

研究

繰返し型位相回復アルゴリズムにおける停滞問題の 数値シミュレーションによる考察

高橋 徹*・高城 洋明**・待鳥 誠範***・永野 直広**

* 大分工業高等専門学校電気工学教室 T870-01 大分市大字牧 1666

** 九州工業大学電子工学教室 T804 北九州市戸畠区仙水町 1-1

*** アンリツ株式会社 T243 厚木市恩名 1800

(1991年9月20日受付, 1991年11月30日受理)

Numerical Investigation of the Stagnation Problems of an Iterative Phase-Retrieval Algorithm

Tohru TAKAHASHI,* Hiroaki TAKAJO,** Shigenori MATTORI***
and Naohiro NAGANO**

* Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology,
1666, Maki, Oita 870-01

** Department of Electronic Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1, Sensuicho, Tobata-ku, Kitakyushu 804

*** Anritsu Corporation, 1800, Onna, Atugi 243

(Received September 20, 1991; Accepted November 30, 1991)

The aim of this paper is to investigate the stagnation problems of the error-reduction algorithm (ER) which is the most fundamental of the iterative phase-retrieval algorithms. To this end, numerical simulations for the reconstruction of 2×2 objects with L-shaped support are carried out with the assumption that their Fourier amplitudes and supports are known precisely. As a result, it is found that two types of stagnations can occur, which are called, in this paper, the perfect and the imperfect stagnations. While ER can never move away from the perfect stagnation even if any more iterations are added, from the imperfect stagnation ER can eventually. The reasons why these stagnations occur are discussed with particular attention to the relations between the occurrence of these stagnations and the choice of the initial starts.

1. はじめに

天体スペックル干渉法やX線結晶学あるいは波面計測などさまざまな分野において、位相回復問題すなわち信号のフーリエ振幅からフーリエ位相を、したがって信号そのものを、回復する問題でくわす。この位相回復を遂行するために開発され広く用いられているアルゴリズムに、フーリエ変換を用いた繰返し型のアルゴリズムがある¹⁾。このアルゴリズムは、必要とする計算量が少ない、ノイズの影響が小さい、二次元物体にも容易に適用できるなどの多くの長所を有しているが、その反面重大な欠点をも有している。すなわち、Fienup らはこのア

ルゴリズムが、回復すべき物体に到達していないにもかかわらず停滞 (stagnation) してしまうことを指摘した²⁾。彼らはまた、繰返し型アルゴリズムのこの欠点を克服するためのいくつかの方法を提案しているが、著者の知る限りでは、それらによって停滞問題が完全に解決されたとはいひ難い。最近 Seldin らは、アルゴリズムの停滞は、回復すべき物体の最も近いところにある一意性のない像 (nearest ambiguous image) と深い関係にあるのではないか、との見解を示した³⁾。しかし、彼らの見解だけでは、物体の一意性が保証されている場合の停滞を明確に説明することはできない。

アルゴリズムの停滞問題を解決するためには、アルゴ

リズムの挙動を十分に把握し、停滞の原因とメカニズムを明らかにすることが必要である。われわれは、この目的のために、フーリエ変換を用いた繰返し型位相回復アルゴリズムのなかで最も基本的なエラーリダクション・アルゴリズム(ERと略記)の停滞について検討する。

前報においてわれわれは、 2×2 の規模で L 型のサポートを持つ特定の物体に対してであり、しかも初期物体が特定の条件を満たす場合についてではあるが、たとえ物体のフーリエ振幅とサポート(物体が占める領域)が正確にわかっていても、ER が決してその物体には到達できず、他の物体に収束する初期物体の集合が存在することを理論的に導いた⁴⁾。また、物体のフーリエ変換の二つの座標軸上およびそれらと 45 度をなす対称軸上の最高周波数成分を、“三つの最高周波数成分”と呼ぶとき、初期物体と回復すべき物体のこれら三つの最高周波数成分の位相の不一致が、ER の停滞を引き起こす原因となり得ることを示した。

本論文では、 2×2 の規模で L 型のサポートを持つ種々の物体を対象にして、ER の挙動を数値シミュレーションにより具体的に調査し、前報の一般性を検証する。前報において現れた停滞は、ER の回復すべき物体以外の物体への収束であり、脱出不可能な停滞である。本論文では、繰返しを行っても回復物体がほとんど変化しない状態がかなりの間続いた後、突然めだった変化を始めるような脱出可能な停滞も存在すること、初期物体と回復すべき物体の三つの最高周波数成分の位相の不一致がこれら二つのタイプの停滞のどちらかを引き起こすこと、などを明らかにする。

2. エラーリダクション・アルゴリズム(ER)

本節では、記号の導入を兼ねて、ER の手順を復習する。回復すべき 2 次元物体(以後原物体と呼ぶ)を $f(x, y)$ と表すとき、そのフーリエ変換 $F(u, v)$ は DFT を用いて、

$$\begin{aligned} F(u, v) &= |F(u, v)| \exp[i\theta(u, v)] = \mathcal{F}[f(x, y)] \\ &= \sum_{x, y} f(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)/N] \end{aligned} \quad (1)$$

として与えられる。逆変換は、

$$f(x, y) = N^{-2} \sum_{u, v} F(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)/N] \quad (2)$$

である。ただし、サンプル点数は $N \times N$ 、 N は偶数であるとし、変数 x, y, u, v はそれぞれ $-(N/2)+1, \dots, 0, \dots, N/2$ の値をとるものとする。一般に、ある物体のフーリ

エ振幅分布を表すには、各々の座標軸方向に物体のサポートの 2 倍の領域を必要とする。したがって、 $f(x, y)$ は領域、 $0 \leq x \leq (N/2)-1, 0 \leq y \leq (N/2)-1$ 、だけでゼロと異なる値をとることができるものとし、それ以外のサンプル点ではゼロであるとする。

ER では、まず任意の初期物体 \mathbf{g}_0 を仮定し、フーリエ変換、逆変換を用いて、フーリエ領域および物体領域での拘束条件を繰返し適用し、収束したときに得られる回復物体 \mathbf{g}_{∞} を原物体 \mathbf{f} の推定物体とする。 m 回目の繰返しに対する処理を具体的に記述すると、

$$\begin{aligned} \text{step 1 : } G_m(u, v) &= |G_m(u, v)| \exp[i\theta_m(u, v)] \\ &= \mathcal{F}[g_m(x, y)] : \text{回復物体の} \\ &\quad \text{フーリエ変換} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{step 2 : } G'_m(u, v) &= |F(u, v)| \exp[i\theta_m(u, v)] : \\ &\quad \text{フーリエ領域の拘束条件の適用 (振幅の置換)} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{step 3 : } g'^m(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}[G'_m(u, v)] : \\ &\quad \text{逆フーリエ変換による出力物体の生成} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{step 4 : } g_{m+1}(x, y) &= \begin{cases} g'^m(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases} : \\ &\quad \text{物体領域の拘束条件の適用} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ただし、 θ_m は m 回目の回復位相であり、 D は物体領域での拘束条件を満たすサンプル点の集合である。物体領域での拘束条件としては、サポート条件や非負条件がよく用いられる。本論文では、サポート条件だけを用いた場合の ER について議論する。

3. ER の挙動と完全なる停滞

次節でシミュレーションとその結果を述べる前に、われわれは ER の挙動に考察を加え、完全なる停滞の概念を導入する。

フーリエ領域でのエラー ε_{Fm} を

$$\varepsilon_{Fm}^2 = N^{-2} \sum_{u, v} [|G_m(u, v)| - |F(u, v)|]^2 \quad (7)$$

によって定義し、物体領域でのエラー ε_{Om} を

$$\varepsilon_{Om}^2 = \sum_{(x, y) \in D} [g'^m(x, y)]^2 \quad (8)$$

によって定義する。 $\varepsilon_{Fm}^2, \varepsilon_{Om}^2$ を $|\mathbf{G}|, \mathbf{g}'$ の関数としてとらえるときは、繰返し回数 m を取り扱って、単に $\varepsilon_F^2, \varepsilon_O^2$ と記すこととする。Fienup は、 $\varepsilon_{Fm}^2, \varepsilon_{Om}^2$ が繰返し回数とともに単調減少すること、すなわち

$$\varepsilon_{Fm+1}^2 \leq \varepsilon_{Om}^2 \leq \varepsilon_{Fm}^2 \quad (9)$$

が成立することを示し、 ε_{Fm}^2 の N^2 個のパラメータ $g_m(x, y)$ についての偏微分が

$$\frac{\partial(\varepsilon_{F_m^2})}{\partial g_m(x, y)} = 2[g_m(x, y) - g'_{m'}(x, y)] \quad (10)$$

と表せるこことを示した¹⁾.

ところで、(10)式を \mathbf{g}'_m について解き、サポート条件を適用すると、 $m+1$ 回目の回復物体は、

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g_m(x, y) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\varepsilon_{F_m^2})}{\partial g_m(x, y)}, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (11)$$

と表すことができる。また、ER が収束したときには、

$$\mathbf{g}_{m+1} = \mathbf{g}_m \quad (12)$$

が成立する。したがって、(11), (12)式より回復物体 \mathbf{g}_m が収束物体であるための条件は、

$$(x, y) \in D \text{ において } \frac{\partial(\varepsilon_{F_m^2})}{\partial g_m(x, y)} = 0, \quad (13)$$

であることが導ける。

上述のように、(11)式は(10)式とサポート条件から、また(13)式は(11)式から容易に導ける式であるが、両者は次の重要な事実を教えてくれる。

回復物体は N^2 個のパラメータ $g_m(x, y)$ で与えられるので、われわれはそれを N^2 次元空間の点によって表すことができる。このとき、(10)式はこの空間における ε_F^2 の勾配ベクトルを定義していると考えられる。一方、ER が ε_F^2 に対して最急降下法と類似であることはよく知られているところである¹⁾。ところで、この事実は通常次のように受け取られているように思われる。すなわち、ER は(10)式で定義される勾配ベクトルの負方向に動いていき、 N^2 次元空間における ε_F^2 の極小点に収束すると。しかしながら、(11)および(13)式はこれらの受け取りかたが正しくないことを示している。サポートに含まれるサンプル数を N_d とするとき、サポート条件を満足する物体は N^2 次元空間内における N_d 次元の部分空間を構成する。(11)および(13)式は、ER が(10)式で定義される N^2 次元空間における勾配ベクトルではなく、このベクトルを N_d 次元部分空間に射影したベクトルの負方向に移動していき、 ε_F^2 の N_d 次元部分空間における極小点に収束することを示している^{*1}。本論文ではとくにことわらない限り、極小点とは N^2 次元空間における極小点ではなく、 N_d 次元部分空間における極小点を意味するものとする。

いうまでもなく原物体は ε_F^2 の極小点であると同時に、 N_d 次元部分空間全体における最小点である。極小

点が複数個存在する場合（それらのうちには必ず原物体がある）、上に述べた ER の挙動に関する議論は、ER がこれらのうちのどれかに収束することを示している。また逆に、ER が収束した場合、それは極小点への収束であることも上の議論から明らかである。どの極小点に収束するかは初期物体によって決定される。このように、ER は原物体以外の極小点に収束し、したがって決して脱出できない停滯に陥る危険性を本来的に有する。ところでわれわれは、次節で示すシミュレーションにおいて、極小点への収束以外の原因で生じる停滯に出会う。この停滯は最終的には脱出可能な停滯である。この停滯と区別するため、極小点への収束が原因で生じる脱出できない停滯を、われわれは完全なる停滯と呼ぶ。

4. ER の挙動の数値シミュレーション

による検討

第1節で述べたとおり、本論文の目的は前報の一般性を検証し、ER の挙動、特に停滯のメカニズムを明らかにすることである。このためにわれわれは、 2×2 の規模で L型のサポートを持つ種々の物体を ER によって回復する数値シミュレーションを行った。本節では、これらの数値シミュレーションとその結果について述べる。

4.1 物体のグループ分け

原物体 \mathbf{f} は、 $f(0, 0) = a$, $f(1, 0) = b$, $f(0, 1) = c$ であり、他のサンプル点での値はゼロである L型のサポートを持つ物体であるとする。すなわち、

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

である。ただし、 a , b , c は正の実数であり、破線はサポートを示す。この原物体のフーリエ変換 $F(u, v)$ は、(1)式からわかるように、

$$F(u, v) = a + bz + cw \quad (15)$$

と表すことができる。ただし、 $z = \exp(-i2\pi u/N)$ であり、 $w = \exp(-i2\pi v/N)$ である。(15)式は、 z と w に対して既約であるので、原物体 \mathbf{f} はフーリエ振幅 $|F|$ とサポート条件から一意に確定する⁵⁾。われわれはフーリエ振幅とサポートとは正確にわかっているものと仮定する。したがって、もしも ER が停滯した場合、それは原物体に一意性の保証がないからではなく、ER の回復能力に問題があることになる。初期物体 \mathbf{g}_0 を

*1: (12), (13)式によれば、ER が収束する点には極小点だけではなく極大点と停留点も含まれる。しかし実際には ER が極大点と停留点に収束する確率はゼロである。

Table 1 Division of the reconstructed objects into four groups.

Group number	Condition that a_m , b_m and c_m must satisfy	The values (rad) of the Fourier phases $\{\theta_m(2, 2), \theta_m(0, 2), \theta_m(2, 0)\}$
I	$a_m - b_m - c_m \geq 0$	$\{0, 0, 0\}$
II	$a_m - b_m + c_m < 0$	$\{\pi, 0, \pi\}$
III	$a_m + b_m - c_m < 0$	$\{\pi, \pi, 0\}$
IV	$a_m - b_m - c_m < 0, a_m - b_m + c_m \geq 0, a_m + b_m - c_m \geq 0$	$\{\pi, 0, 0\}$

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

とおき、 m 回目の回復物体 \mathbf{g}_m を

$$\mathbf{g}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_m & 0 & 0 \\ 0 & a_m & b_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

と表す。ただし、 a_0, b_0, c_0 は正の実数である。 a_m, b_m, c_m については、付録を参照されたい。

(17)式をフーリエ変換して、

$$\mathbf{G}_m = \begin{bmatrix} (\alpha_m - c_m) + i b_m & a_m + b_m - c_m \\ a_m + i(b_m - c_m) & (\alpha_m + b_m) - i c_m \\ (\alpha_m + c_m) + i b_m & a_m + b_m + c_m \\ a_m + i(b_m + c_m) & (\alpha_m + b_m) + i c_m \\ (\alpha_m - c_m) - i b_m & a_m - b_m - c_m \\ a_m - i(b_m + c_m) & (\alpha_m - b_m) - i c_m \\ (\alpha_m + c_m) - i b_m & a_m - b_m + c_m \\ a_m - i(b_m - c_m) & (\alpha_m - b_m) + i c_m \end{bmatrix} \quad (18)$$

が導かれる。上式において破線で囲んで示した三つの最高周波数成分の位相、 $\theta_m(2, 0)$, $\theta_m(0, 2)$, $\theta_m(2, 2)$ の値は 0 か π かのいずれかである。前報と同様にわれわれは初期物体と原物体の三つの最高周波数成分の位相の一一致あるいは不一致が ER の停滞に関係するか、という点に主眼をおいてシミュレーションを行う。そのため、回復物体 \mathbf{g}_m を三つの最高周波数成分の位相の違いによって Table 1 に示す四つのグループに分類する^{*2}。例えばグループ I には Table 1 の第 2 欄に示す条件を満足する a_m, b_m, c_m からなる回復物体が所属する。同表の第 3 欄からわかるようにグループ I に属する回復物体の三つの

最高周波数成分の位相はすべてゼロである。

ところで、位相回復において重要な量は、回復物体の各点の値の比である。付録に示すように、初期値 a_0, b_0, c_0 が正であるとき、 a_m, b_m, c_m も正である。したがって回復物体は基本的に以下の二つのパラメータ

$$s_m = b_m/a_m, \quad t_m = c_m/a_m \quad (19)$$

によって決定される。この事実に着目し、われわれは回復物体を Fig. 1 に示す $s_m - t_m$ 平面の点によって表す。このとき、Table 1 に示す回復物体のグループ分けに応じて、 $s_m - t_m$ 平面は Fig. 1 に示す四つの領域に分割される。例えば、Table 1 のグループ I の回復物体には Fig. 1 の領域 I が対応し、グループ II の回復物体には領域 II が対応する。原物体もまた回復物体と同じサポートを持つ非負物体なので、二組のパラメータ $s=b/a, t=c/a$ 、によって表すことができる。われわれは原物体についても Fig. 1 と同様の領域分けを行うこととする。

4.2 数値シミュレーションの結果とその検討

4.2.1 原物体が領域 IV にある場合

シミュレーションによれば、原物体 \mathbf{f} が領域 IV にある場合とそれ以外の領域にある場合とでは ER の収束の状況がかなり異なる。われわれは、まず原物体が領域 IV にある場合から述べる。この場合を代表して、原物体が $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ である場合の結果を Fig. 2 に示す。種々の初期物体から出発したときに、各回の繰返しにおいて生成される回復物体の位置を直線で結んである。特

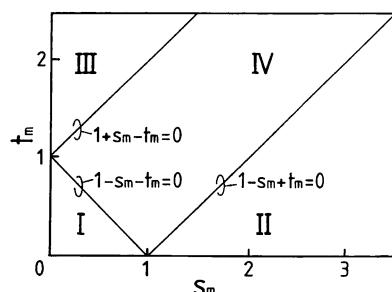


Fig. 1 $s_m - t_m$ plane for representing the reconstructed objects ($s_m = b_m/a_m, t_m = c_m/a_m$)

*2 Table 1 において等号の成立立つときは、位相は不定である。この場合には位相の値としてゼロを用いるアルゴリズムを採用する。

に、領域IVにある初期物体 $\mathbf{g}_0^{(IV)}$ については、各回で得られる回復物体の位置に黒丸を施した。この図から、ERが収束する物体は各領域に一つずつ合計四つあることがわかる。それらのうち領域IVにある収束物体は原物体である。図中には、これらの収束物体を明示するため記号 $\mathbf{g}_{cv}^{(I)}$, $\mathbf{g}_{cv}^{(II)}$, $\mathbf{g}_{cv}^{(III)}$ および \mathbf{f} を付してある。この図はまた、ERは各領域の境界を越えることができないこと、つまり三つの最高周波数成分の位相は繰返しの過程において不变であることを表している。第3節で述べたように、ERは ε_F^2 の極小点に収束する。したがって、 $\mathbf{g}_{cv}^{(I)}$, $\mathbf{g}_{cv}^{(II)}$, $\mathbf{g}_{cv}^{(III)}$ および \mathbf{f} は ε_F^2 の極小点であり、それらのうち \mathbf{f} は ε_F^2 の全領域における最小点である。領域I, II, あるいはIIIにある初期物体から出発する限りERは原物体以外の極小点に収束し、それから脱出することはできない。すなわちERは前節で定義した完全なる停滞を起こす。Fig. 3に、 ε_{Fm} を原物体の全エネルギーで規格化した値：

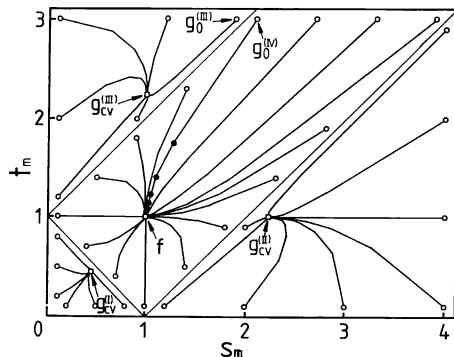


Fig. 2 Behavior of ER in the case where the original object $f=(a, b, c)=(1, 1, 1)$. (○) : positions of the initial starts, (●) : positions of the reconstructed objects in the case where initial start $\mathbf{g}_0^{(IV)}$ is employed, (□) : positions of the convergence objects $\mathbf{g}_{cv}^{(I)}$, $\mathbf{g}_{cv}^{(II)}$, $\mathbf{g}_{cv}^{(III)}$ and \mathbf{f} .

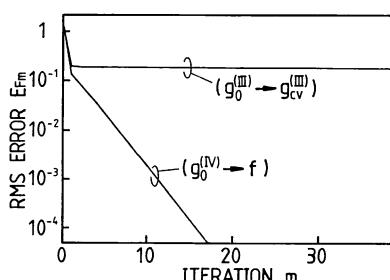


Fig. 3 RMS error E_{Fm} vs the number of iterations in the case where $f=(1, 1, 1)$ and the initial start is $\mathbf{g}_0^{(IV)}$ or $\mathbf{g}_0^{(III)}$ shown in Fig. 2.

$$E_{Fm} = \left[\frac{\varepsilon_{Fm}^2}{N^{-2} \sum \sum |F(u, v)|^2} \right]^{1/2} \quad (20)$$

と繰返し回数との関係を、初期物体が $\mathbf{g}_0^{(III)}$ と $\mathbf{g}_0^{(IV)}$ である場合について示す。 $\mathbf{g}_0^{(IV)}$ から出発した場合ERは原物体に到達するが、 $\mathbf{g}_0^{(III)}$ から出発した場合には完全なる停滞を引き起こすことがこの図からもわかる。前報でわれわれは、この例と同じ原物体をとりあげ、初期物体が $s_m=1$ の直線上にある場合についてのERの挙動を理論的に解析した。その結果、初期物体が原物体に収束するグループと原物体ではない物体に収束するグループに分けられることを導いた。Fig. 2は、このことが、 $s_m=1$ の直線上にある初期物体ばかりではなく一般の初期物体に対しても成り立つことを示している。

われわれのシミュレーションによれば、 $(a, b, c)=(1, 1, 1)$ 以外の原物体の場合にも、それが領域IVにあるならば、四つの領域のそれぞれに収束物体が存在するなど、上に述べたERの収束に関する特徴は全て保持される。

4.2.2 原物体が領域IV以外の領域にある場合

ここでは原物体が領域IIにある場合の例で議論する。

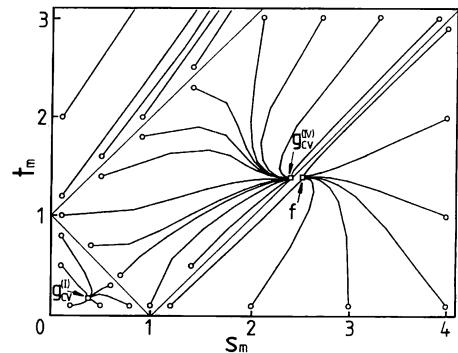


Fig. 4 Behavior of ER in the case where $f=(1, 2, 5, 1.4)$.

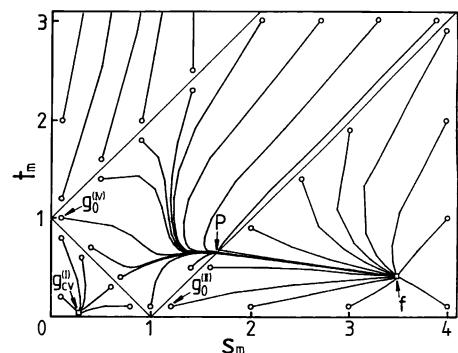


Fig. 5 Behavior of ER in the case where $f=(1, 3, 5, 0.4)$.

Fig. 4 と **Fig. 5** に、原物体が $(a, b, c) = (1, 2.5, 1.4)$ の場合と $(a, b, c) = (1, 3.5, 0.4)$ の場合のシミュレーション結果を示す。Fig. 5 では、Fig. 4 に比べて原物体の位置が領域IIとIVとの境界から離れていることに注意しよう。

まず Fig. 4 の場合から、すなわち原物体が $(1, 2.5, 1.4)$ である場合から述べる。同図から、それぞれの領域に一つずつ合計四つの収束物体が存在し、それらのうち領域IIにある収束物体は原物体であることがわかる（領域IIIの収束物体は Fig. 4 に描かれている部分のずっと上方にある）。領域II以外にある初期物体から出発すると、それぞれの領域に存在する収束物体に収束し、ER は完全なる停滞を起こす。これらの状況は先に述べた原物体が領域IVにある場合のそれと基本的に同じである。

さて、原物体を領域IIとIVとの境界から遠ざかる方向に移動させると、領域IVにある収束物体は境界の方に近づいていき、ついには消滅することがシミュレーションによって確かめられる。したがって、原物体がそのような位置以上に領域IIとIVとの境界から離れている場合には、状況は Fig. 4 の場合とは異なる。Fig. 5 はこのような場合の例である。この図から収束物体は領域I, II, III に一つずつ合計三つあり、領域IVには存在しないことがわかる。またこのために、初期物体が領域IV以外の領域にある場合の状況は Fig. 4 の場合と同じであるが、初期物体が領域IVにある場合の状況は Fig. 4 とは異なっていることがわかる。図中の点Pは、 ε_r^2 が領域IVの内部および境界上で最小となる位置を示している。点Pは領域IIとIVとの境界上にある。ER は ε_r^2 の減少する方向に動くので、領域IVにある初期物体から出発すると、ほとんどの場合点Pの近傍に到達する。点Pは極小点ではないので、ER はここには留まらず、境界を通り抜けて領域IIにある原物体に収束する。われわれはERが通り抜けることのできる境界の部分を境界の穴と呼ぶ。

原物体が領域IあるいはIIIにある場合も、状況は基本的に同じである。すなわち、原物体がそれぞれの領域において領域IVとの境界に比較的近い位置にある場合には、Fig. 4 のタイプの状況が現れ、遠い位置にある場合には Fig. 5 のタイプの状況が現れる。

4.2.3 原物体が各領域の境界上にある場合

最後に原物体が領域の境界上にある場合について述べる。Fig. 6 に、原物体が $(a, b, c) = (1, 2, 1)$ である場合のシミュレーション結果を示す。Fig. 6 では領域IIとIVが合体して一つの領域になっている。このように原物体

が各領域の境界上にある場合には、その境界は完全に消失する。

4.3 領域移動と不完全な停滞

4.2 節で見たように、Fig. 5 で初期物体が領域IVにある場合、ER は領域IIとIVとの境界を通り抜けて原物体に収束する。本節では、この興味ある場合についてさらに検討する。

Fig. 5 に示す初期物体 $\mathbf{g}_0^{(IV)}$ から出発した場合の E_{Fm} と繰返し回数との関係を Fig. 7 に掲げる。同図には、Fig. 5 中の初期物体 $\mathbf{g}_0^{(II)}$ から出発した場合の関係も掲げてある。両者の場合とも原物体に収束するため、 E_{Fm} はともにゼロに収束する。しかしながら、前者の場合すなわち初期物体が $\mathbf{g}_0^{(IV)}$ の場合には、極めて特徴的な収束の仕方をしていることをこの図は示している。すなわち、 E_{Fm} はスムーズにゼロに収束するのではなく、10回目から21回目に見られるように、繰返しをかなりの回数行ってもほとんど変化しない状態が続いた後、再び急速な変化を始めゼロに収束する。回復物体は21回目までは領域IVの中にある。22回目で境界の穴の部分を通り抜けて、領域IIに入る。したがって Fig. 7 は、ER が境

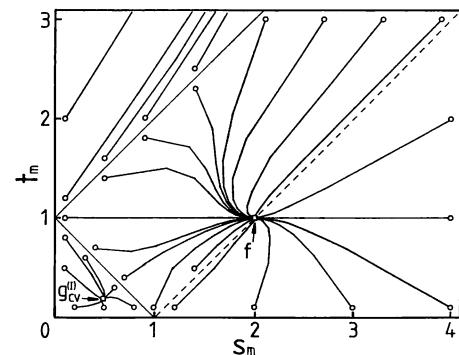


Fig. 6 Behavior of ER in the case where $\mathbf{f} = (1, 2, 1)$.

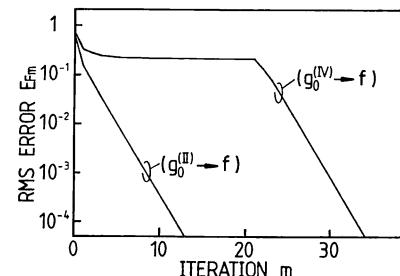


Fig. 7 RMS error E_{Fm} vs the number of iterations in the case where $\mathbf{f} = (1, 3.5, 0.4)$ and the initial start is $\mathbf{g}_0^{(IV)}$ or $\mathbf{g}_0^{(II)}$ shown in Fig. 5.

界の穴の部分を通り抜ける前に、 E_{Fm} がほとんど一定となる状態が生じること、いったん通り抜けると再び急速に減少することを示している。われわれのシミュレーションでは、この現象は境界の通り抜けが起こるすべての例において見られた。

回復物体あるいは E_{Fm} が収束したと思える程度にしか変化しない状態が続いた後、突然目立った変化を始めその状態から脱出できる場合、ER は不完全な停滯をするということにする。シミュレーションの結果は、ER は領域間を移動できる場合もあるが、この場合には不完全な停滯が引き起こされることを示している。

5. 境界の近傍における ER の挙動

前節のシミュレーションによれば、ER は領域 I ~ IV の境界をまったく越えられないか、越えられるとしても境界の穴の部分だけである。本節では、この原因を探るためにの考察を行う。

第3節で議論したように、ER の挙動は(10)式で定義される N^2 次元の勾配ベクトルを N_D 次元部分空間へ射影したベクトルによって制御される。ここでは、前者のベクトルをただ単に勾配ベクトル、後者を射影勾配ベクトルと呼ぶことにする。

境界上の 1 点に着目しよう。この点を \mathbf{g} と表す。三つの最高周波数成分のうち、この境界の両側で位相が π 異なる周波数を (u', v') とする。また、境界の両側の領域のうち、 $\theta(u', v')=0$ である側を (+) 側、 $\theta(u', v')=\pi$ である側を (-) 側と呼ぶことにする。 (+) 側および (-) 側にあり \mathbf{g} に極めて接近した点をそれぞれ $\mathbf{g}^{(+)}$ および $\mathbf{g}^{(-)}$ とする。 $\mathbf{g}^{(+)}$ と $\mathbf{g}^{(-)}$ は互いに接近しているので、それらのフーリエ変換は、 (u', v') 成分における位相が互いに異なるだけであると考えてさしつかえない。

さて、点 $\mathbf{g}^{(+)}$ と $\mathbf{g}^{(-)}$ における勾配ベクトルの各成分は(10)式から、

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial(\varepsilon_F^2)^{(+)}}{\partial g(x, y)} = -g^{(+)}(x, y) + g'^{(+)}(x, y) \quad (21)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial(\varepsilon_F^2)^{(-)}}{\partial g(x, y)} = -g^{(-)}(x, y) + g'^{(-)}(x, y) \quad (22)$$

で与えられる。ただし(13)式との対応を考慮して、 $-1/2$ の係数をつけて勾配ベクトルを定義した。また、 $\mathbf{g}^{(+)}$ と $\mathbf{g}^{(-)}$ は、それぞれ $\mathbf{g}^{(+)}$ と $\mathbf{g}^{(-)}$ を入力したときの ER の出力物体である。(4)および(5)式からわかるように、 $\mathbf{g}^{(+)}$ と $\mathbf{g}^{(-)}$ のフーリエ変換の振幅は原物体の振幅と同じであり、位相は $\mathbf{g}^{(+)}$ と $\mathbf{g}^{(-)}$ の位相と同じである。したがって、

$$\begin{aligned} g'^{(+)}(x, y) &= N^{-2} \sum_{u, v} |F(u, v)| \exp[i\theta(u, v)] \\ &\quad \exp[i2\pi(ux+vy)/N] \\ &= \bar{g}'(x, y) + N^{-2}|F(u', v')| \exp[i\cdot 0] \\ &\quad \exp[i2\pi(u'x+v'y)/N] \\ &= \bar{g}'(x, y) + N^{-2}|F(u', v')| \\ &\quad \exp[i2\pi(u'x+v'y)/N], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} g'^{(-)}(x, y) &= \bar{g}'(x, y) + N^{-2}|F(u', v')| \exp[i\cdot\pi] \\ &\quad \exp[i2\pi(u'x+v'y)/N] \\ &= \bar{g}'(x, y) - N^{-2}|F(u', v')| \\ &\quad \exp[i2\pi(u'x+v'y)/N] \end{aligned} \quad (24)$$

が成り立つ。ただし、

$$\begin{aligned} \bar{g}'(x, y) &= N^{-2} \sum_{(u, v) \neq (u', v')} |F(u, v)| \exp[i\theta(u, v)] \\ &\quad \exp[i2\pi(ux+vy)/N] \end{aligned} \quad (25)$$

である。(23)と(24)式を(21)と(22)式に代入して、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial(\varepsilon_F^2)^{(+)}}{\partial g(x, y)} &= \bar{g}'(x, y) - g^{(+)}(x, y) + N^{-2}|F(u', v')| \\ &\quad \exp[i2\pi(u'x+v'y)/N], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial(\varepsilon_F^2)^{(-)}}{\partial g(x, y)} &= \bar{g}'(x, y) - g^{(-)}(x, y) - N^{-2}|F(u', v')| \\ &\quad \exp[i2\pi(u'x+v'y)/N] \end{aligned} \quad (27)$$

を得る。さて $\mathbf{g}^{(+)}$ と $\mathbf{g}^{(-)}$ を \mathbf{g} に限りなく近づけよう。このとき、(26)と(27)式の第1項と第2項の和を成分とするベクトルは境界に平行となる。なぜならば、(25)式から明らかのように第1項のフーリエ変換の (u', v') 成分はゼロであるので第1項は境界上の1点を表し、第2項もまた境界上の点 (\mathbf{g} そのもの) を表すからである。われわれはさらに、フーリエ変換の定義から、(26)ならびに(27)式の第3項を成分とするベクトルが境界に垂直で、それぞれ境界から (+) 側の領域ならびに (-) 側の領域を向いていることを導くことができる。したがって、(26)と(27)式で定義される勾配ベクトルは、それぞれ境界から (+) 側と (-) 側の領域の方を向いており、勾配ベクトルは着目している境界上の点を境に不連続に変化していることがわかる。

もしも(26)と(27)式で定義される勾配ベクトルの射影勾配ベクトルがそれぞれ (+) 側および (-) 側の領域の方を向いているならば、ER はこの着目している境界を通り抜けることができない。(26)と(27)式で定義される勾配ベクトルがそれぞれ (+) 側および (-) 側の領域の方を向いているという事実は、それらの射影勾配ベクトルもまたそれぞれ (+) 側および (-) 側の領域の方を向いている場合が多いことを間接的にではあるが示すもの

である。

6. まとめ

本論文の目的は、繰返し型位相回復アルゴリズムのなかで、最も基本的なアルゴリズムであるエラーリダクション・アルゴリズム(ER)の停滞の原因とメカニズムを明らかにすることであった。そのために、 2×2 の規模で L 型のサポートを持つ物体の回復に関する数値シミュレーションを行った。その結果、二つのタイプの停滞が存在することがわかった。一つは、回復すべき物体(原物体)以外の物体への収束の結果起こるものであり、脱出不可能な停滞である。このタイプの停滞は、ER が(7)式で定義される ϵ_F^2 の N_D 次元部分空間における極小点に収束するという特性を有することに起因する。他の一つは、繰返しを行っても ϵ_F^2 がほとんど変化しない状態がかなりの間続いた後、突然目立った変化が再開されるといったタイプの停滞で、脱出可能な停滞である。われわれは、前者および後者のタイプの停滞をそれぞれ完全なる停滞および不完全な停滞と呼んだ。

われわれは、初期物体を三つの最高周波数成分の位相の違いによって、四つのグループに分けた。シミュレーション結果は、ER の収束の状況が次の二つの場合に大別できることを示している。これらのうち、いずれの場合が起こるかは、原物体に依存する。

場合 1：四つの初期物体のグループのうち、原物体に収束できるグループはただ一つである。それは、三つの最高周波数成分の位相がすべて原物体のそれらと一致するグループである。このグループ以外の初期物体のグループは、それぞれ原物体とは異なる収束物体を有する。したがって、これらのグループに属する初期物体から出発すると、ER は完全なる停滞を起こす。

場合 2：四つの初期物体のグループのうち、二つのグループの初期物体から原物体に到達できる。これらのうちの一つは、場合 1 と同様に三つの最高周波数成分の位相がすべて原物体のそれらと一致するグループである。原物体に到達できるもう一つのグループに属する初期物体から出発した場合には、ER は途中で不完全な停滞を起こす。

以上のシミュレーション結果からわかるように、初期物体と原物体の三つの最高周波数成分の位相の不一致は、完全なる停滞か不完全な停滞かを引き起こす。このことは、繰返しの途中でこれら三つの位相の値がまったく変わらないか、少なくとも変わりにくいことを意味している。本論文ではこの原因についても考察した。

今後の研究課題の一つは、より大規模な物体の場合の停滞問題を検討することである。われわれは、本論文で得られた結果が、より大規模な物体の場合の研究に役立つものと考えている。

文 献

- 1) J. R. Fienup : "Phase retrieval algorithms: a comparison," Appl. Opt., **21** (1982) 2758-2769.
- 2) J. R. Fienup and C. C. Wackerman : "Phase-retrieval stagnation problems and solutions," J. Opt. Soc. Am. A, **3** (1986) 1897-1907.
- 3) J. H. Seldin and J. R. Fienup : "Numerical investigation of the uniqueness of phase retrieval," J. Opt. Soc. Am. A, **7** (1990) 412-427.
- 4) 高城洋明, 待鳥誠範, 高橋徹, 永野直広: "繰返し形位相回復アルゴリズムの停滞に関する一考察", 光学, **20** (1991) 607-611.
- 5) M. H. Hayes : "The reconstruction of a multidimensional sequence from the phase or magnitude of its Fourier transform," IEEE Trans. Acoust., Speech, Sig. Proc., ASSP-30 (1982) 140-154.

付録 回復物体の表式と正値性

原物体 \mathbf{f} と初期物体 \mathbf{g}_0 のサポート内の各成分の値 a, b, c, a_0, b_0, c_0 は正であるとする。今、 m 回目の回復物体 \mathbf{g}_m のサポート内の各成分の値 a_m, b_m, c_m が正であると仮定する。したがって、 b_m, c_m の a_m に対する比 $s_m (=b_m/a_m)$, $t_m (=c_m/a_m)$ は正である。このとき、 a_{m+1} は(17)式に ER の手順(4)～(6)式を用いて、

$$\begin{aligned} g_{m+1}(0,0) = a_{m+1} &= \frac{1}{8} \left[(1+s_m) \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha_m+\beta_m}} \right. \\ &\quad + (1-s_m) \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha_m-\beta_m}} + \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{\alpha_m+\gamma_m}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha_m-\gamma_m}} + (1+t_m) \sqrt{\frac{\alpha+\delta}{\alpha_m+\delta_m}} \\ &\quad \left. + (1-t_m) \sqrt{\frac{\alpha-\delta}{\alpha_m-\delta_m}} + A_{jk} \right], \end{aligned} \quad (A1)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \alpha &= a^2 + b^2 + c^2, \quad \beta = 2ab, \quad \gamma = 2bc, \quad \delta = 2ca, \\ \alpha_m &= 1 + s_m^2 + t_m^2, \quad \beta_m = 2s_m, \quad \gamma_m = 2s_m t_m, \quad \delta_m = 2t_m \end{aligned} \quad (A2)$$

である。また、 A_{jk} は次式によって与えられる行列 \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c & a+b+c \\ 2b & 2a & 0 & a+b-c \\ 2c & 0 & 2a & a-b+c \\ a+b+c & a+b-c & a-b+c & 2a \end{bmatrix}, \quad (A3)$$

の j 行 k 列要素である。 j と k とは、原物体 \mathbf{f} と回復物体 \mathbf{g}_m とがそれぞれ Table 1 に示すグループ I ～ IV の

どのグループに属すかによって、1~4までの値をとる。例えば、原物体 \mathbf{f} がグループIVに属し回復物体 \mathbf{g}_m がグループIに属すときには、 $j=4$, $k=1$ であり、このときの A_{jk} の値は $a+b+c$ である。

まず、 a_{m+1} の正値性をいう。(A1)式の右辺の(第1項+第2項)は、

[(A1)式の第1項+第2項]

$$\begin{aligned} & \frac{(1+s_m)\sqrt{(\alpha_m-\beta_m)(\alpha+\beta)}}{8\sqrt{(\alpha_m+\beta_m)}} \\ & + \frac{(1-s_m)\sqrt{(\alpha_m+\beta_m)(\alpha-\beta)}}{(\alpha_m-\beta_m)} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

となる。ところで、(A2)式および a , b , s_m の正値性から、(A4)式の分子の第1項の平方と第2項の平方の差は、

$$\begin{aligned} & [(1+s_m)\sqrt{(\alpha_m-\beta_m)(\alpha+\beta)}]^2 \\ & - [(1-s_m)\sqrt{(\alpha_m+\beta_m)(\alpha-\beta)}]^2 \\ & = 4s_m t_m^2(a^2 + b^2 + c^2) \\ & + 4ab[(s_m^2 - 1)^2 + (s_m^2 + 1)t_m^2] > 0 \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

となり、正であることが導ける。したがって、(A4)式の分子の第1項の絶対値は第2項の絶対値よりも常に大きく、かつ第1項は正である。ゆえに(A4)式すなわち(A1)式の右辺の(第1項+第2項)は正の値を有する。(A1)式の第3項、第4項は明らかに正である。(A1)式の(第5項+第6項)について考えると、(A4)式および(A5)式と同様の変形をすることによって正値性をいうことができる。(A1)式の最後の項 A_{jk} は、Table 1 を適用して考えると任意の j , k に対し $A_{jk} \geq 0$ であることがいえる。例えれば $A_{42}=a+b-c$ であるが、この場合原物体はグループIVに属し Table 1 より $a+b-c \geq 0$ であることがわかる。以上より、 a_m , b_m , c_m が正のときの a_{m+1} の正値性がいえた。

ところで、 a_0 , b_0 , c_0 は正であるとしている。したが

って、以上の証明を帰納的に繰り返すことにより、 $m \geq 0$ に対する a_m の正値性と(A1)式の成立がいえる。

b_{m+1} , c_{m+1} に対しても次の表式、

$$\begin{aligned} g_{m+1}(1, 0) = b_{m+1} &= \frac{1}{8} \left[(s_m + 1) \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha_m + \beta_m}} \right. \\ & + (s_m - 1) \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha_m - \beta_m}} + (s_m + t_m) \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{\alpha_m + \gamma_m}} \\ & \left. + (s_m - t_m) \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha_m - \gamma_m}} + s_m \sqrt{\frac{\alpha + \delta}{\alpha_m + \delta_m}} \right. \\ & \left. + s_m \sqrt{\frac{\alpha - \delta}{\alpha_m - \delta_m}} + B_{jk} \right], \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} g_{m+1}(0, 1) = c_{m+1} &= \frac{1}{8} \left[t_m \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha_m + \beta_m}} + t_m \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha_m - \beta_m}} \right. \\ & + (t_m + s_m) \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{\alpha_m + \gamma_m}} + (t_m - s_m) \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha_m - \gamma_m}} \\ & \left. + (t_m + 1) \sqrt{\frac{\alpha + \delta}{\alpha_m + \delta_m}} + (t_m - 1) \sqrt{\frac{\alpha - \delta}{\alpha_m - \delta_m}} \right. \\ & \left. + C_{jk} \right], \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

を得ることができる。ただし、 B_{jk} と C_{jk} とは次の行列

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2b & 2a & 0 & a+b-c \\ 2a & 2b & 2c & a+b+c \\ 0 & 2c & 2b & -a+b+c \\ a+b-c & a+b+c & -a+b+c & 2b \end{bmatrix}, \quad (\text{A8})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & 0 & 2a & a-b+c \\ 0 & 2c & 2b & -a+b+c \\ 2a & 2b & 2c & a+b+c \\ a-b+c & -a+b+c & a+b+c & 2c \end{bmatrix} \quad (\text{A9})$$

の j 行 k 列要素である。これらの表式から a_m の正値性を示したのと同様にして b_m と c_m の正値性を示すことができる。