

## 講義

## フレッシュマンのための現代光学—I

## 解析幾何光学入門(1)

黒田和男

東京大学生産技術研究所 〒106 東京都港区六本木 7-22-1

(1992年1月31日受理)

## Modern Optics for Freshmen—I

## Introduction to Advanced Geometrical Optics (1)

Kazuo KURODA

Institute of Industrial Science, University of Tokyo,  
7-22-1, Roppongi, Minato-ku, Tokyo 106

## 1. はじめに

幾何光学は、‘光線’の概念と、それが従う三法則から成る。三法則とは、光線は均質媒質中を直進すること、異なる媒質間の境界面において反射および屈折の法則が成り立つことを指す。光学系を表すのに必要なデータは、形状と配置、材質の屈折率だけである。原理は実に単純だが、あらゆる光学系はこの幾何光学を基に設計されているのである。それでは、光線の三法則を理解すれば幾何光学の基礎は十分であり、あとは単にその応用に過ぎないのだろうか。そうではない。

このことは力学と対比するとわかりやすい。初等力学では力(またはポテンシャル)が具体的に与えられた系について、ニュートンの運動方程式を解くことを学ぶ。その後、一般的なポテンシャルを仮定し、ラグランジュアンやハミルトニアンが登場する解析力学へと進む。これを幾何光学にあてはめてみよう(表1)。光線の三法則は力学のニュートン方程式に対応し、この段階は‘初等幾何光学’に当たる。そして幾何光学にも解析力学に対応する‘解析幾何光学’があり、それを理解しておくことは、光学系を扱ううえで大いに助けとなる。この‘解析幾何光学’を論ずるのが本稿の目的である。

力学と光学のアナロジーをさらに進めると、解析力学の先に量子力学がある。この段階に対応するのは波動光学(または物理光学)である。力学は一つの閉じた体系

であると同時に量子力学の近似理論であるという側面を持つ。全く同じ事情が幾何光学にもあてはまる。幾何光学を波動光学の近似とする観点からは、近似を成立させる前提条件は何であり、どこで近似が破綻するかを明らかにすることが大切である。実はそれだけではなく、解析幾何光学の成立には、波面といった波動の概念が不可欠であった。

なお、歴史的には光学が力学より常に一步先んじていた。ハミルトンの解析力学は彼がそれ以前に打ち立てた光学系の一般理論から派生し発展したものである。また、シュレディンガーが波動力学を樹立した際、幾何光学と波動光学の関係にヒントを得たことは有名な話である。

対照表1に関して蛇足を付け加えておくと、物理光学と量子力学が同じレベルにあるということは、光子に対する‘シュレディンガー方程式’は(古典論の範疇に入る)マクスウェル方程式だということを示唆している。ではどこで量子の概念が入るかという、マクスウェル方程式の解として与えられる光の場をモードに分解し、各モードを調和振動子に見立てて量子化を行うわけである。その結果1個2個と数えられる固有状態が得られ、その量子数が光子の状態(個数)を表す。このプロセスは物質の方では、シュレディンガー方程式の解である波動関数を再び量子化するいわゆる第二量子化に対応する。古典論から量子論へ飛躍する境界が、物質と光(だ

表 1 幾何光学と力学の対照表

幾何光学	力学
初等幾何光学 解析幾何光学 ↑ (波長→0) 波動光学 ↓ (量子化) 光子	初等力学 解析力学 ↑ (プランク定数→0) 量子力学 ↓ (第二量子化) 粒子場
光線 直進, 反射, 屈折の法則 (光線方程式) 光線ベクトル (波数ベクトル) 周波数	質点 (の軌跡) ニュートンの運動方程式 運動量 エネルギー
フェルマーの原理 光路長 (波面, アイコナル) アイコナル方程式	ハミルトンの原理 作用積分 ハミルトン・ヤコビの方程式

けでなく格子振動のような波動一般)とで1段階ずれているのである。

‘解析幾何光学’はボルン・ウォルフの「光学の原理」を始めとする多くの光学の教科書に解説されている。ここでは、フェルマーの原理から始まり、アイコナルや幾何光学的波面が導入され、光学系の一般論が展開される。そののちに、結像系の収差が議論される。あるいは、マクスウェル方程式や波動方程式の近似として幾何光学が導入される。同じことを繰り返すのも能がないので、本稿では結像系の近軸理論 (これは初等幾何光学のレベルにある) から入り、そこで得られるひとつの制約条件の意味を解析幾何光学の立場から論ずるという方法を探りたい。内容的に特に新しいことがあるわけではないが、具体的な光学系を近似を使って簡単な形で扱うので、直感的な理解が得やすいであろう。また、近軸理論は結像光学系を考えるうえの基礎となる部分であるから、それ自身一度きっちり勉強しておくだけの価値がある。

## 2. 光線について

以下は本稿を読む際に問題意識として念頭に置いて欲しいことである。

### 2.1 光線 の概念

光線とは何か。現実の光ビームには必ず太さがあり、それを細くしていくと回折が顕著に現れるようになる。一方で幾何光学では回折は完全に無視されている。すなわち、光ビームを理想的な光線に近づけようとするとき、むしろそこから離れてしまうといった現実がある。最も光

線のイメージに近いのはレーザービーム (ガウシアンビーム) であろうが、その伝播には回折効果が本質的に働いており、1本の線では表現しきれない豊かな内容を持っている。結局目に見える光線なるものを捜してはいけないのである。

ところが波長の十分小さい波を考えれば回折は起こりにくくなるから、幾何光学を波動光学の波長ゼロの極限とする考え方が生じる。これが幾何光学と波動光学を結ぶ接点となるが、幾何光学は‘粒子’のイメージに近く、光線などの幾何光学的量が波のどのような物理量に関係しているのか、両者の対応づけを明らかにする必要がある。

光線を物理的に実在する無限に細い光ビームとするのではなく、異なった見方で捉えていこう。そのために、細い光ビームの対極にある無限に広い平面波を考える。光は波面に垂直な方向に伝播していくから、これを光線の方向とみなすことができる。同様に1点から発散する球面波でも、波面は同心球面であり、光線はそれに垂直な放射線群である。この考え方を発展させると、光線を波面の法線として定義する可能性がでてくる。本来波面の概念は波動光学のものであり、光の振幅の等位相面という意味を持つ。では波面と‘粒子’の意味合いの強い光線の直交関係を、平面波や球面波といった簡単な例から一般の場合にまで拡張できるかということ、そうはいかない。

有限の開口で切り取られた平面波のフレネル回折を考えよう。光と影の境界部分では回折の影響により光波は乱れ、光の当たる部分ではフレネル縞が生じ、影の部分

には回折波が回り込む。ここでは、光の等位相面は入射平面波とはかけ離れた形状に変わっている。一方、幾何光学では開口は光線を通すか通さないかを定めるだけであり、開口を通過した光線が曲げられることはない。明らかに、光と影の境界領域では波面=等位相面と光線の直交関係は破られている。ところが、境界領域から離れた開口の中央部分では回折の影響をあまり受けず、波面は入射平面波の延長とほとんど変わらない。ここでは近似的に波面と光線の直交関係が成り立つ（もちろん回折の影響は開口からの距離に強く依存し、十分遠く離れたところでは全面に影響が及ぶようになる。さらに遠く離れると、開口は点光源に収束する）。ここでも前と同じく波長が有限であるがゆえの限界に突き当たり、波長が相対的に短くなると、波面と光線の直交関係が確からしくなる。一方、光と影の境界のように、振幅が波長スケールで大きく変化する所では、直交関係は成り立たなくなる。

では光線から幾何光学的に‘波面’を導入できないか。これは容易にできる。点光源から出た光線束に対し、光源から測った光路長（長さ×屈折率の積）の等しい点の集まりを波面と定義すればよい。平面波については、点光源が無限遠にあるとする。このように定義された波面を幾何光学的波面と呼ぶ。幾何光学的波面に対しては光線との直交関係はいつでも厳密に成り立つことが示される（ただし、結晶の中のように屈折率が光線の方向によって変化すると波面と光線は直交しなくなる）。このように光線と幾何光学的波面を相手にしている限り波動光学を持ち出す必要はなく、幾何光学ですべてが閉じている。

ここで導入された幾何光学的波面の概念は幾何光学理論の中で想像以上に重要な働きをした。波面を考えることにより、1本の光線ではなく、その波面に付随する無数の光線からなるグループをひとまとめに考察する視点が生まれたのである。幾何光学的波面が存在するという事は、その光線群に対する非常に強い制約条件となる。なぜなら、もしも光線をでたために寄せ集めたとすると、それが共通直交曲面=波面を持つとはとても期待できないからである。その制約条件を解明することが、解析幾何光学に発展することになるのである。

さて、波動光学的波面と幾何光学的波面の関係に戻ると、これまでの議論から容易に想像されるとおり、後者は波長が十分短いとしたときの前者の近似になっている。事実、マクスウェル方程式やそのスカラー近似である波動方程式において波長ゼロの極限をとると幾何光学

的波面に対する方程式が導きだせる。そのため、波動としての光の複素振幅を  $\psi(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \exp[ik_0\phi(\mathbf{r})]$  と振幅と位相に分ける。これをマクスウェル方程式（このとき振幅  $a(\mathbf{r})$  はベクトル量）、あるいは波動方程式（ $a(\mathbf{r})$  はスカラー）に代入する。そこで波長をゼロに近づけるが、真空波長  $\lambda$  は波数  $k_0 = 2\pi/\lambda$  の分母に入っているから、波数の無限大の極限を取ることになる。これは一種の漸近展開法である。その結果、位相  $\phi(\mathbf{r})$  はある方程式（これをアイコナル方程式という。次回第5、6節参照）を満足することが導きだされる。位相  $\phi(\mathbf{r})$  は幾何光学近似では、アイコナルと呼ばれ、光線にそった光路長に等しい。ここに至って、幾何光学波面の存在が波動光学から改めて承認されたわけである。なお、漸近展開の第2項からは振幅に対する方程式が得られるが、これも幾何光学的な光強度にやき直して解釈することができる。

幾何光学的波面の正反対に位置する概念は波動光学的光線ということになるであろう。光線はエネルギーを運ぶものであるという解釈に立てば、波動光学的には、電界と磁界のベクトル積で定義されるポインティングベクトルに対応させるのが自然である。平面波や球面波のような単純な波の場合は確かにポインティングベクトルは波面に直交し、光線の方向を向く。フレネル回折の例では、幾何光学では光線は曲がらないが、現実に影の部分に光が回り込んでいるから光線は曲がったと解釈することもでき、ポインティングベクトルの分布が光線の曲がりを定量的に表す。では初めからポインティングベクトルで理論を構築したらどうかという話になりかねないが、幾何光学的光線とポインティングベクトルでは計算の難易度が格段に違うから、とても現実的ではない。光と影の境界とか、焦点近傍とかいった幾何光学があやしくなる状況で、始めて意味を持つのである。

## 2.2 光線の写像としての光学系

光が出ていく空間（物体空間）とそれが到達する空間（像空間）を考えよう。もちろんその途中の光学系のデータはすべて与えられているとする。物体空間を出発した光線は、三法則を適用することにより、像空間まで追跡することができる。このようにして物体空間の1本の光線に像空間の1本の光線が対応するから、一つの関数（写像）が定義されたことになる。問題は、この写像はどのような性質を持つかということである。連続で滑らか（微分可能）であるのは当然として、物理的に許される写像はかなり強い制約条件を満たしているはずである。その条件を明らかにしたところこそハミルトンの業績

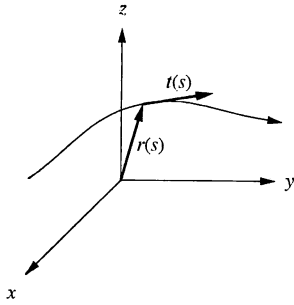


図 1 光線の軌跡と光線ベクトル

に他ならない。

ここで光線の表現法を示そう。等方媒質中の光線は直進するが、屈折率を出現させる大気や屈折率分布レンズのように屈折率が空間的に変化する媒質中では光線は曲線を描く。ここでは、一般的な場合を考える。図 1 に示すとおり光線の軌跡が  $s$  をパラメータとして  $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$  で与えられるとする。パラメータ  $s$  は数学的には何でもよいが、光線の長さをとるといろいろな式が簡単になるので、それを採用する。この場合

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1)$$

が成り立つ。光線の進行方向、すなわち、接線方向の単位ベクトルは単に位置  $\mathbf{r}$  を長さ  $s$  で微分すればよい。ベクトル  $d\mathbf{r}/ds$  の長さが 1 になることは (1) 式により保証されている。そこで光線ベクトル  $\mathbf{t}$  を、光線の進行方向を向き長さがその点の屈折率  $n(\mathbf{r})$  に等しいベクトルと定義する。

$$\mathbf{t} = n(x, y, z) \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (2)$$

成分に分けて書くときは、 $\mathbf{t} = (p, q, h)$  としよう。長さが屈折率に等しいから 3 成分は独立ではなく、 $h = \pm(n^2 - p^2 - q^2)^{1/2}$  が成り立つ。

量子論によれば、光子の運動量は波数ベクトルにプランク定数をかけたもので与えられる。ところが、上に定義した光線ベクトルと波数ベクトルは定数  $2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  は真空中の波長) の違いがあるだけだから、光線ベクトルを運動量とみることができる。

光軸を持つ光学系では別の表現もよく使われる。レンズ系の中心を貫く直線が光軸の典型的なものである。この例のように光軸は直線であることが多いから、それを  $z$  軸にとる (図 2)。このとき光線は  $z$  をパラメータとして  $(x(z), y(z))$  と表すことができる。光線ベクトルの  $x$  成分  $p$  は

$$p(x) = \frac{ndx/dz}{\{1 + (dx/dz)^2 + (dy/dz)^2\}^{1/2}} \quad (3)$$

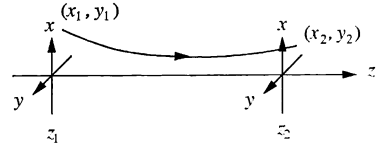


図 2 光軸を有する光学系

と書ける。  $y$  成分  $q$  も同様である。この表現では  $z$  軸は力学系における時間の役割を果たしており、この意味で光学系は 2 次元の力学系に対応するといえる。光軸上の各点  $z$  に対し、光線の状態は  $(x(z), y(z), p(z), q(z))$  によって決まる。これは力学系の位相空間または相空間 (位置と運動量の空間) に対応する。ここでは光線相空間と呼んでおこう。一般の場合には光線相空間は 4 次元であるが、すぐ後に述べる回転対称な光学系ではベクトル  $(x(z), p(z))$  からなる 2 次元の光線相空間で記述できる。

### 2.3 光路長

光線に付随する最も重要な量は、屈折率と幾何光学的長さの積で定義される光路長である。一般に 2 点  $P$  と  $Q$  を結ぶ曲線が与えられたとき、パラメータ  $s$  を用いた表現では光路長  $L$  は

$$L = [PQ] = \int_P^Q n ds = \int_P^Q \mathbf{t} \cdot d\mathbf{r} \quad (4a)$$

である。最後の式のように変形できることは光線ベクトルの定義 (2) から明らかであろう。光軸を有する光学系では、光線の両端の  $z$  座標が  $z_1, z_2$  のとき

$$L = \int_{z_1}^{z_2} n(x, y, z) \{1 + (dx/dz)^2 + (dy/dz)^2\}^{1/2} dz \quad (4b)$$

と書ける。

## 3. ガウス光学

### 3.1 ABCD 行列

レンズが  $k$  面からなるとき、各面の形状 (球面であれば曲率半径) ( $k$  個)、隣り合う面の頂点の間隔 ( $k-1$  個)、媒質の屈折率 ( $k-1$  個) をレンズデータという。これに物体空間、像空間の屈折率を加えれば必要なデータは揃ったことになる。レンズを通過する光線の軌跡は、(1) 面と面との間は直進する、(2) 各面においては屈折の法則に従って屈折する、という二つの規則を交互に適用することにより計算できる。これは光線追跡と呼ばれレンズ設計の基礎をなすものである。厳密な計算式を導出するのもそれほど難しいことではないが、近軸光線の場合は簡単になる。

特に光学系が光軸の回りの回転に対して対称であると

きは、光軸上から出た光線は、屈折後も光軸とはじめの光線がなす平面(メリジオナル面)内に留まるから、その平面上でのみ光線追跡を行えばよい。これをガウス光学という。以下では主にこの場合を扱う。

光軸を  $z$  軸にとり、光線は左から右に進むものとする。軸対称な系では1次元のみを考えればよかったからそれを  $x$  軸にとり、 $z$  における光線の高さを  $x(z)$ 、光線ベクトルの  $x$  成分を  $p(z)$  と書く。 $z=z_1$  面を出発した光線  $(x_1, p_1)$  が光学系内を進行し、 $z=z_2$  面において光線  $(x_2, p_2)$  になったとしよう。このとき  $z_1$  面の光線相空間から  $z_2$  面の光線相空間への写像

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2(x_1, p_1) \\ p_2 &= p_2(x_1, p_1) \end{aligned} \quad (5)$$

が定義される。一般論では写像(5)の性質を直接論ずることになるが、ここでは近軸の範囲に議論を限る。近軸光線とは、光軸からの距離  $x$  と角度  $u$  の両方が小さい光線である。この範囲では

$$p(x) \cong n \frac{dx}{dz} \cong nu \quad (6)$$

と近似でき、 $p$  も十分小さい。ゆえに(5)式を  $x_1, p_1$  について原点の回りで展開して、1次の項まで残せばよい。要するに、写像(5)の線形近似が近軸光学である。物体空間の光軸上を進む光線は像空間でも光軸上にくるから、写像(5)は  $z_1$  面の光線相空間の原点を  $z_2$  面の光線相空間の原点に写像する。よって、(5)式を展開したとき定数項は消え

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 + Bp_1 \\ Cx_1 + Dp_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

と書ける。線形写像を表す  $2 \times 2$  変換行列を(愚直にも)  $ABCD$  行列と呼ぶ。

ここで具体的な光学系における  $ABCD$  行列の求め方を述べよう。光線は直進と屈折を繰り返すから、それぞれの要素に対する行列を求め、それらを順番に掛け合わせるにより全体の行列を得ることができる。

直進は非常に簡単である。図3のように2面が  $d$  だけ離れているとする。光線の角度を  $u$ 、屈折率を  $n$  とすると、光線の高さは

$$x_2 = x_1 + du = x_1 + \left(\frac{d}{n}\right)p_1 \quad (8)$$

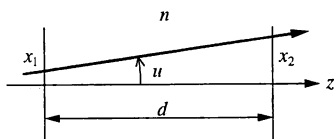


図3 光線の直進

で与えられる。光線の方向は変化しない( $p_2=p_1$ )。よって、光線の直進を表す行列  $T$  は次のとおり。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

次に屈折の場合を考えよう。図4に示すとおり、屈折面の曲率半径を  $R$  (曲率中心が頂点の右にくる場合を正と約束する)、前後の屈折率を  $n_1, n_2$  とする。入射角を  $i_1$ 、出射角を  $i_2$  とすると、屈折の法則

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (10)$$

が成り立つが、近軸の範囲では角度は小さいから  $n_1 i_1 = n_2 i_2$  と近似できる。さて、曲率中心と屈折点を結ぶ直線が光軸となす角度(光軸から測る)を  $\theta$  とすると  $i_1 = u_1 - \theta, i_2 = u_2 - \theta$  である。また、角度  $\theta$  は近軸の範囲で  $\theta = -x_1/R$  である。これらを全部まとめて、 $p_i = n_i u_i$  に対し

$$p_2 = p_1 - \frac{n_2 - n_1}{R} x_1 = p_1 - \varphi x_1 \quad (11)$$

が成り立つ。 $\varphi = (n_2 - n_1)/R$  は焦点距離の逆数で屈折力またはパワーという。屈折面では光線の高さは変化しない( $x_2 = x_1$ )。以上まとめて、屈折の行列  $R$  は次のように書ける。

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

さて、 $k$  面からなる光学系があるとする。レンズの第1面における光線を  $(x_1, p_1)$ 、最後の第  $k$  面を出たところでの光線を  $(x_2, p_2)$  とすると、これらは行列  $M$  で結ばれる。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

ここで行列  $M$  は第1面から第  $k$  面まですべての要素の行列を順番にかけたものであり

$$M = R_k T_k R_{k-1} T_{k-1} \dots R_2 T_2 R_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (14)$$

である。

具体的な形(9)と(12)式から明らかとなっており、要素と

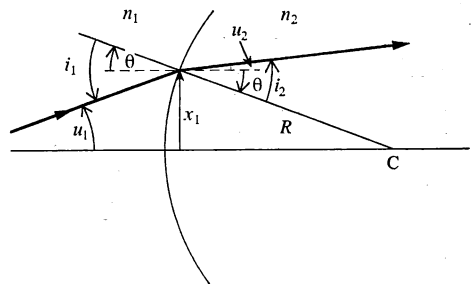


図4 光線の球面による屈折

なる行列  $\mathbf{R}$ ; および  $\mathbf{T}$ ; の行列式は1であるから、これらの積である行列  $\mathbf{M}$  の行列式も1である。よって

$$AD - BC = 1 \quad (15)$$

という関係式が成り立つ。このため、 $A, B, C, D$  のうち独立なものは三つである。

### 3.2 結 像

結像関係を調べるため、物体面から像面への変換行列を求める。図5に示すとおり物体面はレンズの第1面から  $s_1$  の距離にあり、像はレンズの最終面(第  $k$  面)から  $s_2$  の距離にあるとしよう。符号は右側を正と約束するから、図の場合、 $s_1$  は負、 $s_2$  は正である。物体空間、像空間の屈折率をそれぞれ  $n_1, n_2$  とする。レンズの変換行列を  $\mathbf{M}$ 、物体面から像面への変換行列を  $\bar{\mathbf{M}}$  (成分にもバーを付ける) とする。物体面上の光線  $(x_1, p_1)$  は  $-s_1$  (符号に注意) だけ直進してレンズに入り、レンズの最終面から出てから  $s_2$  だけ直進したのち像面に達する。そこで光線を  $(x_2, p_2)$  とする。変換行列  $\bar{\mathbf{M}}$  は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_2 \mathbf{M} \mathbf{T}_1 \\ &= \begin{pmatrix} A + Ce_2 & -Ae_1 + B - Ce_1e_2 + De_2 \\ C & -Ce_1 + D \end{pmatrix} \quad (16) \end{aligned}$$

ただし、

$$e_1 = s_1/n_1, \quad e_2 = s_2/n_2$$

となる。像の高さは  $x_2 = \bar{A}x_1 + \bar{B}p_1$  となるが、二面が結像関係にある(これを共役という)ということは、物体面上  $x_1$  から出た光線はどの方向に出ても像面上では  $x_2$  に到達するはずであるから、 $\bar{B} = 0$ 、すなわち

$$e_2 = \frac{Ae_1 - B}{Ce_1 - D} \quad (17)$$

が結像条件になる。物体や像の位置をレンズ面から測るというのは実践的ではあるが、主点や焦点から測るほうがきれいな表現が得られる。これについては3.3節で述べる。

結像の横倍率  $\beta$  は物体の高さと像の高さの比で定義

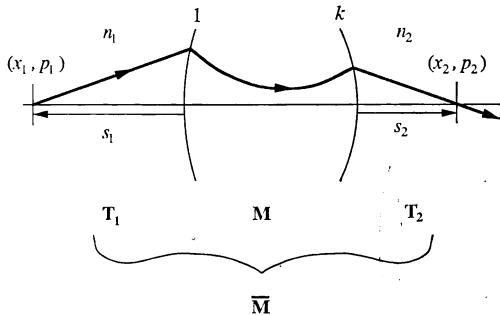


図5 結像

される。

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} = \bar{A} = A + Ce_2 \quad (18)$$

横倍率が負になるときは、倒立像が結像されることを意味する。

同じく角倍率  $\gamma$  は、物体面、像面で高さゼロ ( $x_1 = x_2 = 0$ ) の光軸を通る光線の角度の比で与えられる。

$$\gamma = \frac{u_2}{u_1} = \frac{n_1 p_2}{n_2 p_1} = \frac{\bar{D}}{N} = \frac{-Ce_1 + D}{N} \quad (19)$$

ここで  $N = n_2/n_1$  は物体空間と像空間の屈折率比である。

以上の結果を用いると行列  $\bar{\mathbf{M}}$  は、2面が共役関係にあるときは

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ C & N\gamma \end{pmatrix} \quad (20)$$

と書き直すことができる。すぐ後で明らかになるが、 $C$  は焦点距離の逆数に屈折率をかけ、その結果の符号を変えたものに等しい。また、 $\bar{\mathbf{M}}$  の行列式は1であるから横倍率と角倍率の間には

$$N\beta\gamma = 1 \quad (21)$$

という関係が成り立つ。

### 3.3 光学系の三主要点

光学系の近軸結像特性は、焦点、主点、節点の三主要点によって決定できる(後に述べるアフォーカル系は例外)。

像側(後側)焦点  $F'$  は平行光を入射させたときに像側で一点に収束する点、すなわち無限遠物点の共役点である(図6)。物体側(前側)焦点  $F$  はそこから出た光束が像側で平行光となる物点、すなわち無限遠像点の共役点である。あるいは、光線は逆行するから、像側から平行光を入れたとき物体側で一点に収束する点でもある。物体側焦点と像側焦点は互いに共役関係にはない。

主点  $H, H'$  は横倍率  $\beta$  が1となる共役点、接点  $N, N'$  は角倍率  $\gamma$  が1となる共役点として定義される。これらはひとつの光学系にそれぞれ一組しかない。物体空間と像空間の屈折率が等しいときは、主点と接点は一致

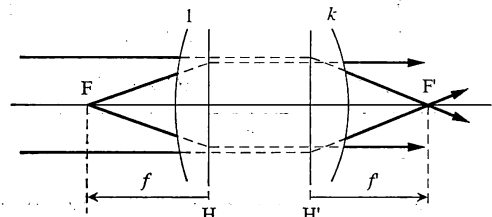


図6 焦点 ( $F, F'$ ) と主点 ( $H, H'$ ) と焦点距離 ( $f, f'$ )

する。

三主要点を用い、結像関係を作図から求めることができる (図 7)。このために、水平 (光軸に平行) な光は焦点で光軸と交わることを、物体側および像側主点では光線の高さが等しいこと、そして、接点で光軸と交わる光線は物体側と像側で平行になることを利用する。さて、物体の位置に適当な長さの矢を光軸に垂直に立てる。矢の先端から水平に出た光線は、像空間では同じ高さで像側主点を出発し像側焦点を通る光線となる。次に矢の先端から物体側焦点を通過する光線を考えると、像側では水平に進む光線となる。その高さは物体側において光線が物体側主点 (むしろ主平面) と交わる点の高さに等しい。像側でこの二本の光線の交点を求めると、そこが像の位置である。第三の光線として、矢の先端から物体側節点で光軸を横切る光線を引くと、像側では像側節点から入射側と同じ角度で射出する光線となる。この光線も前の二本の光線の交点を通過する。

$ABCD$  行列が与えられたとき三主要点を求めることができる。計算の過程は省略し、結果のみを表 2 に掲げる。表の三主要点の位置は物体側では第 1 面、像側では最終面 (第  $k$  面) からの符号付き距離 (右側を正) である。焦点距離は、主点から焦点までの符号付き距離と定義した。物体側の焦点距離を  $f$ 、像側の焦点距離を  $f'$  とする (しかし混同するおそれがないときは、像側の焦点距離を単に  $f$  とするのが普通である)。  $f$  と  $f'$  は符号が逆で、絶対値が屈折率比だけ異なることになる。符号は凸レンズに対し、 $f < 0, f' > 0$  である。

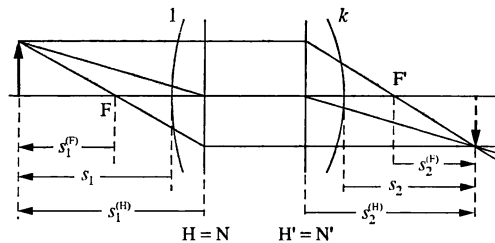


図 7 三主要点を用いた結像の図式解法。物体空間の屈折率と像空間の屈折率が等しく、主点と接点が一致する場合を作図した。

表 2 三主要点と  $ABCD$  行列

	物体側	像側
焦点	$n_1 D / C$	$-n_2 A / C$
主点	$n_1 (D - 1) / C$	$-n_2 (A - 1) / C$
接点	$(n_1 D - n_2) / C$	$-(n_2 A - n_1) / C$
焦点距離	$n_1 / C$	$-n_2 / C$

この表から得られる重要な結論は、行列の成分  $C$  は焦点距離から定まり、また成分  $A, D$  はそれぞれ物体側、像側の主点の位置で決まるということである。3成分  $A, C, D$  が決まれば残りの成分  $B$  は (15) 式から定まる。焦点距離と物体側および像側の主点の位置は自由に選ぶことができるから、 $A, C, D$  は任意の値をとることができる。よって、 $ABCD$  行列に課せられる制約条件は (15) 式のみであることが証明できた。

ここでよく見慣れた二つの結像公式を導出しておこう。(17) 式では物体と像の距離をレンズ面から測ったが、それとは別に主点から測る方式と、焦点から測る方式がある。初めに物点および像点を、それぞれ物体側および像側主点から測ることにし、それを  $s_1^{(H)}, s_2^{(H)}$  とすると

$$\frac{N}{s_2^{(H)}} - \frac{1}{s_1^{(H)}} = \frac{N}{f'} \quad (22)$$

という結像公式が得られる。ここで  $f'$  は像側焦点距離であり、物体側の焦点距離とは  $f' = -Nf$  の関係にある。 $N = n_2/n_1$  は像空間と物体空間の屈折率の比。

つぎは焦点から測ることにし、それを  $s_1^{(F)}, s_2^{(F)}$  とすると

$$s_1^{(F)} s_2^{(F)} = f f' = -f'^2 / N \quad (23)$$

が得られる。これはニュートンの公式と呼ばれる。

最後に焦点距離が無限大のアフォーカル系について触れておく。図 8 の望遠鏡のように二つのレンズの、それぞれ後側焦点と前側焦点を一致させるとアフォーカル系になる。その特徴は、平行光を入射させると像空間でも平行光として出てくること、あるいは焦点が無遠慮になることである。 $ABCD$  行列でいえば、 $C=0$  がアフォーカル系の条件である。この系では結像横倍率は二つのレンズの焦点距離の比になり、位置によらず一定値をとる。角倍率と縦倍率も一定である。このため主点や節点は存在しない。また、(17) 式で  $C=0$  とおくと、(22) 式で  $f'$  を無限大とおけばわかるとおり、結像関係は線形になる。

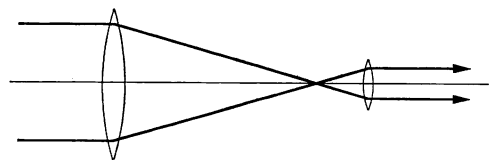


図 8 アフォーカル系の例

### 4. 屈折率分布光学系

#### 4.1 屈折の法則と光線方程式

屈折の法則は(10)式で与えられるが、この両辺は、光線ベクトルの屈折面に平行な成分の、それぞれ入射側、屈折側における値に等しい。つまり屈折に際し、光線ベクトルの屈折面に平行な成分が保存され、光線ベクトルの変化量は屈折面の法線成分のみである。よって、入射光の光線ベクトルを  $\mathbf{t}_1$ 、屈折光の光線ベクトルを  $\mathbf{t}_2$ 、屈折面の法線を  $\mathbf{N}$  とすると

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 + \mu \mathbf{N} \tag{24}$$

が成り立つ (図 9)。この式を  $|\mathbf{t}_2| = n_2$  と連立させて、未知数  $\mu$  を決めることができる。

物理的には、光線ベクトルを光子の運動量とみることができから、屈折に際して運動量の横成分が保存する、つまり光子は屈折面に垂直な方向に‘力’を受けるといことになる。この力は現実には存在する。光が受ける力を直接測る方法はないが、その反作用、つまり光が物質に及ぼす力は観測できる。たとえば、物質中に光が入射すると、屈折により、その物質は屈折面に垂直方向に力を受ける。もちろん反射があれば、それによっても力が働く。物質が十分軽ければ、光の力により実際に運動を開始する。

(24)式を屈折率が連続的に変化する場合に拡張しよう。この場合の‘屈折面’に当るのは、屈折率一定の面である。屈折率分布を展開すると

$$n(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \cong n(\mathbf{r}) + \frac{\partial n}{\partial x} dx + \frac{\partial n}{\partial y} dy + \frac{\partial n}{\partial z} dz \tag{25}$$

となるから屈折面の法線  $\mathbf{N}$  に対応するのは

$$\text{grad}n = \left( \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial y} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \tag{26}$$

でなくてはならない。よって、屈折の公式は、未知数を  $\mu = \alpha ds$  と置いて

$$\mathbf{t}(s + ds) = \mathbf{t}(s) + \alpha ds \text{grad}n \tag{27 a)}$$

あるいは

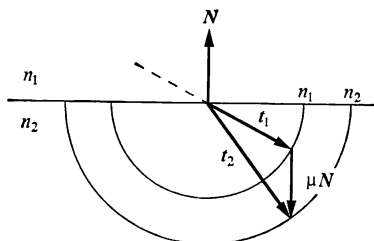


図 9 光線の屈折

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \alpha \text{grad}n \tag{27 b)}$$

となる。係数  $\alpha$  は次のようにして決定できる。(1/2) $t^2$  の微分を計算すると、 $\mathbf{t} = n d\mathbf{r}/ds$  の関係を使い

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} t^2 &= \mathbf{t} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \alpha \mathbf{t} \text{grad}n = \alpha n \text{grad}n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ &= \alpha n \frac{dn}{ds} = \frac{\alpha}{2} \frac{dn^2}{ds} \end{aligned} \tag{28}$$

が得られる。これを  $t^2 = n^2$  と比べると、 $\alpha = 1$  とすべきことがわかる。ゆえに光線方程式

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \text{grad}n \tag{29}$$

が求まった。

#### 4.2 近軸光線

屈折率分布が軸対称な系について、近軸の範囲で光線方程式(29)を解こう。屈折率分布は、動径方向について2次までとって

$$n(x, y, z) = n_0(z) + \frac{1}{2} n_1(z)(x^2 + y^2) \tag{30}$$

と書ける。これまでと同様に  $xz$  面内に含まれる光線に限ろう。近軸の範囲では  $ds \approx dz$  であるから、光線ベクトルの  $x$  成分  $p$  に対する光線方程式は

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\partial n}{\partial x} = n_1(z)x \tag{31}$$

となる。加えて光線ベクトルの定義から

$$\frac{dx}{dz} = \frac{p}{n(x, z)} \approx \frac{p}{n_0(z)} \tag{32}$$

が成り立つ。上の2式を連立して解けば、光線の軌跡が求まる。一般の場合は数値計算 (たとえばルンゲ・クッタ法など) に頼るしかないが、屈折率分布の係数が  $z$  に依存しない場合は、 $\nu = (|n_1|/n_0)^{1/2}$  とおいて、(1)  $n_1$  が正のときは指数関数  $\exp(\pm \nu z)$ 、(2) 負のときは三角関数  $\cos(\nu z)$ 、 $\sin(\nu z)$  のそれぞれ線形結合になる。屈折率が中心に近いほど高くなる(2)の場合、光線は光軸近傍に閉じ込められる。(1)の場合は、指数関数的に増大し、やがて光軸から離れてしまう。

一般の場合に戻り、出発点を  $z=0$ 、そこでの光線を  $(x_1, p_1)$  とすると、 $z$  における光線  $(x_2, p_2)$  は、(7)式と同様に  $ABCD$  行列を用いて表される。ただし、 $ABCD$  は  $z$  の関数になり、微分方程式

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/n_0(z) \\ n_1(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} \tag{33}$$

を満足する。これから、行列式  $\delta(z) = A(z)D(z) - B(z)C(z)$  の微分を計算すると、 $d\delta/dz = 0$  が得られ、行列式は



$z$  によらず一定値をとる。初期条件を考慮すると

$$\delta(z)=1 \quad (34)$$

が成り立ち、(15)式が屈折率分布系においても正しいことが確かめられた。

## 文 献

幾何光学を論じた日本語の参考書あるいは教科書を列挙する。

ベレーク (三宅訳) : レンズ設計の原理 (講談社, 1970).

久保田広 : 応用光学 (岩波, 1959).

久保田広 : 光学 (岩波, 1964).

ボルン・ウォルフ (草川・横田訳) : 光学の原理 第1~3巻

(東海大出版, 1974).

松居吉哉 : レンズ設計法 (共立, 1972).

応用物理学会光学懇話会編 : 幾何光学 (森北, 1975).

小瀬輝次 : フーリエ結像論 (共立, 1979).

辻内順平 : 光学概論 I (朝倉, 1979).

三宅和夫 : 幾何光学 (共立, 1979).

石黒浩三 : 光学 (裳華房, 1982).

鈴木達朗 : 応用光学 I (朝倉, 1982).

松居吉哉 : 結像光学入門 (啓学出版, 1988).

鶴田匠夫 : 応用光学 I (培風館, 1990).

南 節雄 : (応用物理学会日本光学会編) 微小光学の物理的基礎 第6章分布屈折率光学系の幾何光学 (朝倉, 1991) pp. 105-137.

## “講義——フレッシュマンのための現代光学” について

本号から始まりましたこの講義は、企業に入りたてのフレッシュマンの方で、光ディスクやビデオカメラ等、光産業の発展著しい分野で研究開発を担当している読者向けに企画されました。光学を専攻した人でなくても理解していただけるように、可能なかぎり数式を減らし、図や写真を多くして執筆していただく予定です。講義の内容は、

- (1) 解析幾何光学入門
- (2) 焦点近傍の光学
- (3) レーザービームと光導波
- (4) コヒーレンスと結像
- (5) 回折を利用した光学素子
- (6) 偏光の扱いと応用素子
- (7) SHG 光学

おのおの2回、計14回の連載を予定しています。執筆者は、大学あるいは企業の最前線でご活躍中の方々をお願いしています。現代光学を直感的にとらえていただく本講義に、ご期待ください。

(「光学」編集委員会)