

解説

光学におけるフーリエ展開

伊 東 一 良

大阪大学工学部応用物理学科 〒565 吹田市山田丘 2-1

(1992年2月14日受理)

Fourier Expansion in Optics

Kazuyoshi ITOH

Department of Applied Physics, Faculty of Engineering, Osaka University,
2-1, Yamadaoka, Suita 565

1. はじめに

フーリエ変換さえわかれば、光学はすべてわかったようなものだという人がいる。決してそうではない。が、光学の分野でフーリエ変換が重宝されていることは事実である。フーリエ展開が光学のなかでどのように使われているかを、まとめてみたのが、図1である。対象を、振幅と干渉縞と像強度分布に大きく分けてみたが、後の二つの境界は明確ではない。著者のわかる範囲、もしくは興味を感じる範囲に対象を限定し、独断と偏見で、中央には主に従来の研究分野を、右端にはそれらから発展した、現在または将来の研究テーマを並べてみた。後半では、この図を中心に話をまとめる。

多くの事柄が、縦割りに細分化され過ぎている現在、光の分野を横断するような視野をもつことも、たまには、必要かも知れない。力量の不足を顧みず筆を進めてみる。

2. フーリエ展開とその周辺

まず初めに、私見を交えながら、フーリエ展開の周辺の復習をし、言葉の整理をしてゆく。

2.1 フーリエ展開

N 次元実ユークリッド空間内の任意のベクトル \mathbf{v} は、常に N 個の正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n; n=1, \dots, N\}$ で次のように展開できる。

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{e}_n \quad (1)$$

ここで、 $c_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n$ である。ただし、 (\cdot) は内積を意味

するものとする。(1)式は単なる座標変換であるが、一般のフーリエ展開とも呼ばれる^{1,2)}。 \mathbf{v} を、 N 個よりも少ない M 個の正規直交基底で同様に展開すると、

$$\mathbf{v}' = \sum_{n=1}^M c_n \mathbf{e}_n \quad (2)$$

を得る。図2に示したように、部分 \mathbf{v}' は、基底 $\{\mathbf{e}_n; n=1, \dots, M\}$ で張られる部分空間 S への \mathbf{v} の正射影になっており、残差ベクトル $\Delta = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ に対して常に垂直で、残差ベクトルの大きさを最小にするように選ばれる。このことは、干渉縞の解析にフーリエ解析を用いる根拠のひとつとなっている^{3,4)}。また、パターン認識のための部分空間法に属する手法も、このことを利用している¹⁾。ただし、正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n; n=1, \dots, M\}$ をどのように決定するかは、残差ベクトルの最小性と独立の問題であって、一般的には、 \mathbf{v} の集合の統計的性質に合わせて、これらを最適に選ぶ必要がある¹⁾。

通常、われわれが観測できる物理量の測定範囲とその分解能は、ともに有限であるから、これらは有限次元のベクトルで十分扱うことができ、(1)式のような展開や(3)式のような近似は常に可能である。

しかし、複雑な信号の処理を扱うのに、従来の線形代数学の枠内では不十分な面もあり、光学の分野を含めて多くの場合、観測される量には、ベクトルよりはむしろ連続関数を用いる方が圧倒的に多かった。物質や空間の連続性からも、このことは自然なことである。連続関数のさまざまな解析的性質が利用できることも大きな理由であろう。時系列信号の場合は、Z変換のように本質的に離散的な信号を解析的に扱う方法もある^{5,6)}。

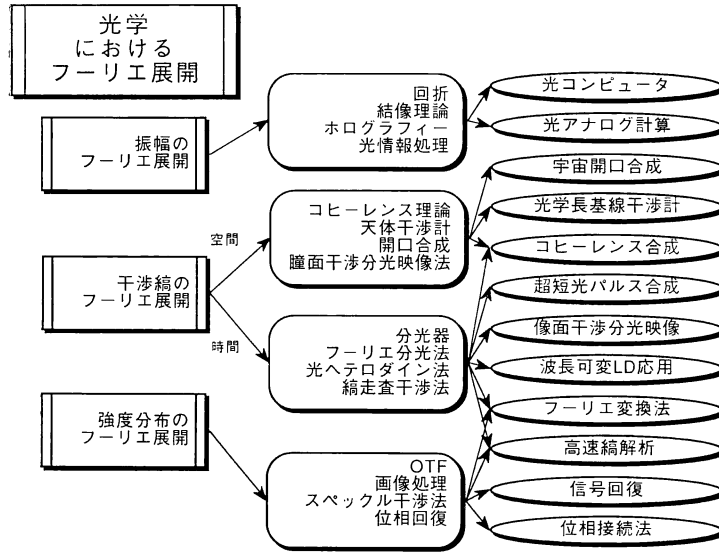


図 1 光学におけるフーリエ展開

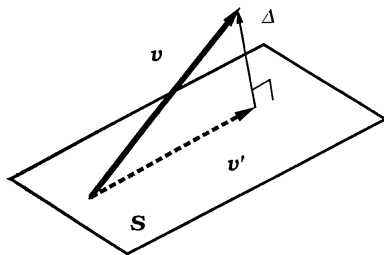


図 2 部分 and : 部分空間への正射影

(1)式の基底ベクトルを連続関数に拡張した場合、 $[-T/2, T/2]$ で定義される関数 $v(x)$ の一般のフーリエ展開は、

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (3)$$

となる^{7,8)}。ここで $\{\phi_n(x); n=1, 2, \dots\}$ は完備な正規直交関数系である必要がある。展開係数 c_n は、内積の拡張と考えられる、

$$c_n = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} v(x) \phi_n(x) dx \quad (4)$$

で与えられる。このように連続関数に拡張された場合でも、(3)式の和を有限項で打ち切った部分和の平均2乗誤差は、常に最小になっている^{8,9)}。このことは、関数の近似などにも利用される。直交基底は目的によって選ぶ。たとえば、Legendre の多項式は、 $T=1$ のときの正規直交関数系のひとつで、 $\{1, x, x^2, \dots\}$ から Gram-Schmidt の過程を利用して得られるものである。

狭義のフーリエ展開では、正規直交関数系に

$$\phi_n(x) = \exp(2\pi j n x / T) \quad (5)$$

が用いられる。

ここで、区間 $[-T/2, T/2]$ の幅を大きくし、その極限をとると、よく見慣れたフーリエ積分の式を得る、

$$v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(f) \exp(2\pi j f x) dx \quad (6)$$

(6)式は、フーリエ逆変換とも呼ばれ、フーリエ変換は、

$$\tilde{V}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp(-2\pi j f x) dx \quad (7)$$

で与えられる。今後、(6)、(7)式の関係をも、簡単のために、

$$v(x) \supset \tilde{V}(f) \quad (8)$$

で表すものとする。混乱が予想されなければ、高次元の変換にもこの表現を用いる。

$$W \text{sinc}(W x) \supset \text{rect}(f/W) \quad (9)$$

は、よく知られた関係であるが、この関係と、畳み込み積分の関係を用いると^{10,11)}、

$$v(x) * W \text{sinc}(W x) \supset \tilde{V}(f) \text{rect}(f/W) \quad (10)$$

を得る。ただし、 $*$ は畳み込み積分を意味するものとする。(10)式は、(2)式の拡張と見ることができる。すなわち、 $\text{rect}(f/W)$ による制限が基底 $\{\tilde{V}(f)\}$ に加わるにより、(8)式の $v(x)$ が(10)式のように、部分和に変換されたことになる。

厳密性を抜きにして、フーリエ展開の周辺を眺めてきた。つぎに、変換の核がなぜ $\exp(2\pi j f x)$ なのかを考え

ながら、解析信号の周辺を探ってゆこう。

2.2 複素振幅と解析信号

実数値をもつ次のような単一周波数信号は、線形性 (linearity) と時間のずれに対する不変性 (time-invariance) の成り立つ系を通過しても、その形も、周波数も変化しないことが知られている¹²⁾。

$$v_i^{(r)}(t) = a_i^{(r)} \cos(2\pi f t - \phi_i) \quad (11)$$

ただし、振幅と位相は変化する。ここで、 k を波数ベクトル、 x を3次元空間座標、 ϕ_0 を初期位相として $\phi_i = k \cdot x + \phi_0$ とおくと、(11)式は、波動方程式のもっとも基本的な解である進行平面波の、特定の位置での光の場を表していると考えることができる。時刻を $t = t_0$ とすると、

$$v_i^{(r)}(t) = a_i^{(r)} \cos(k \cdot x - 2\pi f t_0 + \phi_0) \quad (12)$$

という振幅分布を得る。この平面波も、単一周波数信号と同様に、自由空間を伝播するにあたり、その波数ベクトルも形状 (関数) も変化しない。狭義のフーリエ展開が、線形、時間不変系の解析や、光の自由空間での伝播の解析に用いられる理由は、この調和振動の不変性にあると考えられる。Angular spectrum¹³⁾の考え方は、まさに、この平面波の不変性を利用して、フレネル回折などを理解しようとするものである。

さて、(11)式はそのまま用いられることは少ない。次のような複素数の値をもつ関数がよく用いられる。

$$v_i(t) = a_i \exp(2\pi j f t) \quad (13)$$

ここで、 $a_i = a_i^{(r)} \exp(-j\phi)$ 。この複素表示が用いられる最大の理由は、以下の伝達係数の表現が容易であることである。

いま、線形、時間不変系への周波数 f をもつ入力信号を $v_i(t)$ 、その出力を $v_o(t)$ とすると、これらの間に、

$$T_f = v_o(t)/v_i(t) \quad (14)$$

の関係が成り立つことが知られている¹²⁾。実数値を持つ関数では、このような伝達係数、ひいては伝達関数を表現することが困難となる。別の言い方をすれば、(13)式は、線形、時間不変系の固有関数になっており、固有値が(14)式で与えられるが、(11)式は、この系の固有関数ではない。図3に示したように、複素指数関数は、その変数軸に対して、らせん形またはねじの形を持っており、その軸に関して回転させること (複素数をかけることに相当する) により、変数の軸方向にずらせることができる。当然、その正射影である実部も虚部も移動することになるが、実部に対して、これと同様のことを行うことはできない。なお、指数関数の複素共役をとることは、右ねじを左ねじに変更することに対応する。これは、時

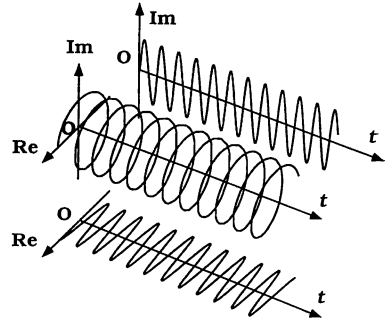


図3 複素指数関数と、その実数部と虚数部

間を逆に進ませるとの同等である。このことは、位相共役鏡で反射された位相共役波の振舞いの説明によく用いられる¹⁴⁾。(13)式の振幅を、複素振幅または、フェイザーなどと呼ぶ。

信号が、さまざまな周波数を持つとき、(11)式や(13)式を用いることはできない。(11)式は、

$$v^{(r)}(t) = \int_0^\infty a^{(r)}(f) \cos\{2\pi f t - \phi(f)\} df \quad (15)$$

のように書き換える必要がある。 $a^{(r)}(f)$ と $\phi(f)$ とは、周波数 f をもつ成分の振幅と位相を与えている。(13)式に対しては、

$$v(t) = \int_0^\infty a(f) \exp(2\pi j f t) df \quad (16)$$

を用いるのが自然である。 $a(f)$ は、周波数 f をもつ成分の複素振幅を与えている。(16)式のような信号を、(15)式の解析信号と呼ぶ¹⁵⁻¹⁷⁾。

(11)式や(15)式から、それらの虚数部を求める方法は、ヒルベルト変換の名で知られている。すなわち、

$$v^{(i)} = (1/\pi) P \int_{-\infty}^\infty \{v^{(r)}(t')/(t'-t)\} dt' \quad (17)$$

となる。ただし、 P はコーシーの主値積分を意味する。ここで、畳み込み積分の記号を用いると、(17)式は、

$$v^{(i)}(t) = \{-1/(\pi t)\} * v^{(r)}(t) \quad (18)$$

と書くことができる。いま、 $v^{(i)}(t) \hookrightarrow \tilde{V}^{(i)}(f)$ 、 $v^{(r)}(t) \hookrightarrow \tilde{V}^{(r)}(f)$ 、 $v(t) \hookrightarrow \tilde{V}(f)$ とおき、

$$1/(\pi t) \hookrightarrow j \operatorname{sgn}(f) \quad (19)$$

の関係に注意すると、(18)式の関係は、

$$\tilde{V}^{(i)}(f) = \{-j \operatorname{sgn}(f)\} \tilde{V}^{(r)}(f) \quad (20)$$

と書くことができる。したがって、解析信号と元の実数の信号との関係は、

$$\begin{aligned} \tilde{V}(f) &= \tilde{V}^{(r)}(f) + j \tilde{V}^{(i)}(f) \\ &= \{1 + \operatorname{sgn}(f)\} \tilde{V}^{(r)}(f) \end{aligned} \quad (21)$$

という簡単な関係であることがわかる。

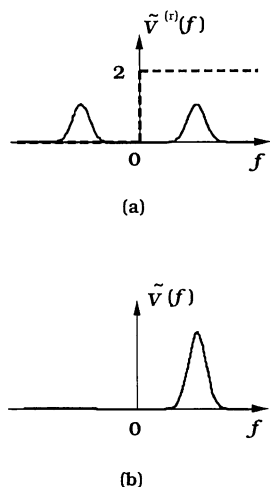


図 4 実数値信号と解析信号のフーリエ・スペクトル (a)実数値信号のフーリエ・スペクトル, 破線は, 実数値信号から解析信号を得るための, スペクトル軸上での信号処理を意味する. (b)解析信号のフーリエ・スペクトル.

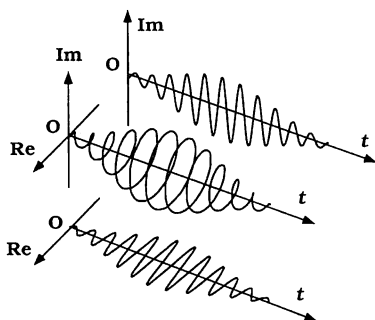


図 5 解析信号と, その実数部と虚数部

図 4 に, $\tilde{v}^{(r)}(f)$ と $\tilde{v}(f)$ の例を示す. 波線で描かれた関数は, $\{1 + \text{sgn}(f)\}$ を意味している. 解析信号の基本的な特徴は, $\tilde{v}(f)$ が $f < 0$ の範囲でゼロとなることである. 図 5 に, 解析信号と, その実数部, 虚数部との関係を示す. 複素指数関数の場合と同様, 複素数を掛けると, 解析信号は時間軸を中心に回転し, キャリア信号は時間軸上を移動する. このとき, 包絡面(線)は移動しない. 包絡面(線)は, 周波数成分ごとに周波数に比例した角度の回転を行うと, 形を保存したまま移動する.

一般に, 時系列信号を問題にするとき, 系の応答関数は $t < 0$ の領域で常にゼロであるから, そのフーリエ変換である伝達関数は解析信号と同様の性質を持つ. このことは, 因果性 (causality) として知られている¹⁸⁾.

解析信号の周波数 f をさらに複素数に拡張すると, 複素関数論の知識を利用して, 元の解析信号の性質をより

詳しく調べることができる. 位相回復に関する例があるので, 前田ら¹⁹⁾や中島ら²⁰⁾の解説を参考にされたい.

3. 光学とフーリエ展開

フーリエ展開の手法は, すでに述べたように, 光学で大きな役割を演じてきた. これのすべてを議論することは, 紙面の制約もさることながら, 著者の能力では不可能である. 著者のわかる範囲で, 興味のあるものに限定して議論を進める. そこで, まず対象を, 図 1 のように三つに分けた. 以下で, それぞれについて, 特に干渉縞と強度分布に重点をおいて, 議論する.

3.1 振幅のフーリエ展開

光学とフーリエ展開という言葉から, フランホーファー回折を連想された方は多いと思われる. フランホーファー回折やフレネル回折においても, フーリエ展開の役割は大きい²¹⁾. このほか, 結像理論, ホログラフィーそして光情報処理にフーリエ展開は不可欠である. これらの分野については, 他に解説が用意されているので, ここでは述べない. また, 光導波路についても同様である. 今後が期待されるテーマは, 光論理演算を主体とする光コンピュータと, 空間光変調器の性能向上で注目を集めつつある光アナログ計算であろうか.

3.2 干渉縞のフーリエ展開

振幅が光の本質的な量であるのに比べて, 干渉縞は観測の基本となる量である. 干渉縞を形成させるとき, 1) 空間的に異なる 2 点の光を重ねると, その干渉縞から, この 2 点間の距離に関する空間コヒーレンスの情報を得ることができる (コヒーレンス理論, 天体干渉計, 開口合成, 像面干渉分光映像法). 2) 時間的に異なる二つの光を重ねると, 時間コヒーレンスに関する情報, すなわち, スペクトル分布に関する情報を得ることができる (フーリエ分光法). 3) 中心周波数の異なる二つの光を干渉させると, 差周波を中心周波数とするビート信号を得ることができる. このとき, 一方の光の振幅を一定にしておく, 他方の振幅に関する情報を得ることができる²²⁾ (光ヘテロダイン法). 各々, 光学において重要な役割をはたしている概念もしくは技術である. 紙面の制約上, これらのいくつかに触れる.

時空間コヒーレンスを, 一概に論ずることは困難である. が, 多少話の状況を限定すれば, ひとまとめにして論ずることができる²³⁻²⁵⁾. 均一な²⁶⁾光の場合においては, その 3 次元空間コヒーレンス関数と, 3 次元波数ベクトルに関する光源のパワースペクトル密度との間に, 3 次元フーリエ変換の関係があることが示されている. い

ま、3次元波数ベクトルを \mathbf{k} とし、3次元空間周波数ベクトルを $\sigma = \mathbf{k}/(2\pi)$ とおくと、この関係は、次のように表すことができる。

$$\Gamma(\Delta\mathbf{r}) \supset G(\sigma) \quad (22)$$

ただし、 $G(\sigma)$ は光源のパワースペクトル密度を意味し、空間コヒーレンス $\Gamma(\Delta\mathbf{r})$ は次のように定義される。

$$\Gamma(\Delta\mathbf{r}) = \langle V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})V^*(\mathbf{r}) \rangle \quad (23)$$

ここで、 $\Delta\mathbf{r}$ は、注目する2点を示す位置ベクトル、たとえば、 \mathbf{r}_1 と \mathbf{r}_2 の差ベクトルである。 $V(\mathbf{r})$ は位置 \mathbf{r} における光の場を意味し、 $\langle \rangle$ は集合または時間平均を意味するものとする。(22)式からわかることは、3次元空間コヒーレンスを測定することにより、どのような方向 ($\sigma/|\sigma|$) から、どのような色 ($|\sigma|$) の光がきているかを知ることができるということである。 $\Gamma(\Delta\mathbf{r})$ の測定方法が、いくつか提案されている²⁷⁻²⁹。なかでも、開口合成と併用する方法²⁸)は、宇宙空間における観測に利用される可能性がある。また、この原理を光学的3次元フーリエ変換に利用することも検討されている³⁰。

(22)式の関係には、フーリエ分光法の原理も含まれている。いま光が、 z 軸方向へ伝播しているものとする、フーリエ分光法では、

$$\Gamma(\Delta z) = \Gamma(\Delta\mathbf{r})\delta(\Delta x)\delta(\Delta y) \quad (24)$$

を測定する。実空間で $\delta(\Delta x)\delta(\Delta y)$ を掛け算することは、スペクトル面ではそれぞれの方向に積分することに相当するので、1次元フーリエ変換によって次式の右辺が得られる。

$$\Gamma(\Delta z) \supset G(\sigma_x) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) d\sigma_x d\sigma_y \quad (25)$$

仮に光源に空間的な分布が存在していても、その情報は積分され、消えてしまうことがわかる。フーリエ分光法については、別に、本号に詳しい解説が予定されている。フーリエ分光法自体は、空間分解能をもたないが、これを結像面で行い、2次元アレーセンサーを用いると、分光情報と映像情報を同時に得ることができる(像面干涉分光映像法)³¹⁻³³。この方法は、天体観測にも利用されようとしている³⁴。

マイケルソンの天体干渉計や電波干渉計の像再生の原理となっている van Cittert-Zernike の定理も同様に、(22)から導くことができる。光の伝播方向に対してほぼ垂直に z 軸をとり、この軸に垂直な平面内の空間コヒーレンス関数

$$\Gamma(\Delta x, \Delta y) = \Gamma(\Delta\mathbf{r})\delta(\Delta z) \quad (26)$$

を測定する。先程と同様に、実空間で $\delta(\Delta z)$ を掛け算することは、スペクトル面ではこの方向に積分すること

に相当するので、空間コヒーレンス関数を2次元フーリエ変換することによって、次の右辺を得る。

$$\Gamma(\Delta x, \Delta y) \supset G(\sigma_x, \sigma_y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) d\sigma \quad (27)$$

この式が、van Cittert-Zernike の定理を示している。主に、スペクトル分布が積分され、その情報が消えることがわかる。マイケルソンの天体干渉計や開口合成による像再生は、(27)式の関係に基づいている。この式に基礎を置く回転シア型干渉計³⁵)によるさまざまな像再生法も提案されている³⁶⁻³⁸。干渉計による像再生は、他の方法も含め、Rodier がまとめている³⁹。光学開口合成望遠鏡に、1) 光ファイバを用いて基線長を長くすること⁴⁰ (光学長基線干渉計) や、2) 干渉計を宇宙空間で用いること^{41,42} (宇宙開口合成) も検討されている。近い将来、光による空間分解能の非常に高い像が、宇宙開口合成望遠鏡によって得られるかもしれない。

超短光パルスの合成の基本的な考え方は、図6にあるように、超短光パルスを分光器 (G_1, L_1) で分光し、そのスペクトルを空間フィルタ (M) で変調し、分光器 (L_2, G_2) で再合成する。興味深い点は系がコヒーレント系であることである。位相まで含めた任意の変調が可能である。コヒーレンス時間に比べて十分長い時間での干渉縞の観測に、長い間馴らされてきたものにとって、「周波数の異なる成分間の位相」というものが一見奇異に感じられるが、ここでは、すべてが、コヒーレンス時間内に起こる。特に興味深い点は、光の位相変調(または、周波数変調)によって広い帯域のスペクトルを発生させることができ、このスペクトルの位相を調整することによって、より短いパルスと同等に扱うことができることである⁴³。このようなパルスは、電気光学効果により、CW 光を位相変調(または、周波数変調)することにより、得ることができる。詳しくは、小林⁴⁴、森本ら⁴⁵、江馬⁴⁶などの解説を参照されたい。

入力部と同様の光学系を複数個、並列に使用する光学系が最近提案されている^{47,48}。入力光の色を識別するために、入射光のスペクトルを KL 展開⁴⁹)によって決定さ

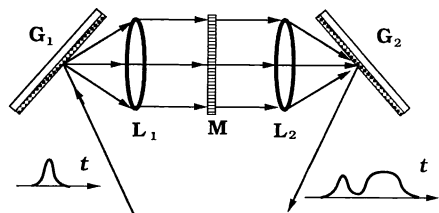


図6 超短光パルスの合成法

れた部分空間に投影する際、スペクトルの各直交基底との相関演算を液晶空間光変調素子などを用いて光学的に並列に行っている。もちろん、超高速の測定は行わないから、フィルタの位相は結果に無関係であり、系はインコヒーレントになっている。

もうひとつ、興味深いインコヒーレントな系がある。半導体レーザー (LD) の発振周波数を制御し、さまざまな周波数成分を作り出すことによって、所望のコヒーレンス関数を得る方法である^{49,50)}。ここでは、楕形のパワースペクトル分布を作りだし、楕形のコヒーレンス関数を合成している。基本となる関係は、(25)式の関係時間を時間軸と周波数軸に置き換えたものである。 $\tau = \Delta z/c$, $f = c\sigma_x$ とおくと、

$$\Gamma(\tau) \supset G(f) \quad (28)$$

を得る。簡単のために、周波数 f_0 を中心に、 f_p の間隔の N 本の楕形のパワースペクトル密度を作りだすものとする、

$$G(f) = \text{rect} \{(f - f_0)/(Nf_p)\} \{\text{comb}(f/f_p)\} \quad (29)$$

と書くことができる。このとき、コヒーレンス関数は、

$$\Gamma(\tau) = \{Nf_p \text{sinc}(Nf_p\tau) \exp(2\pi j f_0 \tau)\} * \text{comb}(f_p\tau) \quad (30)$$

で与えられる。コヒーレンス関数の楕の一本の幅は、 $1/(Nf_p)$ となり、それらの間隔は $1/f_p$ となることかわかる。この例では、このような光源からの光の後方散乱光を光ヘテロダイン検出し、干渉信号の包絡線を検出している。 f_p を変化させてゆき、後方散乱光の時間遅れと $1/f_p$ の整数倍が一致すると、大きな信号が得られる。このコヒーレンス合成では、超短パルス合成と異なり、基本的に応答速度の遅い装置ですべてが間に合うことは、大きな利点である。これに似たものに、移動する光源⁵¹⁾や進行超音波⁵²⁾による空間コヒーレンス合成の提案がある。

最近の光技術に、チャンネルド・スペクトル⁵³⁾に相当するものがよく見られるので、まず簡単にまとめてみる。一定時間 τ だけ遅れた波動を元の波動に重ね、分光器を用いて、周波数が f の成分を観測するものとする。重ねられた場合は、次のようになる。

$$v(t) + v(t+\tau) \supset \tilde{V}(f) + \tilde{V}(f) \exp(2\pi j \tau f) \quad (31)$$

われわれが実質的に観測するのは、強度の時間平均値である。

$$\begin{aligned} & \langle |\tilde{V}(f) + \tilde{V}(f) \exp(2\pi j \tau f)|^2 \rangle \\ & = 2 \langle |\tilde{V}(f)|^2 \rangle \{1 + \cos(2\pi \tau f)\} \end{aligned} \quad (32)$$

これが、チャンネルド・スペクトルである。周波数を変化してゆくと、周期 $1/\tau$ の周期的信号が得られる。

周波数領域後方散乱測定法 (OFDR ; optical frequency domain reflectometry) は、まさにこの原理に基づいている。光ファイバーなどの局所的な欠陥部からの後方散乱光と元の光を重ね合わせることで、測定される時間差から欠陥の位置を推定する。上と異なる点は、1) 白色光を用いないこと、2) 光ヘテロダインによるビート信号をスペクトル・アナライザ等でフーリエ解析する点である。この方式のいろいろな改良については、今井が解説⁵⁴⁾で触れている。

チャンネルド・スペクトルの光源に白色光を用いず、単色光の周波数を走引すれば、分光器を用いる必要はなくなる。現在もっとも簡単にこのような光源を得る方法は、LD の駆動電流や周囲温度を変化させ、発振周波数を走引する方法である (波長可変レーザー・ダイオードの応用)。このような計測法が、ほぼ同時期に、数人の日本の研究者らによって、それぞれ独立に提案された。得られるデータから、 τ を計算する方法には、いろいろな方法がある。小林⁵⁵⁾と石井⁵⁶⁾の解説がある。

3.3 像強度分布のフーリエ展開

像強度分布の本格的なフーリエ解析は、OTF (optical transfer function) の研究に始まると考えてよいであろう。部分コヒーレント結像理論¹⁶⁾においても像強度のフーリエ展開が用いられている。しかし、系が単純な線形系ではないために、この解析方法はあまり効力を発揮しなかったようである。画像処理の分野でも、ウィナーフィルタをはじめ、フーリエ展開が多用されてきたことは言うまでもない。

像強度のフーリエ解析で成功した最近の例としては、天体スペckル干渉法を挙げることができる。大気揺らぎで劣化した短時間露光画像をフーリエ変換し、その絶対値を積算してゆくと、劣化前の画像の空間周波数パワースペクトルが得られるというものである。同じ明るさの星による二重星の場合、等間隔の縞が現れるが、これは、3.2 で説明した、チャンネルド・スペクトルと同じものである。簡単に調べてみよう。得られる二重星の像は、星がひとつの時の像を $I(\mathbf{x})$ とすると、

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) + I(\mathbf{x} + \mathbf{d}) & \supset \tilde{I}_0(\mathbf{f}) \tilde{S}(\mathbf{f}) \\ & + \tilde{I}_0(\mathbf{f}) \tilde{S}(\mathbf{f}) \exp(2\pi j \mathbf{d} \cdot \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (33)$$

と表すことができる。ここで、 \mathbf{d} は二重星の位置のずれ、 $\tilde{S}(\mathbf{f})$ は結像系の短時間露光での OTF である。ひとつの星が回折限界よりも十分小さいと仮定して、 $\tilde{I}_0(\mathbf{f}_x)$ を無視し、右辺の強度を積算すると、

$$\begin{aligned} & \langle |\tilde{S}(\mathbf{f}) + \tilde{S}(\mathbf{f}) \exp(2\pi j \mathbf{d} \cdot \mathbf{f})|^2 \rangle \\ & = 2 \langle |\tilde{S}(\mathbf{f})|^2 \rangle \{1 + \cos(2\pi \mathbf{d} \cdot \mathbf{f})\} \end{aligned} \quad (34)$$

を得る。 $\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle$ の値は、回折限界までゼロでないことが知られているので、この2次元のパターンから d を知ることができる。これに関しては、像再生の方法も含めて、大坪の解説⁵⁷⁾がある。像再生のための位相回復については、すでに述べた解説^{19),20)}がある。粗面の面内変位を測定するスペックル写真法の原理⁵⁸⁾も、天体スペックル干渉法と同じである。変位の前後の二重露光写真の一部を、たとえば、光学的にフーリエ変換すると(34)式のような等間隔の縞が得られる。

武田のフーリエ変換法^{59),60)}は、実数値信号の解析信号への変換を利用した方法ととらえることができる。単にフーリエ展開の展開係数を求めているのではない。(15)式のような実数値をもつ信号をフーリエ変換して $\hat{V}^{(1)}(f)$ を得、これを(21)式で示した方法によって $\hat{V}(f)$ に変形し、フーリエ逆変換によって(16)式に示したような解析信号を求めていることに相当している。実数値のみの信号から、ヒルベルト変換によって虚数部を求め、これらから位相を計算しているともいえる。計算機が自由に使えるわれわれにとって、非常に自然で、使いやすい方法である。Rodierも2次元フーリエ変換を用いる同様な方法を使って、独立に、インコヒーレントホログラムの位相を計算している⁶¹⁾。

フーリエ変換法の出現によってその需要が高まったのが、位相接続法 (phase unwrapping) である^{62),63)}。解析信号の実部と虚部とからでは、位相の主値が得られるのみである。元の連続な位相分布を得るには、何らかの情報をもとに、 2π の整数倍のあいまいさを取り除く必要がある。主な研究成果は、文献39)にまとめられている。

干渉縞が単一空間周波数信号であれば、フーリエ変換法を用いる必要はない。単に、干渉縞強度分布を離散フーリエ変換するだけで、干渉縞の振幅と位相を得ることができる⁴⁾。これらの値は、それぞれほぼ最尤推定量に等しいことが示されている。このことは、先に述べたフーリエ級数展開の残差の最小性からでてくるものである。干渉縞の周期と、離散フーリエ変換の範囲がうまく一致すれば、ベクトルの大きさは $N=3$ で十分である⁶⁴⁾。この方式を利用すると、干渉縞の位相の測定を非常に高速化することができる⁶⁵⁾。LSI製造技術の向上によりこのような処理は、今後ますます高速化されるであろう。干渉縞強度分布の位相検出を共通光路に近い光学系を用いて実現したのがツールポット (タルポ) 干渉計⁶⁶⁾である。モアレ⁶⁷⁾も同様の技術であるといえることができる。

4. む す び

光学におけるフーリエ展開について、著者なりにまとめてみた。光学における、線形代数学と関数論の初歩の役割を見てきたようでもある。講義の教科書にと思い、以前から、光学と信号処理とが混ざり合ったこのあたりをうまくまとめた本を探しているが、以外と見つからない*1。光学をより魅力的な分野にしてゆくには、光学自身の中に新しい活力の源を掘り出してゆくことと、周辺分野との擦り合わせをよくすることが大事であろう。フーリエ展開というキーワードは、多分、後者に役立つように思われる。整理が不十分で、重要な事項や研究を見のがしたことと思われる。また、後半部分は、解説の解説のようにならざるを得なかった。紙面の制約もあったが、不明な点は、ひとえに現著者の責任である。ぜひ、原著解説を参照されたい。この小文が、読者の温故知新にわずかでもつながれば、幸いである。

文 献

- 1) エルッキ・オヤ (小川英光, 佐藤誠訳): パターン認識と部分空間法 (産業図書, 1986) 2章.
- 2) T. Kohonen: *Self-Organization and Associative Memory*, 3rd ed. (Springer-Verlag, 1989) Ch. 2.
- 3) J. H. Bruning, et al.: "Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses," *Appl. Opt.*, **13** (1974) 2693-2703.
- 4) J. F. Walkup and J. W. Goodman: "Limitations of fringe-parameter estimation at low light levels," *J. Opt. Soc. Am.*, **63** (1973) 399-407.
- 5) A. Oppenheim and R. W. Schaffer: *Digital Signal Processing* (Prentice-Hall, 1975) Sec. 2.
- 6) ロベルト・ヴィーフ (富久泰明監訳): *Z変換の理論と応用* (ブレイン図書, 1991).
- 7) 後藤憲一: 数学概説 (共立出版, 1981) 第5章.
- 8) 沢田昭二: 物理数学 (丸善, 1990) 第7章.
- 9) G. ストラング (山口昌也監訳, 井上昭訳): 線形代数学とその応用 (産業図書, 1978) 第3章.
- 10) J. W. Goodman: *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, 1968) Ch. 2.
- 11) R. N. Bracewell: *The Fourier Transform and its Applications*, 2nd ed. (McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1978) Ch. 6.
- 12) Ref. 11, Ch. 9.
- 13) Ref. 10, Ch. 3.
- 14) 左貝潤一: 位相共役光学 (朝倉書店, 1990) 第2章.
- 15) J. W. Goodman: *Statistical Optics* (John Wiley & Sons, 1984) Sec. 3.8.
- 16) M. Born and E. Wolf: *Principles of Optics*, 4th ed. (Pergamon, 1970) Ch. 10.
- 17) 加野 泰: コヒーレンス理論とその応用 (岩波書店,

*1 近い将来、この記述は修正が必要であろう。この原稿が仕上がった頃、筑波大学の谷田貝豊彦氏から、書評のための氏の著作のゲラ刷りが届いた。ちょうどこのあたりを含めた分野が、うまくまとめられているようである。

- 1976) 第1章.
- 18) Ref. 11, Ch. 12.
 - 19) 前田純治, 村田和美: “光学における位相回復問題”, 光学, **11** (1982) 230-238.
 - 20) 中島伸治, 朝倉利光: “ヒルベルト変換による位相回復”, 光学, **11** (1982) 241-251.
 - 21) L. Mertz: *Transformations in Optics* (John Wiley & Sons, 1965) Ch. 3.
 - 22) 中島俊典: “ヘテロダイン干渉法”, 光学, **9** (1980) 266-273.
 - 23) K. Itoh and Y. Ohtsuka: “Fourier-transform spectral imaging: retrieval of source information from 3-D spatial coherence,” J. Opt. Soc. Am. A, **3** (1986) 94-99.
 - 24) 伊東一良: “多重化分光映像法—フーリエ変換分光映像法—”, レーザー研究, **15** (1987) 772-781.
 - 25) 伊東一良, 一岡芳樹: “超多波長分光画像システム”, 計測と制御, **29** (1990) 56-61.
 - 26) A. M. Yaglom: *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions* (Prentice-Hall, 1962) p. 81.
 - 27) K. Itoh and Y. Ohtsuka: “Holographic spectral imaging,” J. Opt. Soc. Am. A, **3** (1986) 1239-1241.
 - 28) J. M. Mariotti and S. T. Ridgway: “Double Fourier spatio-spectral interferometry: Combining high spectral and high spatial resolution in the near infrared,” Astronaut. Astrophys., **195** (1989) 350-363.
 - 29) K. Itoh, T. Inoue, T. Yoshida and Y. Ichioka: “Interferometric supermultispectral imaging,” Appl. Opt., **29** (1990) 1625-1630.
 - 30) K. Itoh, T. Inoue and Y. Ichioka: “Interferometric spectral imaging and optical three-dimensional Fourier transformation,” Jpn. J. Appl. Phys., **29** (1990) L1561-L1564.
 - 31) J. Gay and D. Mekarnia: “Principle of spectral imagery by speckle and Fourier’s interferometries,” J. Opt., **18** (1987) 119-131.
 - 32) K. Itoh, T. Inoue, T. Ohta and Y. Ichioka: “Liquid-crystal imaging Fourier-spectrometer array,” Opt. Lett., **15** (1990) 652-654.
 - 33) T. Inoue, K. Itoh and Y. Ichioka: “Fourier-transform spectral imaging near the image plane,” Opt. Lett., **16** (1991) 934-936.
 - 34) D. Simons and L. Cowie: CFHT Information Bulletin No. 22 (Canada-France Hawaii Telescope Corporation, Kamuela, Hawaii, 1990) p. 8.
 - 35) O. Bryngdahl and A. W. Lohmann: “Variable magnification in incoherent holography,” Appl. Opt., **9** (1970) 231-232.
 - 36) J. B. Breckinridge: “Coherence interferometer and astronomical applications,” Appl. Opt., **11** (1972) 2996-2998.
 - 37) K. Itoh and Y. Ohtsuka: “Interferometric imaging of a thermally luminous two-dimensional object,” Opt. Commun., **48** (1983) 75-79.
 - 38) C. Roddier and F. Roddier: “High angular resolution observation of Alpha Orionis with a rotation shearing interferometer,” Astrophys. J., **270** (1983) L 23-L 26.
 - 39) F. Roddier: “Interferometric imaging in optical astronomy,” Phys. Reports (Review Section of Physics Letters), **170** (1988) 97-166.
 - 40) S. B. Shaklan and F. Roddier: “Single-mode fiber optics in a long-baseline interferometer,” Appl. Opt., **26** (1987) 2159-2163.
 - 41) J. E. Noordam, et al.: “OASIS: a mission concept,” Proc. ESA Workshop on Optical Interferometry in Space, ESA, **SP-273** (1987) 51-59.
 - 42) F. Roddier: “Imaging strategies for a space-borne interferometer,” *ibid.* (1987) 23-28.
 - 43) T. Kobayashi, et al.: “Picosecond to femtosecond optical synthesizers,” *Ultrafast Phenomena VI* (Springer, 1988), pp. 135-138.
 - 44) 小林哲郎: “超短光パルス技術”, 電子情報通信学会誌, **72** (1989) 171-180.
 - 45) 森本朗裕, ほか: “レーザーの超高速波形制御”, 光学, **18** (1989) 479-480.
 - 46) 江馬一弘: “超短光パルス波形の制御”, 応用物理, **60** (1991) 41-44.
 - 47) T. Jaaskelainen: “Color recognition systems,” 光学, **18** (1989) 2-7.
 - 48) 豊岡 了, ほか: “部分空間法による分光画像解析”, 第8回光波センシング技術研究会講演論文集 (1991) pp. 131-134.
 - 49) K. Hotate and O. Kamatani: “Reflectometry by means of optical-coherence modulation,” Opt. Lett., **25** (1989) 1503-1505.
 - 50) 鎌谷 修, 保立和夫: “光波コヒーレンス関数の合成によるリフレクトメトリー (OCODR法)”, 第5回光波センシング技術研究会講演論文集 (1990) pp. 15-22.
 - 51) K. Itoh and Y. Ohtsuka: “Coherence control by laser scanning,” Appl. Opt., **19** (1980) 3184-3188.
 - 52) Y. Ohtsuka: “Modulation of optical coherence by ultrasonic waves,” J. Opt. Soc. Am. A, **3** (1986) 1247-1256.
 - 53) 鶴田国夫: 続光の鉛筆 (新技術コミュニケーションズ, 1988) 第17章.
 - 54) 今井 洋: “高分解能光後方散乱測定法”, 光学, **20** (1991) 258-264.
 - 55) 小林喬郎: “半導体レーザーによる干渉測長技術”, 光学, **17** (1988) 279-284.
 - 56) 石井行弘: “半導体レーザーの周波数変調特性を用いた干渉法”, 光学, **20** (1991) 265-269.
 - 57) 大坪順次: “天体スペckル干渉法”, 光学, **13** (1984) 360-367.
 - 58) A. E. Ennos: “Speckle interferometry,” *Laser Speckle and Related Phenomena*, ed. J. C. Dainty (Springer, 1984) Sec. 6.6.
 - 59) M. Takeda, et al.: “Fourier-transform method of fringe pattern analysis for computer-based topography and interferometry,” J. Opt. Soc. Am., **72** (1982) 156-160.
 - 60) M. Takeda: “Spatial-carrier fringe-pattern analysis and its applications to precision interferometry and profilometry: An overview,” Ind. Metrol., **1** (1990) 79-99.
 - 61) F. Roddier and C. Roddier: “Interferogram analysis using Fourier transform techniques,” Appl. Opt., **26** (1987) 1668-1673.
 - 62) L. N. Mertz: “Speckle imaging, photon by photon,” Appl. Opt., **18** (1979) 611-614.
 - 63) K. Itoh: “Analysis of the phase unwrapping algorithm,” Appl. Opt., **21** (1982) 2470-2470.
 - 64) L. Mertz: “Real-time fringe-pattern analysis,” Appl. Opt., **22** (1983) 1535-1539.
 - 65) 加藤純一: “位相シフト電子モアレによる実時間波面計測”, 理研シンポジウム「新しい光応用技術—微小領域への発展—」講演予稿集 (1991) pp. 30-33.
 - 66) 横関俊介: “タルボ干渉計”, 光学, **5** (1980) 275-281.
 - 67) 鶴田国夫: 光の鉛筆 (新技術コミュニケーションズ, 1984) 第21章.