぶ。添字(1)は、推定法1による推定値であることを表す。(13)と(14)式の比較から、推定法1は、

$$-\pi < R_{mn}(\{n_{ij}\}) < \pi \quad (15)$$

が成り立つとき E_{mn} を正しく推定することがわかる。本報告の目的は、推定法1より優れた推定法を構築することである。このために、

$$E_{mn}^{(a)} = R_{mn}^{(a)}(\{\bar{\beta}_{ij}\})/2\pi \quad (16)$$

$$E_{mn}^{(b)} = R_{mn}^{(b)}(\{\bar{\beta}_{ij}\})/2\pi \quad (17)$$

で定義される量、 $E_{mn}^{(a)}$ と $E_{mn}^{(b)}$ とを考える。ただし、 $R_{mn}^{(a)}$ と $R_{mn}^{(b)}$ は演算子で

$$R_{mn}^{(a)}(\{\bar{\beta}_{ij}\}) = \bar{\beta}_{mn} - \bar{\beta}_{m-1,n} - \bar{\beta}_{1,m+n-1} + \bar{\beta}_{1,m-1} \quad (18)$$

$$R_{mn}^{(b)}(\{\bar{\beta}_{ij}\}) = \bar{\beta}_{m-1,n} - \bar{\beta}_{m-1,n+1} - \bar{\beta}_{1,n} + \bar{\beta}_{1,m+n-1} \quad (19)$$

*1 Marron らは $C\beta'/2\pi$ の成分を推定すると言っているが、彼らの方法で推定されるのは $C\bar{\beta}/2\pi$ の成分すなわち E_{mn} である。

である。 E_{mn} の場合と同様にしてわれわれは $E_{mn}^{(a)}$ と $E_{mn}^{(b)}$ とが整数であること、さらに、次式

$$E_{mn} = E_{mn}^{(a)} + E_{mn}^{(b)} \quad (20)$$

が成立することを示すことができる。これらの事実から E_{mn} は(14)式ばかりでなく測定値 $\bar{\beta}_{mn}$ から次式

$$\check{E}_{mn}^{(2)} = \text{Int}[R_{mn}^{(a)}(\{\bar{\beta}_{ij}\})/2\pi] \\ + \text{Int}[R_{mn}^{(b)}(\{\bar{\beta}_{ij}\})/2\pi] \quad (21)$$

によっても推定できることがわかる。(21)式による推定法を推定法2と呼ぶ。同様にして、われわれは E_{mn} が

$$\check{E}_{mn}^{(3)} = \text{Int}[R_{mn}^{(c)}(\{\bar{\beta}_{ij}\})/2\pi] \\ + \text{Int}[R_{mn}^{(d)}(\{\bar{\beta}_{ij}\})/2\pi] \quad (22)$$

によっても推定できることを示すことができる。ただし、

$$R_{mn}^{(c)}(\{\bar{\beta}_{ij}\}) = \bar{\beta}_{mn} - \bar{\beta}_{m,n+1} - \bar{\beta}_{1,n} + \bar{\beta}_{1,m+n} \quad (23)$$

$$R_{mn}^{(d)}(\{\bar{\beta}_{ij}\}) = \bar{\beta}_{m,n+1} - \bar{\beta}_{m-1,n+1} \\ - \bar{\beta}_{1,m+n} + \bar{\beta}_{1,m-1} \quad (24)$$

である。(22)式による推定法を推定法3と呼ぶ。ただし、この推定法は $\bar{\beta}_{m,n+1}$ と $\bar{\beta}_{1,m+n}$ の値を必要とするため、 $E_{m,N-m}$ ($2 \leq m \leq N/2$) を推定することはできない。推定法1よりも優れた E_{mn} の推定を実現するため、上述の三つの推定法を多数決の原理によって組み合わせた以下の推定法を構築する。

(i) 推定法1、2、3を実行し、 $\check{E}_{mn}^{(1)}$ 、 $\check{E}_{mn}^{(2)}$ 、 $\check{E}_{mn}^{(3)}$ を生成する。

(ii) $\check{E}_{mn}^{(1)}$ 、 $\check{E}_{mn}^{(2)}$ 、 $\check{E}_{mn}^{(3)}$ のうち少なくとも二つが相等しい場合には、それらを E_{mn} の推定値とする。

(iii) $\check{E}_{mn}^{(1)}$ 、 $\check{E}_{mn}^{(2)}$ 、 $\check{E}_{mn}^{(3)}$ のすべてが互いに異なる場合には、 $\check{E}_{mn}^{(1)}$ を E_{mn} の推定値とする。

(iv) ただし、 $E_{m,N-m}$ ($2 \leq m \leq N/2$) にたいしては常に $\check{E}_{m,N-m}^{(1)}$ を推定値とする。

(i)～(iv)で定義される推定法を組合せ推定法と呼ぶ。

4. 計算機シミュレーションによる検討

組合せ推定法の性能を計算機シミュレーションによって確かめる。Fig. 1 に示す物体を例にとって。物体のサンプル点数は128である(実の物体であるので、半数の64個のサンプル位相だけを推定すればよい。すなわち、 $N=64$)。測定ノイズとして、平均値がゼロで標準偏差が σ_n の正規乱数を用いる。Table 1 に誤って推定された E_{mn} の平均個数を推定法1を用いた場合と組合せ推定法を用いた場合について示す。ただし、それぞれの平均個数は100回のシミュレーションを行って得られたものである。推定すべき E_{mn} の総数は961である。この表は、組合せ推定法が推定法1より優れていることを

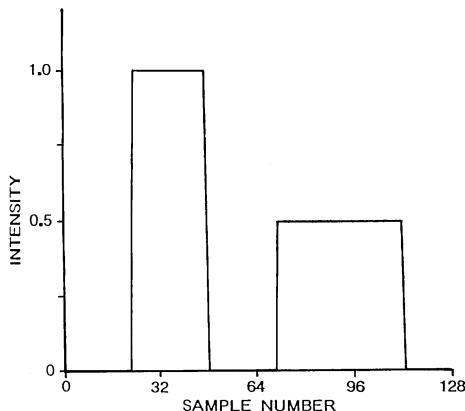


Fig. 1 Original object.

Table 1 Average numbers of E_{mn} incorrectly estimated in the two methods.

σ_n (rad)	Previous method (Method 1)	Proposed method (Combination method)
0.4	0	0
0.45	0.51	0.05
0.5	1.73	0.29
0.55	4.21	1.22
0.6	8.49	3.17
0.65	15.20	7.05
0.7	23.43	13.16

はっきりと示している。例えば $\sigma_n=0.5$ rad の場合には、組合せ推定法によって誤って推定される E_{mn} の平均個数は推定法 1 によるその 20 パーセント以下である。われわれは、常に E_{mn} の正しい値を使って位相を回復することのできる理想最小自乗位相推定を想定し、実際の最小自乗推定における位相推定エラーの rms 値を

$$\sigma_\phi = \left\{ N^{-1} \sum_{m=1}^N (\check{\phi}_m - {}^{(i)}\bar{\phi}_m)^2 \right\}^{1/2} \quad (25)$$

によって定義する。ただし、 $\check{\phi}_m$ は実際の推定における推定位相であり、 ${}^{(i)}\bar{\phi}_m$ は理想推定における真の位相すなわち理想推定においてアンラッピングされたバイスペクトル位相の信号分 ${}^{(i)}\beta_{mn}$ から回復された位相である。**Fig. 2(a)** と(b) に真のフーリエ振幅と推定位相 $\check{\phi}_m$ とから回復された像の $\sigma_n=0.55$ rad の場合の例を示す。この例では、組合せ推定法を用いることにより、誤って推定される E_{mn} の個数を推定法 1 による個数の 4 から 1 に減じることができる。このため、 σ_ϕ の値も 0.34 rad から 0.19 rad に減少している。組合せ推定法を用

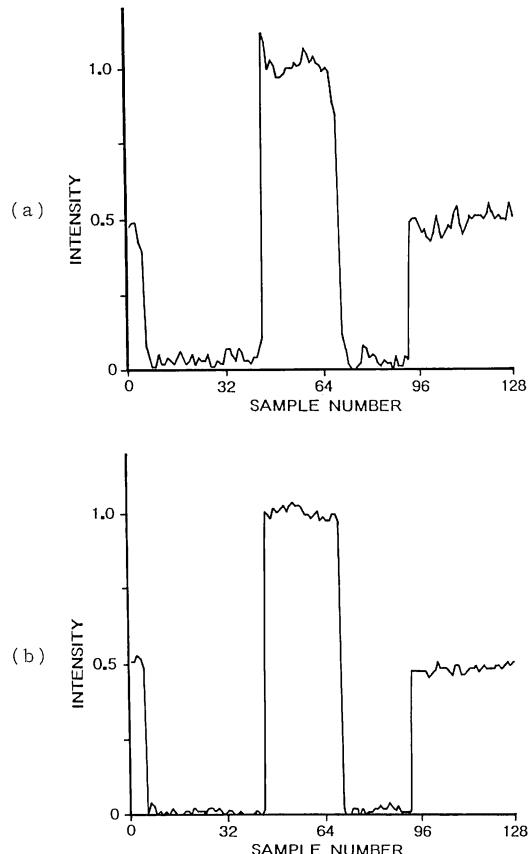


Fig. 2 Reconstructed images obtained from estimated phases for $\sigma_n=0.55$ rad. (a) E_{mn} is estimated by Method 1. The number of E_{mn} incorrectly estimated is 4. $\sigma_\phi=0.34$ rad. (b) E_{mn} is estimated by Combination Method. The number of E_{mn} incorrectly estimated is 1. $\sigma_\phi=0.19$ rad.

いる効果は回復像にもよく現れている。

5. ま と め

バイスペクトル位相からの最小自乗位相推定においては、アンラッピング必要指標の値を知る必要がある。本報告の目的は、最小自乗位相推定をより大きなノイズに適用できるように拡張するために、これらの指標を推定するためのより優れた方法を構築することであった。このために、われわれは組合せ推定法を提案した。この推定法は、それぞれの指標が一通り以上の方法で推定できるという事実および多数決原理に基づいている。われわれは、組合せ推定法によって指標の推定を改善できること、その結果位相回復および像回復に改善がもたらされることを計算機シミュレーションによって示した。

文 献

- 1) A. W. Lohmann and B. Wirnitzer: "Triple correlations," Proc. IEEE, **72** (1984) 889-901.
- 2) H. Bartelt, A. W. Lohmann and B. Wirnitzer: "Phase and amplitude recovery from bispectra," Appl. Opt., **23** (1984) 3121-3129.
- 3) J.C. Marron, P.P. Sanchez and R.C. Sullivan: "Unwrapping algorithm for least-squares phase recovery from the modulo 2π bispectrum phase," J. Opt. Soc. Am. A, **7** (1990) 14-20.
- 4) H. Takajo and T. Takahashi: "Noniterative method for obtaining the exact solution for the normal equation in least-squares phase estimation from the phase difference," J. Opt. Soc. Am. A, **5** (1988) 1818-1827.
- 5) 高城洋明, 高橋 健: "位相差からの最小自乗位相推定におけるエラーの考察", 光学, **19** (1990) 375-382.