

光情報処理におけるフーリエ変換

谷田貝 豊彦

筑波大学物理工学系 〒305 つくば市天王台 1-1-1

(1992年3月23日受理)

Fourier Transform in Optical Computing

Toyohiko YATAGAI

Institute of Applied Physics, University of Tsukuba,
1-1-1, Tennoudai, Tsukuba 305

1. はじめに

フーリエ解析が光情報処理において重要なのは、フラウンホーファ回折がフーリエ変換の形で表されるからである。図1のように、振幅透過率が $f(x, y)$ である物体を波長 λ の平行光で照明したとき、そのフラウンホーファ回折は、

$$F(X, Y) = c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda z} (xX + yY) \right\} dx dy \quad (1)$$

で表される¹⁻⁴⁾。ただし、 z は物体から観測点までの距離、 c は定数である。フラウンホーファ回折が観測されるためには、 z は物体の大きさに比べて十分大きくなくてはならない。この条件を実験室で満足させることはむずかしいが、レンズを用いて、図2のように、回折光をレンズの焦点面で観測すれば、フラウンホーファ回折像は、

$$F(X, Y) = c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda f} (xX + yY) \right\} dx dy \quad (2)$$

と表せる。ただし、 f はレンズの焦点距離である。このように、レンズを用いてフラウンホーファ回折が求められることは、レンズの焦点面と無限遠にある透過物体とは互いに共役（結像関係）にあることから、容易に理解できる。

さて、観測面における座標を

$$\nu_x = \frac{X}{\lambda z} \quad \text{または} \quad \frac{X}{\lambda f} \quad (3)$$

$$\nu_y = \frac{Y}{\lambda z} \quad \text{または} \quad \frac{Y}{\lambda f} \quad (4)$$

と変形し、定数項 c を無視すれば、(1)、(2)式はいずれも

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \exp \{ -i 2\pi (x\nu_x + y\nu_y) \} dx dy \quad (5)$$

と書け、フーリエ変換の形になる。 ν_x, ν_y は空間周波数と呼ばれている。ここで、フーリエ変換を

$$F(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[f(x, y)] \quad (6)$$

のように、また、その逆変換を

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(\nu_x, \nu_y)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) \cdot \exp \{ i 2\pi (x\nu_x + y\nu_y) \} d\nu_x d\nu_y \quad (7)$$

で表すことにする。

以上のことから、二次元画像情報のフーリエ変換を求めるには、この画像をコヒーレント光で照明し、これをレンズの焦点面で観測すれば良いことがわかる。ここで注意しなければならないことは、(1)、(2)式で表されている $F(x, y)$ は光の振幅であることである。通常われわれが検出できるのは、光の強度分布

$$I(\nu_x, \nu_y) = |F(\nu_x, \nu_y)|^2 \quad (8)$$

である。したがって、正しくは、われわれが観測できる

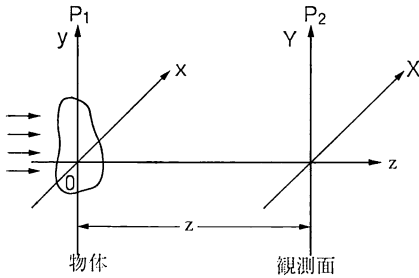


図 1 フラウンホーファ回折

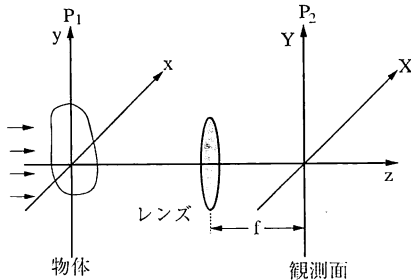


図 2 レンズによるフラウンホーファ回折

のはフーリエ変換の絶対値の二乗である。

二つの画像情報 $f_1(x, y)$ と $f_2(x, y)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F_1(\nu_x, \nu_y)$, $F_2(\nu_x, \nu_y)$ とすると、その積のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[F_1(\nu_x, \nu_y) \cdot F_2(\nu_x, \nu_y)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x', y') \cdot f_2(x-x', y-y') dx' dy' \\ = f_1(x, y) * f_2(x, y) \end{aligned} \quad (9)$$

となり f_1 と f_2 のコンボリューション (たたみこみ積分) が得られる。また、 $F_2(\nu_x, \nu_y)$ の複素共役を $F_2^*(\nu_x, \nu_y)$ とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[F_1(\nu_x, \nu_y) \cdot F_2^*(\nu_x, \nu_y)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x', y') \cdot f_2^*(x'-x, y'-y) dx' dy' \\ = f_1(x, y) \star f_2^*(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

であり、 f_1 と f_2 との相互相関が計算される。

このように、レンズのフーリエ変換作用により、コンボリューション、相互相関などの計算が可能であり、これらを用いて種々の情報処理ができる。アナログ光コンピューティングあるいはアナログ光情報処理などと呼ばれている分野がこれである¹⁻¹⁰⁾。

ここでは、まずフーリエ変換の情報処理における役割について二、三のコメントを述べ、続いてフーリエ変換による相互相関計算の応用として、光学的マッチトフィ

ルタリングと結合変換による相関演算法について述べることにする。そして、フーリエ解析の概念を拡張した、メラン変換や円形調和解析の概念も紹介する。

2. 情報処理におけるフーリエ変換

フーリエ変換をもとに相関演算ができることはすでに述べたが、情報処理において、もっと基本的な観点からもフーリエ変換は重要である。ここでは、光情報処理への応用を考慮して、線形不変性と情報圧縮の二つの話題を取り上げよう。

■ 2.1 線形空間不変性

フーリエ変換はその定義から線形変換である^{1,3,4)}。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)] \\ = \alpha \mathcal{F}[f_1(x, y)] + \beta \mathcal{F}[f_2(x, y)] \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 α , β は定数である。

さて、多くの光情報処理において、入力像が入力面のどの位置にあっても、処理結果が変わらないことが望ましい。例えば、パターン認識で、文字が入力面のどの位置にあっても、正しく認識されることが必要である。ここで、入力信号の位置ずれを表す演算子 S を

$$S[f(x, y)] = f(x-a, y-b) \quad (12)$$

のように定義することにする^{4,11)}。ただし、 a , b は任意の実数である。ここで、 $f(x, y)$ の性質が、 S の演算をしても変わらないでほしいので、われわれは、 $f(x, y)$ を次のような性質を持つ関数例 $\psi_{nm}(x, y)$ に分解することにする。

$$S[\psi_{nm}(x, y)] = \lambda_{nm} \psi_{nm}(x, y) \quad (13)$$

この関数 $\psi_{nm}(x, y)$ は S という演算に対して不変であることに注意しよう。これらの関数 $\psi_{nm}(x, y)$ は S の固有関数、 λ_{nm} は固有値と呼ばれている。

ここで、 S の固有関数は

$$\psi_{nm}(x, y) = \exp(\xi x + \eta y) \quad (14)$$

の形をしている。ただし、 ξ と η は複素数である。このことは、(14)式を(12)式に直接代入すればわかる。すなわち、

$$\begin{aligned} S[\exp(\xi x + \eta y)] \\ = \exp\{\xi(x-a) + \eta(y-b)\} \\ = \exp\{-\xi a + \eta b\} \cdot \exp(\xi x + \eta y) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、全ての固有値

$$\lambda_{\xi\eta} = \exp\{-\xi a + \eta b\} \quad (16)$$

の絶対値が1である場合を考えよう。この制限は、後で述べる(26)式の要請による。このとき、固有値は純虚数でなくてはならない。すなわち、 ν_x , ν_y を実整数とし

て

$$i 2\pi\nu_x = \xi \quad (17)$$

$$i 2\pi\nu_y = \eta \quad (18)$$

したがって、固有関数は、

$$\psi_{\nu_x, \nu_y}(x, y) = \exp [i 2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] \quad (19)$$

この固有関数列は、互いに直交ししかも完備であることが知られている。したがって、はじめに目的としたように、どのような $f(x, y)$ でもこの固有値列の線形結合として書くことができ、

$$f(x, y) = \sum_{\nu_x=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu_y=-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) \cdot \exp [i 2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] \quad (20)$$

ここで、 ν_x, ν_y を任意の実数に拡張すると(20)式は次のような積分の形に書くことができる。すなわち、

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) \cdot \exp [i 2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] d\nu_x d\nu_y \quad (21)$$

ここでようやく、フーリエ変換の形に到達した。このことから、フーリエ変換は線形空間移動演算子の固有関数で展開であることがわかる。

この逆変換は ψ_{ν_x, ν_y} の直交性を利用して、

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \exp \{-i 2\pi(x\nu_x + y\nu_y)\} dx dy \quad (22)$$

このようなわけで、フーリエ変換には空間不変性があることがわかる。このことをもっと明確にするために、(21)式に空間移動演算子 S を適用してみよう。

$$\begin{aligned} S[f(x, y)] &= f(x-a, y-b) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) \cdot S[\exp \{i 2\pi(x\nu_x + y\nu_y)\}] d\nu_x d\nu_y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\nu_x, \nu_y) F(\nu_x, \nu_y) \cdot \exp [i 2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] d\nu_x d\nu_y \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、

$$\lambda(\nu_x, \nu_y) = \exp \{-i 2\pi(a\nu_x + b\nu_y)\} \quad (24)$$

(22)式はしたがって

$$\begin{aligned} \lambda(\nu_x, \nu_y) F(\nu_x, \nu_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a, y-b) \cdot \exp \{-i 2\pi(x\nu_x + y\nu_y)\} dx dy \quad (25) \end{aligned}$$

となる。空間的に横移動された入力信号のフーリエ変換

は横移動前の入力信号のフーリエ変換に絶対値が1の位相項を乗じたものに等しい。したがって、

$$|\lambda(\nu_x, \nu_y) F(\nu_x, \nu_y)|^2 = |F(\nu_x, \nu_y)|^2 \quad (26)$$

これはフーリエ変換の空間不変性をあらわに表現した形である。

光学的なフーリエ変換にもこの空間不変性があるために、入力面のどの位置に物体があっても、そのフーリエスペクトルは光軸上に現れる。この性質を利用して、フーリエ変換によるパターンの分類¹²⁻¹⁵⁾、微小欠陥の検出¹⁶⁾、音声フォルマントの検出¹⁷⁾などに利用されている。

2.2 倍率不変変換とメラン変換

入力信号を空間不変変換演算子の固有関数展開によって、入力信号の位置変化に不変な演算処理を行うことができた。この手法を応用して、入力信号の倍率に不変な変換について考えてみよう。すなわち、次のような演算子 \mathcal{A} を考えよう¹¹⁾。

$$\mathcal{A}[f(x, y)] = f(ax, by) \quad (27)$$

この演算子の固有関数は

$$\mathcal{A}[\Psi(x, y)] = \lambda\Psi(x, y) \quad (28)$$

を満足しなくてはならない。この解として、

$$\Psi(x, y) = x^r y^s \quad (29)$$

ただし、 r と s は複素数である。したがって、

$$\mathcal{A}[x^r y^s] = (ax)^r (by)^s = a^r b^s x^r y^s \quad (30)$$

ここで、前と同様に、固有値に制限をつけてその絶対値を1としよう。そのためには r と s は純虚数でなくてはならないので、(17)、(18)式と同様に、

$$r = i 2\pi\nu_x \quad (31)$$

$$s = i 2\pi\nu_y \quad (32)$$

とおくと、(29)式は

$$\Psi(x, y) = x^{i 2\pi\nu_x} y^{i 2\pi\nu_y} \quad (33)$$

したがって、任意の関数 $f(x, y)$ は固有関数(33)式で展開できて、

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) x^{i 2\pi\nu_x} y^{i 2\pi\nu_y} d\nu_x d\nu_y \quad (34)$$

固有関数の直交関係は

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{xy} x^{i 2\pi\nu_x} y^{i 2\pi\nu_y} x^{-i 2\pi\nu'_x} y^{-i 2\pi\nu'_y} d\nu_x d\nu_y \\ = \delta(\nu_x - \nu'_x, \nu_y - \nu'_y) \quad (35) \end{aligned}$$

であるので、(34)式を $F(\nu_x, \nu_y)$ について解くと、

$$\begin{aligned} F(\nu_x, \nu_y) \\ = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) x^{-i 2\pi\nu_x - 1} y^{-i 2\pi\nu_y - 1} dx dy \end{aligned}$$

$$= \mathcal{M}[f(x, y)] \quad (36)$$

これは、二次元メラン (Mellin) 変換として知られている。当然のことながら、

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f(ax, by)] \\ = \exp\{-i 2\pi(a\nu_x + b\nu_y)\} \mathcal{M}[f(x, y)] \end{aligned} \quad (37)$$

であり、メラン変換は倍率不変である。

これを

$$x = \exp(\xi) \quad (38)$$

$$y = \exp(\eta) \quad (39)$$

のように変数変換すると

$$\begin{aligned} F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\xi, e^\eta) \\ \cdot \exp\{-i 2\pi(\xi\nu_x + \eta\nu_y)\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (40)$$

すなわち、 $f(x, y)$ を $f(e^\xi, e^\eta)$ のように座標変換したもののフーリエ変換がメラン変換になることがわかる。

このことから、光学的フーリエ変換によって、メラン変換が計算できることがわかる。

光学的なメラン変換は Casasent らによって研究され¹⁸⁾、計算機プログラムを用いた光学的な実現法¹⁹⁾、メラン変換の相関によるパターンの分類²⁰⁾、回転倍率不変な相関演算法²¹⁾などさまざまな発展がある。

2.3 最良多項式近似とデータ圧縮

情報処理をする上で、情報を圧縮して、本質的に必要なデータのみを処理、記録、表示することは、処理の効率を向上させるために重要な技術である。フーリエ変換はこの点においてもすぐれた特性を持っている。

ここでは、単純化のために、入力信号をベクトル \mathbf{f} で表し、これを互いに直交するベクトル ϕ_i で展開することを考える。すなわち、

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N g_i \phi_i \quad (41)$$

ただし、

$$\phi_i^+ \phi_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (42)$$

これは、もとのベクトル \mathbf{f} は ψ を介してベクトル $\mathbf{g}(g_i)$ に変換されていると解釈できる。もとのデータを近似あるいは圧縮するということは、ベクトル \mathbf{g} の次元をもとの次元よりも低い次元 M にすることである。ベクトル \mathbf{g} のはじめの M 成分はそのままして、残りの $N-M$ 成分には、定数 c_i を挿入するとしよう。このようにするとベクトル \mathbf{x} はもはや \mathbf{y} では正しく表すことができなくて、必ず誤差 ε を伴い、次のように表される。

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^M g_i \phi_i + \sum_{i=M+1}^N c_i \phi_i + \varepsilon \quad (43)$$

したがってこの誤差は、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{i=1}^N g_i \phi_i - \sum_{i=1}^M g_i \phi_i - \sum_{i=M+1}^N c_i \phi_i \\ &= \sum_{i=M+1}^N (g_i - c_i) \phi_i \end{aligned} \quad (44)$$

この誤差が最小になるような基底 ϕ を求めてみよう。誤差の評価量として平均自乗誤差

$$\begin{aligned} E[|\varepsilon|^2] &= E\left[\sum_{i=M+1}^N \sum_{i=M+1}^N (g_i - c_i)(g_i - c_i) \phi_i^+ \phi_i\right] \\ &= E\left[\sum_{i=M+1}^N (g_i - c_i)^2\right] \end{aligned} \quad (45)$$

をとる。ここで、 $E[\]$ は集合平均を意味する。定数 c_i に関しては、

$$\frac{\partial}{\partial c_i} E[(g_i - c_i)^2] = -2[E[g_i] - c_i] = 0 \quad (46)$$

より

$$c_i = E[g_i] \quad (47)$$

とする。これを(45)式に代入して、 $g_i = \phi_i^+ \mathbf{f}$ を用いると、

$$\begin{aligned} E[|\varepsilon|^2] &= \sum_{i=M+1}^N E[\{g_i - E(g_i)\} \{g_i - E(g_i)\}^+] \\ &= \sum_{i=M+1}^N \phi_i^+ E[\{\mathbf{f} - E(\mathbf{f})\} \{\mathbf{f} - E(\mathbf{f})\}^+] \phi_i \\ &= \sum_{i=M+1}^N \phi_i^+ \mathbf{R}_x \phi_i \end{aligned} \quad (48)$$

ただし、

$$\mathbf{R}_x = E[\{\mathbf{f} - E(\mathbf{f})\} \{\mathbf{f} - E(\mathbf{f})\}^+] \quad (49)$$

ここで、直交ベクトル ϕ_i が共分散行列 \mathbf{R}_x の固有ベクトルである時、(48)式の平均自乗誤差が最小になることが示されている。したがって、固有ベクトルは

$$\mathbf{R}_x \phi_i = \lambda_i \phi_i \quad (50)$$

を満足する必要がある。もしも、行列 \mathbf{R}_x の次元が十分大きければ、(50)式は次のような積分方程式に書き換えることができる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x, x') \psi(x', \xi) dx' = \lambda(\xi) \psi(x, \xi) \quad (51)$$

ここでさらに、 x の平均と共分散が位置の関数ではない(これを広義の定状性という)とすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') \psi(x', \xi) dx' = \lambda(\xi) \psi(x, \xi) \quad (52)$$

が得られる。

この方程式を解くには、両辺をフーリエ変換して、

$$T(\nu_x) \Psi(\nu_x, \xi) = \lambda(\xi) \Psi(\nu_x, \xi) \quad (53)$$

ただし、

$$T(\nu_x) = \mathcal{F}[R(x)] \quad (54)$$

$$\Psi(\nu_x, \xi) = \mathcal{F}[\psi(x, \xi)] \quad (55)$$

すべての ξ について (53) 式が成立するためには、

$$\Psi(\nu_x, \xi) = \delta(\nu_x - \xi) \quad (56)$$

が必要である。ただし、 $\delta(\nu)$ はデルタ関数である。したがって、

$$\psi(x, \xi) = \exp(i 2\pi \xi x) \quad (57)$$

このことから、フーリエ変換は最小自乗誤差の意味で最良の多項式近似をしていることがわかる^{22,23)}。この性質に、フーリエ変換の最終性²⁴⁾の性質を加味すると、特定の周波数以上の成分を切り捨てた帯域制限スペクトルをもった信号は、もともと信号の最良近似になることがわかる。これはまた、高次ベクトル切り捨てによる帯域圧縮の正当性を裏付けていることにもなる。

以上のような結果は、光学的なフーリエスペクトルを適当にサンプリングすることにより、信号を推測、復元、あるいは特徴の解析の可能性に対する理論的根拠を与えるものである。

3. 空間周波数フィルタリングとマッチトフィルター

入力信号 $f(x, y)$ の強調、変換、識別分類などを目的にして、入力信号のスペクトルを修正することを、空間周波数フィルタリングという^{25,26)}。図3は、空間周波数フィルタリングでよく用いられる光学系である。P₁面に入力信号 $f(x, y)$ を置き、これをコヒーレントな平行光で照明する。レンズ L₁ でこの信号のフーリエ変換を P₂面に得、そこに振幅透過率 $H(\nu_x, \nu_y)$ のフィルターを置いて、レンズ L₂ で再びフーリエ変換し、結果を出方面 P₃で観測する。この時、P₃面で得られる信号は

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \mathcal{F}[F(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x, \nu_y)] \\ &= f(x, y) * h(x, y) \end{aligned} \quad (58)$$

であり、 $f(x, y)$ と $h(x, y)$ のコンボリューションが得

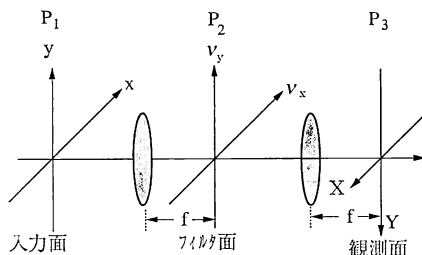


図3 空間周波数フィルタリングに用いられる光学系

られる。ただし、 $h(x, y)$ はフィルター $H(\nu_x, \nu_y)$ のフーリエ変換であり、フィルターの点応答関数と呼ばれるものである。

ここで

$$H(\nu_x, \nu_y) = F^*(\nu_x, \nu_y) \quad (59)$$

の場合を考えてみよう。すなわち、フィルターの特性が入力信号のスペクトルの複素共役の場合である。このフィルターが、入力信号が白色雑音に埋もれている（信号と雑音は加算的である）場合に入力信号を最大の信号対雑音比で検出するマッチトフィルターである。

この光学的マッチトフィルターは、Vander Lugt によって研究され²⁷⁻³⁰⁾、文字の自動認識への応用が期待され、多くの研究がなされた。その後、指紋の検出への応用³¹⁾、航空写真の解析（標的の検出³²⁾、ステレオ写真の解析³³⁾、雲の移動解析²⁶⁾、機械部品形状の異常検出^{34,35)}、金属疲労の解析³⁶⁾など、極めて多岐にわたる研究がある。その中でも、比較的大規模に研究されたものとして、Almeida らの研究によるケイソウの認識分類システムがある³⁷⁻³⁹⁾。このシステムは、水中に生息するケイソウの種類、数量から水汚染をモニターする目的で開発された。ケイソウは、大きさが約 40 μm で、形状と大きさは種類に応じてほぼ一定である。25 種類のケイソウの位相差顕微鏡像に対するマッチトフィルターをつくり、これを順次切り替え、あらかじめ用意された試料ケイソウのフィルム像との相関を検出するものである。試料フィルムの走査、マッチトフィルターの切り替え、検出像の解析は、計算機により自動化されていた。通常のマッチトフィルターは、信号に対して雑音を加算されている場合に最適化されている。乗算的な雑音に対するマッチトフィルターも設計されている⁴⁰⁾。

光学的マッチトフィルターは、他のパターンマッチング技術やパターン検出認識技術（通常はデジタル計算機による）と比較して、処理スピードが極めて高速であるという優れた特徴があるが、処理の柔軟性にかける欠点がある。これは、光学的アナログ情報処理技術全般に共通する欠点である。例えば、入力像の倍率が異なったり、あるいは、回転があると、識別能力が著しく低下することが知られている。この欠点を克服するために、後で述べるようなさまざまな努力がなされている。

4. 結合フーリエ変換による相関演算

空間周波数フィルタリングでは、入力物体とフィルターが直列的に配置され、相互相関が計算された。両者を並列的に配置して、相互相関を計算するものが結合

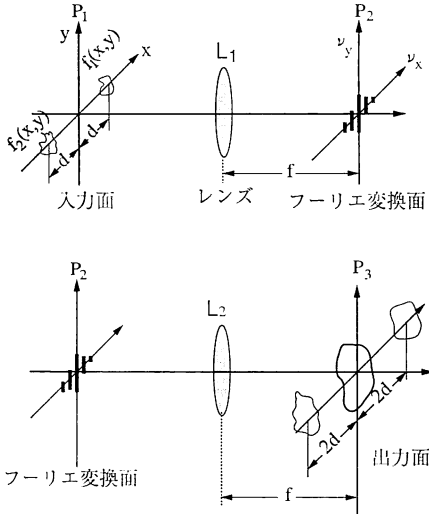


図 4 結合変換相関器の光学系

(フーリエ) 変換相関器 (joint transform correlator) である⁴¹⁻⁴⁴⁾。図 4 のように、二つの入力物体 $f_1(x, y)$ と $f_2(x, y)$ を考えよう (一方をフィルターの応答関数と考えることができる)。これを互いに距離 $2d$ をおいて入力面 P_1 に配置する。これをコヒーレント光で照明すると、フーリエ変換面 P_2 では、

$$F(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[f_1(x-d, y) + f_2(x+d, y)] \\ = \exp(-i 2\pi d \nu_x) F_1(\nu_x, \nu_y) \\ + \exp(i 2\pi d \nu_x) F_2(\nu_x, \nu_y) \quad (60)$$

これをいったん写真や空間光変調器に記録すると、記録される強度分布は、

$$|F(\nu_x, \nu_y)|^2 \\ = |F_1(\nu_x, \nu_y)|^2 + |F_2(\nu_x, \nu_y)|^2 \\ + \exp(i 4\pi d \nu_x) F_1(\nu_x, \nu_y) F_2^*(\nu_x, \nu_y) \\ + \exp(i 4\pi d \nu_x) F_1^*(\nu_x, \nu_y) F_2(\nu_x, \nu_y) \quad (61)$$

となる。これを再び光学的にフーリエ変換すると、出力面 P_3 では

$$\mathcal{F}[|F(\nu_x, \nu_y)|^2] \\ = \{f_1(x, y) \star f_1^*(x, y) + f_2(x, y) \star f_2^*(x, y)\} \\ + f_1(x-2d, y) \star f_2^*(x-2d, y) \\ + f_1^*(x+2d, y) \star f_2(x+2d, y) \quad (62)$$

が得られる。第二項と第三項が入力 $f_1(x, y)$ と $f_2(x, y)$ の相互相関関数になる。

空間周波数フィルタリングでは一度フィルターを作れば、処理の内容に変更がない限り、参照パターン (フィルターの応答関数) は必要ないが、結合フーリエ変換による相関器では、相関演算ごとに、参照パターン (フィルターの応答関数) を用意し、(61) 式の強度分布を記録

しなければならない。このことが、空間周波数フィルタリングに比べて、結合変換相関法が利用されてこなかった理由である。しかし、高解像度の実時間記録素子が容易に利用できるようになって、再び注目されるようになった。最近、液晶ライトバルブや強誘電性液晶空間光変調器を利用した研究^{45,46)}、記録媒体の非線形特性を積極的に利用して識別性能を向上させる研究⁴⁷⁻⁴⁹⁾ などがあり、この分野の研究が活発化している。

5. フーリエ解析の拡張—極座標におけるフーリエ解析

前節までは、フーリエ変換を直交座標系で考えてきたが、ここではこれを極座標系で取り扱うことにする。すなわち、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (63)$$

$$\nu_x = \rho \cos \phi, \quad \nu_y = \rho \sin \phi \quad (64)$$

とおくと (5) 式は、

$$F(\rho, \phi) = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \\ \cdot \exp\{-i 2\pi r \rho \cos(\theta - \phi)\} d\theta \quad (65)$$

ここで、 $f(r, \theta)$ は θ の周期関数なので、

$$f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) \exp(i m \phi) \quad (66)$$

と展開できることに注意しよう。これを (65) 式に代入して積分の順序をかえると、

$$F(\rho, \phi) \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left\{i m \left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \int_0^{2\pi} f_m(r) J_m(2\pi r \rho) r dr \quad (67)$$

ただし、 $J_m(\)$ は m 次の第一種ベッセル関数である。したがって、(67) 式は

$$F(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m F_m(\rho) \exp(i m \phi) \quad (68)$$

のように書ける。ただし、

$$F_m(\rho) = \int_0^\infty f_m(r) J_m(2\pi r \rho) r dr \quad (69)$$

(69) 式は、 m 次のハンケル変換と呼ばれている。

ここで再び、(66) 式の極座標展開

$$f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) \exp(i m \phi) \quad (66)$$

について考えてみよう。これは、 $\exp(i m \theta)$ の直交性により、

$$f_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \exp(-i m \theta) d\theta \quad (70)$$

とも書けることに注意しよう。

次に、入力信号 $f(r, \theta)$ が角度 α だけ回転していたとすると、

$$f(r, \theta + \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) \exp(i m \alpha) \exp(i m \theta) \quad (71)$$

のようになる。

さて、このように極座標系におけるフーリエ展開を検討してきたのは、これが、回転運動している入力物体のマッチフィルタリングに有効だからである。マッチフィルタリングの参照パターンとして、フーリエ展開の第 m 次項 (m 次調和項)

$$f_m(r, \theta) = f(r, \theta) \exp(i m \theta) \quad (72)$$

を利用すると、回転を受けた入力物体に対しても高い検出能力があるのである⁵⁰⁻⁵⁵。これを次に示そう。

まず、ここでは、マッチフィルターの検出能力の基準として、中心相関値を定義しよう。はじめに、 $f(r, \theta)$ と $f(r, \theta + \alpha)$ の直交座標系における表示をそれぞれ、 $f(x, y)$ と $f_a(x, y)$ とする。 $f(x, y)$ を参照パターンとしたマッチフィルターに $f_a(x, y)$ が入力された場合の相関出力は、

$$V(x, y, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x', y') f^*(x' - x, y' - y) dx' dy' \quad (73)$$

このときの中心相関値は

$$V(0, 0, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x', y') f^*(x', y') dx' dy' \quad (74)$$

である。この値は、必ずしも相関関数の最大値(相関ピーク値)を与えるものではないことに注意せよ。

(74)式の極座標表現は

$$C(\alpha) = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} f(r, \theta + \alpha) f^*(r, \theta) d\theta \quad (75)$$

これに(66)式を代入すると、

$$C(\alpha) = \int_0^{\infty} r \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m^*(r) \int_0^{2\pi} f(r, \theta + \alpha) \cdot \exp(-i m \theta) d\theta \right\} dr \quad (76)$$

(71)式より

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta + \alpha) \exp(-i m \theta) d\theta = f_m(r) \exp(i m \alpha) \quad (77)$$

が成立するので、(76)式は

$$C(\alpha) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i m \alpha) \int_0^{\infty} r |f_m(r)|^2 dr \quad (78)$$

さて、ここで(72)式の m 次調和項を参照パターンとした場合には、

$$C_m(\alpha) = A \exp(i m \alpha) \quad (79)$$

ただし、

$$A = 2\pi \int_0^{\infty} r |f_m(r)|^2 dr \quad (80)$$

したがって、その強度は、

$$|C_m(\alpha)|^2 = A^2 \quad (81)$$

となり、入力物体の回転に不変の出力となる。

このように、円形調和項を参照パターンとするマッチフィルタリングは、入力物体に対して回転不変の特性があることがわかる。この原理にしたがった、マッチフィルタリングの実験^{55,56}、位相型フィルターの提案⁵⁷などがある。

また、通常は一つの調和項のみに対するフィルターが設計されるが、調和項の各次数の線形結合を用いる方法も提案されている⁵⁸⁻⁶¹。

6. おわりに

光情報処理におけるフーリエ変換の役割について、基本的な事項のいくつかを述べた。アナログ光演算法についての優れた解説は多く、そのフーリエ光学的な解析法は広く理解され、利用されている。ここでは、それらとは若干異なったアプローチにより、フーリエ解析法の役割を横断的に述べたつもりである。

紙数の都合で、空間フィルターの最適設計法^{62,64}、空間座標変換法⁶⁵などの興味ある話題を割愛せざるを得なかった。

文 献

- 1) J. W. Goodman: *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York, 1968).
- 2) 辻内順平, 村田和美: 光情報処理 (朝倉書店, 1974).
- 3) J. Gaskil: *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics* (John Wiley & Sons, New York, 1978).
- 4) 谷田貝豊彦: 光とフーリエ変換 (朝倉書店, 1992).
- 5) L. J. Cutrona, E. N. Leith, C. J. Palermo and L. J. Porcello: IRE Trans. Inform. Theory, **IT-6** (1960) 386.
- 6) D. Casasent ed.: *Optical Signal Processing* (Springer-Verlag, 1977).
- 7) S. H. Lee: *Optical Information Processing* (Springer-Verlag, 1981).
- 8) F. T. S. Yu: *Optical Information Processing* (John Wiley & Sons, New York, 1983).
- 9) 稲場文男編: 光コンピューター (オーム社, 1985).
- 10) 辻内順平, 一岡芳樹, 峯本 工: 光情報処理 (オーム社, 1989).
- 11) H. Stark ed.: *Applications of Optical Fourier Transforms* (Academic Press, New York, 1982).

- 12) G. Lendaris and G. Stanley: Proc. IEEE, **58** (1970) 198.
- 13) H. Stark: Opt. Eng., **13** (1974) 243.
- 14) H. L. Kasdam: Proc. SPIE, **129** (1977) 28.
- 15) J. W. Duvernoy: Appl. Opt., **15** (1976) 1584.
- 16) A. Iwamoto, *et al.*: Appl. Opt., **19** (1980) 1196.
- 17) 黒田靖尚, 谷田貝豊彦: 応用物理学会秋季大会予稿集, Op-ZH-11, Vol. 3 (1991) p. 825.
- 18) D. Casasent and D. Psaltis: Opt. Commun., **17** (1976) 59.
- 19) D. Casasent and C. Szczutokowski: Opt. Commun., **19** (1976) 217.
- 20) D. Casasent and M. Kraus: Opt. Commun., **19** (1976) 212.
- 21) T. Yatagai, K. Choji and H. Saito: Opt. Commun., **38** (1981) 162.
- 22) A. Papolis: *Systems and Transforms with Applications in Optics* (McGraw-Hill, New York, 1968).
- 23) 大石進一: フーリエ解析 (岩波書店, 1988).
- 24) 小出昭一郎: 物理現象のフーリエ解析 (東大出版会, 1981).
- 25) E. L. O'Neill: IRE Trans. Inform. Theory, **IT-2** (1956) 56.
- 26) A. Vander Lugt: Proc. IEEE, **62** (1974) 1300.
- 27) G. L. Turin: IRE Trans. Inform. Theory, **IT-6** (1960) 311.
- 28) A. Vander Lugt: IEEE Trans., **IT-10** (1964) 139.
- 29) A. Vander Lugt and F. B. Rotz: Appl. Opt., **9** (1970) 215.
- 30) H. J. Caulfield and W. T. Matoney: Appl. Opt., **8** (1969) 2354.
- 31) J. Tsujiuchi, K. Matsuda and N. Takeya: *Applications of Holography*, ed. E. Barrekette, *et al.* (Plenum Press, 1971) p. 247.
- 32) K. G. Leib, *et al.*: Appl. Opt., **17** (1978) 2892.
- 33) F. Rotz: Digest of Papers, 1975 Optical Computing Conference IEEE (1975) p. 162.
- 34) G. Indevetouw, T. Tschudi and J. Steffen: Appl. Opt., **17** (1978) 911.
- 35) A. D. Gara: Appl. Opt., **18** (1979) 172.
- 36) E. Marom: Appl. Opt., **9** (1970) 1385.
- 37) S. P. Almeida, *et al.*: IEEE Trans. Meas. Instrum., **IM-26** (1977) 312.
- 38) S. P. Almeida, *et al.*: Appl. Opt., **18** (1979) 1663.
- 39) J. Partin, *et al.*: *Holography in Medicine and Biology*, ed. G. von Bally (Springer-Verlag, 1979) p. 73.
- 40) T. Yatagai: Opt. Commun., **19** (1976) 236.
- 41) C. S. Weaver and J. W. Goodman: Appl. Opt., **5** (1966) 1248.
- 42) J. E. Rau: J. Opt. Soc. Am., **56** (1966) 1490.
- 43) F. T. S. Yu and J. E. Ludman: Opt. Lett., **11** (1986) 395.
- 44) B. Javidi and S. F. Odeh: Opt. Eng., **27** (1988) 295.
- 45) W. P. Bleha, *et al.*: Opt. Eng., **17** (1978) 371.
- 46) T. Iwaki and Y. Mitsuoka: Opt. Lett., **15** (1990) 1218.
- 47) B. Javidi: Appl. Opt., **28** (1989) 2358.
- 48) F. T. S. Yu, *et al.*: Appl. Opt., **28** (1989) 2988.
- 49) B. Javidi, *et al.*: Appl. Opt., **30** (1991) 1772.
- 50) A. M. Cormack: J. Appl. Phys., **34** (1963) 2722.
- 51) A. M. Cormack: J. Appl. Phys., **35** (1964) 2908.
- 52) E. W. Hansen and J. W. Goodman: Opt. Commun., **24** (1978) 268.
- 53) E. W. Hansen: Appl. Opt., **20** (1981) 2266.
- 54) H. H. Arsenault, *et al.*: Appl. Opt., **21** (1982) 610.
- 55) Y. N. Hsu, H. H. Arsenault and G. April: Appl. Opt., **21** (1982) 4012.
- 56) Y. N. Hsu and H. H. Arsenault: Appl. Opt., **21** (1982) 4016.
- 57) J. A. Davis, L. R. Tork and D. M. Cottrell: Appl. Opt., **30** (1991) 1820.
- 58) G. F. Schils and D. W. Sweeney: J. Opt. Soc. Am., **A 3** (1986) 1433.
- 59) G. F. Schils and D. W. Sweeney: Opt. Lett., **12** (1987) 307.
- 60) E. Ochoa, G. F. Schils and D. W. Sweeney: Opt. Eng., **27** (1988) 266.
- 61) D. W. Sweeney, *et al.*: Appl. Opt., **26** (1987) 3458.
- 62) N. C. Gallagher and B. Liu: Appl. Opt., **12** (1973) 2328.
- 63) J. Turunen, A. Vasara and J. Westerholm: Opt. Eng., **28** (1989) 1162.
- 64) N. Yoshikawa and T. Yatagai: Technical Digest, OSA Topical Meeting on Diffractive Optics, New Orleans (1992) p. 151.
- 65) O. Bryngdahl: J. Opt. Soc. Am., **64** (1974) 1092.