



繰返し型位相回復アルゴリズムの停滞に関する一考察

高城 洋明*・待鳥 誠範**・高橋 徹***・永野 直広*

* 九州工業大学電子工学教室 〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1

** アンリツ(株) 〒243 厚木市恩名 1800

*** 大分工業高等専門学校電気工学教室 〒870-01 大分市大字牧 1666

(1991年5月20日受付, 1991年7月8日受理)

A Study on the Stagnation of an Iterative Phase-Retrieval Algorithm

Hiroaki TAKAJO,* Shigenori MATTORI,** Tohru TAKAHASHI***
and Naohiro NAGANO*

* Department of Electronic Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1, Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu 804

** Anritu Corporation, 1800, Onna, Atsugi 243

*** Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology,
1666, Maki, Oita 870-01

(Received May 20, 1991; Accepted July 8, 1991)

The purpose of this paper is to illuminate the stagnation problem of the error reduction algorithm (ER) which is the most fundamental of the iterative phase-retrieval algorithms. To this end, reconstruction of a small object defined on 2×2 pixels is investigated, using an analytical approach. It is shown theoretically that, even if the Fourier amplitude and the support of the object are known precisely, there exist initial starts from which ER can never arrive at the object. The reason why ER stagnates if those initial starts are employed is also discussed.

1. はじめに

信号のフーリエ振幅から信号そのものを、換言すれば信号のフーリエ位相を回復する問題、いわゆる位相回復問題は、天体スペックル干渉法や波面計測あるいはホログラフィーなど様々な分野において重要である。これまでに位相回復を実行するための多くのアルゴリズムが提案されているが、現在最もよく用いられているのは繰返し型のフーリエ変換アルゴリズムであろう¹⁾。これはこのアルゴリズムが、必要とする計算量が少ない、適用可能なための制約条件が少ない、2次元物体にも容易に適用できる、などの利点を有しているためであると考えられる。しかしながら、このアルゴリズムには重大な欠点もある。すなわち、Fienup らはこのアルゴリズムが時

として回復すべき物体に到達していないにもかかわらず停滞 (stagnation) してしまうことを指摘した²⁾。同時に彼らはこの欠点を克服するためのいくつかの方法を提案しているが、著者の知る限りではこれらによって停滞問題が完全に解決されたとは言い難い。言うまでもなく、この問題を完全に解決するためには、まず、(1)繰返しアルゴリズムの挙動を十分に把握し、(2)停滞の原因とそのメカニズムを理論的に明らかにすること、が必要である。しかしながら、繰返しアルゴリズムには非線形演算が含まれているため、その挙動の理論的解析は容易ではなく、上記2項目の事柄はいまだに達成されてはいない。例えば、アルゴリズムが停滞するということについても、ただ経験論的に知られているだけである。

Seldin らは最近、取扱いやすいという理由から、 $2 \times$

2 あるいは 2×3 画素から構成される小規模な物体を対象にして、位相回復問題における解の一意性とアルゴリズムの停滞について検討している³⁾。その結果として彼らは、回復すべき物体の最も近いところにある一意のない像 (nearest ambiguous image) とアルゴリズムの停滞する点とが深い係わりあいをもつのではないか、との見解を述べている。しかしながらここでの彼らの研究は計算機を用いた経験論的なものであり、彼らの見解も必ずしも確定的なものではない。

本報告でわれわれは、アルゴリズムの停滞問題解決のための第一歩として、フーリエ変換アルゴリズムのなかで最も基本的なエラーリダクション・アルゴリズム (error reduction algorithm, 以下 ER と略記) の停滞について、特にアルゴリズムの初期値 (2次元の量を扱うので以下では初期物体と言う) と停滞との関係について考察する。Seldin らと同様にわれわれもまた 2×2 の小規模物体を対象にする。われわれは、 2×2 の小規模な物体の場合でありしかも特定の物体の例に対してではあるが、たとえ物体の振幅とサポート (物体が占める領域) が正確にわかっていたとしても、ER が決してその物体には到達できず、他の物体に収束するような初期物体の集合が存在することを理論的に明らかにする。また、われわれは物体のフーリエ変換の二つの座標軸上およびそれらと 45 度をなす対称軸上の最高周波数成分を、簡単に“三つの最高周波数成分”と呼ぶことにする。このとき初期物体と回復すべき物体のこれら三つの最高周波数成分の位相の不一致が、ER の停滞を引き起こす原因となり得ることを示す。

2. 小規模物体におけるアルゴリズムの停滞の検討

4×4 画素上に存在する L 字型のサポートをもつ次の物体

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

を考える (破線はサポートを示す)^{*1)}。(1)式の右辺で物体領域の座標の原点は3行2列目の要素の位置にあるものとし、この要素を (0, 0) 要素、また例えばその右隣りおよび真上の要素をそれぞれ (1, 0) および (0, 1) 要素な

*1) 一般にある物体のフーリエ振幅分布を表すにはその物体のサポートの4倍の領域を必要とする。したがって、ゼロを加えて 4×4 画素で \mathbf{g} を定義する。

どと呼ぶ。

さて、原物体 \mathbf{g} を ER でそのフーリエ振幅から回復することを考えよう。ただし、振幅は正確にわかっているものとし、正確なサポート拘束と非負拘束とを用いるものとする。L字型のサポートをもつ \mathbf{g} の Z 変換は容易に示せるように既約 (irreducible) である。このことは、 \mathbf{g} が振幅とサポートとによって一意に定まることを意味する⁴⁾。したがって、もしも ER が \mathbf{g} を上述の条件のもとで回復できなければ、それは \mathbf{g} の一意性に問題があるのではなく、ER の能力に問題があることになる。われわれは、次の物体

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

を ER の初期物体に選ぶ。ただし、 a_0 と b_0 は、 $a_0 > 0$ であり $b_0 > 0$ である任意の実数である。すなわち、初期物体は三つの画素のうち二つが同じ値をもつ非負物体である。初期物体 \mathbf{g}_0 の DFT (離散フーリエ変換) は容易に計算できて、

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} (a_0 - b_0) + i a_0 & 2a_0 - b_0 \\ a_0 + i(a_0 - b_0) & 2a_0 - i b_0 \\ (a_0 + b_0) + i a_0 & 2a_0 + b_0 \\ a_0 + i(a_0 + b_0) & 2a_0 + i b_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

である。ただし、(3)式の右辺でフーリエ領域の座標の原点は、物体領域の場合と同様に3行2列目の要素の位置にあるものとし、この要素を (0, 0) 要素、その右隣りを (1, 0) 要素などと呼ぶ。したがって、(0, 0) 要素は DFT のいわゆる直流成分、破線で囲んだ (2, 0), (0, 2), (2, 2) 要素は“三つの最高周波数成分”である。ところで原物体 \mathbf{g} の DFT は \mathbf{G}_0 に $a_0 = b_0 = 1$ を代入することによって得られる。したがって、 \mathbf{g} のフーリエ振幅を $|\mathbf{G}|$ と表せば

$$|\mathbf{G}| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 1 \\ \sqrt{5} & 3 & \sqrt{5} & 1 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Table 1 Phase values of (2, 0), (0, 2) and (2, 2) components of the DFTs of the original object g and the initial start g_0 .

| Component | Phase value (rad) of the original object g | Phase value (rad) of the initial strat g_0 in the following two cases | |
|-----------|--|---|---------------|
| | | $0 < b_0/a_0 \leq 2$ | $b_0/a_0 > 2$ |
| (2, 0) | 0 | 0 | 0 |
| (0, 2) | 0 | 0 | π |
| (2, 2) | π | π | π |

である。

われわれは次の事実を指摘する。実数値物体の DFT の三つの最高周波数成分は実数以外の値をとらない。換言すればそれらの成分の位相は 0 か π かである。この事実は、上述の G_0 の破線で囲んだ三つの成分にも現れている。さて、原物体 g と初期物体 g_0 の DFT のこれら三つの最高周波数成分の位相を互いに比較しよう。われわれは両物体のこれら三つの位相を **Table 1** に示す。この表に見られるように、(2, 0)成分と(2, 2)成分の位相は両物体で互いに一致する。これは、われわれが二つの画素における値が一致する物体を初期物体に採用したことに原因する。しかしながら(0, 2)成分の位相は状況が異なる。すなわち、 $0 < b_0/a_0 \leq 2$ の場合には両物体のこの成分の位相は互いに一致するが、 $b_0/a_0 > 2$ の場合には π だけ異なる*2。

まず、 $b_0/a_0 > 2$ の場合から考察しよう。この場合に ER の 1 回の繰返しで得られる物体を求める。そのために G_0 の振幅を(4)式の $|G|$ で置き換える。その結果を逆変換し、サポート条件を印加すれば、

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \gamma_0 a_0 + \frac{1}{8} \alpha_0 (2a_0 + b_0) + \frac{1}{8} \beta_0 (2a_0 - b_0) \\ b_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \gamma_0 b_0 + \frac{1}{4} \alpha_0 (a_0 + b_0) - \frac{1}{4} \beta_0 (a_0 - b_0) \end{aligned} \quad (6)$$

である。 α_0 , β_0 , および γ_0 は

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= [5/\{a_0^2 + (a_0 + b_0)^2\}]^{1/2}, \\ \beta_0 &= \{a_0^2 + (a_0 - b_0)^2\}^{-1/2}, \\ \gamma_0 &= \{5/(4a_0^2 + b_0^2)\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

で与えられる。 g_1 の(0, 0)要素と(1, 0)要素は、 g_0 と同様に、同じ値をもつことに注意しよう。ER の 1 回の繰返しで得られる物体を求めるには、この g_1 に非負条件を印加すればよい。ところでわれわれは、(6)式に簡単な変形を施すことにより、 a_1 と b_1 が共に a_0 と b_0 の比すなわち b_0/a_0 だけの関数であることを導くことができる。さらにわれわれは、 a_1 と b_1 の b_0/a_0 についての微係数を求め、 a_1 と b_1 の b_0/a_0 に対する挙動を調べることににより、 a_1 と b_1 が正であることを示すことができる。このことは、(5)式の g_1 が既に非負条件を満足していること、したがって ER の 1 回の繰返しで得られる物体は g_1 によって与えられることを示している。ER の 2 回以上の繰返しで得られる物体も、 g_1 を求めたのと同様の計算と考察を繰り返すことによって得られる。すなわち、われわれは次の結果を得る。ER の m 回の繰返しで得られる物体 g_m の(0, 0)および(1, 0)要素は同じ値をもち、それらの値を a_m とすれば

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \gamma_{m-1} a_{m-1} + \frac{1}{8} \alpha_{m-1} (2a_{m-1} + b_{m-1}) \\ &\quad + \frac{1}{8} \beta_{m-1} (2a_{m-1} - b_{m-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

である。また、 g_m の(0, 1)要素の値を b_m と表せば、

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \gamma_{m-1} b_{m-1} + \frac{1}{4} \alpha_{m-1} (a_{m-1} + b_{m-1}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \beta_{m-1} (a_{m-1} - b_{m-1}) \end{aligned} \quad (9)$$

である。ただし、 $m \geq 1$ である。

$0 < b_0/a_0 \leq 2$ の場合についても同様にして、

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \gamma_{m-1} a_{m-1} + \frac{1}{8} \alpha_{m-1} (2a_{m-1} + b_{m-1}) \\ &\quad + \frac{1}{8} \beta_{m-1} (2a_{m-1} - b_{m-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \gamma_{m-1} b_{m-1} + \frac{1}{4} \alpha_{m-1} (a_{m-1} + b_{m-1}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \beta_{m-1} (a_{m-1} - b_{m-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

となることを導くことができる。ただし、 a_m は m 回目の物体の(0, 0)および(1, 0)要素の値であり、 b_m は、(0, 1)要素の値である。

さてわれわれは、(8), (9)式から興味ある次の事実を導くことができる。ただし、証明は付録に掲げる。

[I-A] $b_0/a_0 > 2$ が成立するならば、任意の m に対

*2 $b_0/a_0 = 2$ のときには(0, 2)成分の振幅がゼロであるため位相は不定となる。この場合には位相の値としてゼロを採用するアルゴリズムを仮定する。

して $b_m/a_m > 2$ が成り立つ.

この事実は, ER によって生成される物体の三つの最高周波数成分の位相が繰返しの途中で全く変化しないことを示している. したがって, $b_0/a_0 > 2$ なる初期物体から出発する限り ER によって原物体は決して得られない. 同じく(8), (9)式からわれわれはさらに次の事実を導くことができる(証明は付録を参照).

[I-B] $b_0/a_0 > 2$ なるいかなる初期物体から出発しても, ER はある決まった物体(当然ながら原物体ではない)に収束する.

どのような物体に収束するかは, $b_0/a_0 > 2$ を満足するある一つの初期物体を仮定し, (8), (9)式で示される繰返しを計算機で実行すればよい. 結果は

$$a_f = 0.64209, \quad b_f = 1.43702 \quad (12)$$

である. ただし, a_f は, ER が収束する物体の(0,0)要素と(1,0)要素の値を b_f は(0,1)要素の値を表している.

一方, $0 < b_0/a_0 \leq 2$ の場合についても(10), (11)式から次の事実を導くことができる(証明は同じく付録参照).

[II-A] $0 < b_0/a_0 \leq 2$ が成立するならば, 任意の m に対して $0 < b_m/a_m < 2$ が成り立つ.

したがって, $0 < b_0/a_0 \leq 2$ の場合には, (12)式で示される物体に到達することはあり得ない. この場合には

[II-B] ER は常に原物体に収束する.

以上われわれは 2×2 の特定の物体に対してではあるが, ER の挙動を解析した. その結果, この例の場合, ER によって得られる物体の DFT の三つの最高周波数成分の位相の値は繰返しの途中で全く変化しないこと, このためこれら三つの最高周波数成分の位相の値が原物体と異なる初期物体から出発した場合, ER は原物体に到達できず原物体以外の物体に収束することを理論的に示した.

3. ま と め

本報告でわれわれは, 位相回復のためのエラーリダクション・アルゴリズム(ER)の停滞について, 特に初期物体と停滞との関係について, 考察した. われわれは, 2×2 の小規模物体でありしかも特定の物体に対して

$$k_m = f(k_{m-1})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{k_{m-1}}{\sqrt{k_{m-1}^2 + 4}} + \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{k_{m-1} + 1}{\sqrt{(k_{m-1} + 1)^2 + 1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{k_{m-1} - 1}{\sqrt{(k_{m-1} - 1)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_{m-1}^2 + 4}} + \frac{\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{k_{m-1} + 2}{\sqrt{(k_{m-1} + 1)^2 + 1}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{k_{m-1} - 2}{\sqrt{(k_{m-1} - 1)^2 + 1}} \end{aligned} \quad (A2)$$

ゝではあるが, たとえ物体の振幅とサポートが正確にわかっていたとしても, ER がその物体以外の物体に収束し, 決してその物体には到達できない初期物体の集合が存在することを理論的に証明した. またその理由は, ER によって得られる物体の DFT の三つの最高周波数成分の位相が繰返しの途中で全く変化しないためであることを明らかにした. これらの最高周波数成分の位相は繰返しの途中で連続的には変化できず, 変化するとすれば π だけの不連続な変化でなければならぬ. ここでの結果は, ER では一般にこの π だけの不連続な変化が全く起こらないか, 少なくとも起こりにくいこと, そしてそのことが ER の停滞を引き起こす原因の一つとなり得ることを示唆している. 今後は Seldin らが停滞の原因の一つではないかと推測している nearest ambiguous image とわれわれの解析結果との関連などを検討する予定である. このためにも小規模物体についてももっと多くの例を調査しなければならない. そしてそれらの研究を, できれば大規模物体における位相回復アルゴリズムの停滞の解明の足掛かりにしたいと思っている.

文 献

- 1) J. R. Fienup: "Phase retrieval algorithms: a comparison," *Appl. Opt.*, **21** (1982) 2758-2769.
- 2) J. R. Fienup and C. C. Wackerman: "Phase-retrieval stagnation problems and solutions," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3** (1986) 1897-1907.
- 3) J. H. Seldin and J. R. Fienup: "Numerical investigation of the uniqueness of phase retrieval," *J. Opt. Soc. Am. A*, **7** (1990) 412-427.
- 4) M. H. Hayes: "The reconstruction of a multidimensional sequence from the phase or magnitude of its Fourier transform," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, **ASSP-30** (1982) 140-154.

付録 [I-A]~[II-B]の事実の証明

物体 g_m の全エネルギーは(4)式の $|G|$ で規制されている. このため a_m と b_m についてはそれらの比 b_m/a_m が本質的に重要である. われわれはこの比を k_m とおく. すなわち

$$k_m = b_m/a_m \quad (A1)$$

である. (8), (9)式より $k_{m-1} > 2$ の場合,

を得る。一方、 $0 < k_{m-1} \leq 2$ の場合には (10), (11) 式より

$$\begin{aligned}
 k_m &= f(k_{m-1}) \\
 &= \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{k_{m-1}}{\sqrt{k_{m-1}^2 + 4}} + \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{k_{m-1} + 1}{\sqrt{(k_{m-1} + 1)^2 + 1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{k_{m-1} - 1}{\sqrt{(k_{m-1} - 1)^2 + 1}} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_{m-1}^2 + 4}} + \frac{\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{k_{m-1} + 2}{\sqrt{(k_{m-1} + 1)^2 + 1}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{k_{m-1} - 2}{\sqrt{(k_{m-1} - 1)^2 + 1}}
 \end{aligned} \tag{A3}$$

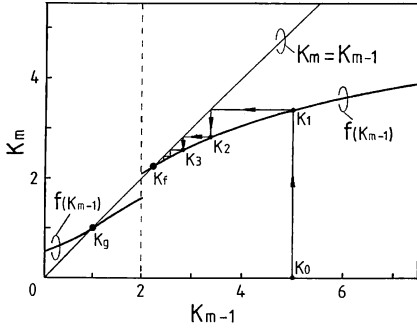


Fig. 1 Relation of k_m versus k_{m-1} . k_g and k_f are the convergence points in the cases of $0 < k_0 \leq 2$ and $2 < k_0$ respectively, where $k_g = 1/1$ (original object) and $k_f = 1.43702/0.64209 (=b_f/a_f)$. When $k_0 = 5$, ER converges to the point k_f passing through the points k_1, k_2, k_3, \dots , shown in this figure.

を得る。Fig. 1 に $k_m = f(k_{m-1})$ のグラフを示す。同図からわかるように $f(k_{m-1})$ は $k_{m-1} = 2$ で不連続であるがこの点以外では連続かつ単調増加な関数である。このことは、 $f(k_{m-1})$ の微係数を解析的に求めることによって示すこともできる。さて、 $f(k_{m-1})$ の連続性と単調増加性より $k_{m-1} > 2$ では、

$$k_m > f(2+0) = 2.07743 > 2 \tag{A4}$$

が成立し、 $0 < k_{m-1} \leq 2$ では

$$k_m > f(+0) = 0.53878 > 0 \tag{A5}$$

$$k_m < f(2-0) = 1.59730 < 2 \tag{A6}$$

が成立することが言える。したがって [I-A] と [II-A] の事実の成立が証明された。

さて、ER の収束が達成されたときには、

$$k_m = k_{m-1} \tag{A7}$$

が成立する。したがって収束点は、(A7) 式のグラフと $f(k_{m-1})$ のグラフの交点として与えられる。 $f(k_{m-1})$ は単調増加であるので、[I-B] と [II-B] の事実を証明するには $0 < k_{m-1} \leq 2$ と $2 < k_{m-1}$ のそれぞれの区間において (A7) 式のグラフと $f(k_{m-1})$ のグラフの交点がただ一つであることが言えればよい。そのためには関数、

$$h(k_{m-1}) = k_{m-1} - f(k_{m-1}) \tag{A8}$$

が $0 < k_{m-1} \leq 2$ と $2 < k_{m-1}$ のそれぞれの区間において、(i) 連続で単調増加であること、(ii) 区間の端点での値が互いに異符号であること、が必要かつ十分である。

$h(k_{m-1})$ が連続であることは明らかなので、(i) を証明するためには $h(k_{m-1})$ の微係数が正であることを言えばよい。そのためには $h(k_{m-1})$ そのものよりも $a_{m-1} \cdot h(k_{m-1})$ の微係数と a_{m-1} の正値性を言うほうが容易であること、そして実際その正値性は解析的に示せることをここでは指摘するだけにする。ところで、(A2) 式より

$$f(\infty) = 5.68328 \tag{A9}$$

が求まる。(ii) が成立することは、上式および (A4) ~ (A6) 式から導くことができる。[I-B] と [II-B] の事実の証明は以上である。なお、Fig. 1 には $k_0 = 5$ の場合の ER の収束の様子も例示する。