

研究速報

繰返し型位相回復アルゴリズムにおける停滞問題の克服

高橋 徹*・高城 洋明**

* 大分工業高等専門学校電気工学科 〒870-01 大分市大字牧 1666

** 九州工業大学電子工学教室 〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1

(1992年2月26日受付, 1992年4月24日受理)

A Solution for the Stagnation Problem of an Iterative Phase-Retrieval Algorithm

Tohru TAKAHASHI* and Hiroaki TAKAJO**

* Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology, 1666, Maki, Oita 870-01

** Department of Electronic Engineering, Kyushu Institute of Technology, 1-1, Sensuicho, Tobata-ku, Kitakyushu 804

(Received February 26, 1992; Accepted April 24, 1992)

The iterative phase-retrieval algorithm sometimes stagnates on the object different from the correct solution. In this paper, we investigate the behavior of the hybrid input-output (HIO) version of the iterative phase retrieval algorithm and show that, although HIO is usually combined with the error-reduction (ER) version, one can overcome the stagnation problem by performing HIO alone.

1. はじめに

天体スペックル干渉法やX線結晶学等のさまざまな分野において、物体のフーリエ振幅から物体そのものを回復する方法、すなわち物体のフーリエ位相を回復する方法が必要とされている。この位相回復法の一つに繰返し型の位相回復アルゴリズムがある¹⁾。この繰返し型位相回復アルゴリズムは、ノイズの影響が小さく種々の先験的情報を簡単にアルゴリズムの中に取り込めるなど、多くの長所を有している。しかし重大な欠点も存在する。すなわち繰返し型位相回復アルゴリズムは時として回復すべき物体以外の物体に収束して停滞してしまうことが指摘されている²⁾。

これまでの論文においてわれわれは、繰返し型位相回復アルゴリズムの中で最も基本的なエラーリダクション・アルゴリズム (ER) の停滞について考察した^{3,4)}。本報告では、通常 ER と組み合わせて用いられるハイブリッド・インプットアウトプット・アルゴリズム (HIO) の特性について考察を加え、HIO を単独で連続して用いることによって ER における停滞を確実に克服できることを示す。

2. エラーリダクション・アルゴリズム (ER) の停滞

繰返し型の位相回復アルゴリズムは、フーリエ変換とフーリエ逆変換を用いることによって物体領域の拘束条件とフーリエ領域の拘束条件を繰返し適用して、最終的に両方の領域の拘束条件を満足する物体すなわち解に収束させる方法である。本報告では非負の実数値物体を扱うものとする。この場合の物体領域の拘束条件には、通常サポート (物体が占める領域) 条件と非負条件が用いられる。アルゴリズムの各繰返しにおいてフーリエ変換される物体を入力物体と呼び、そのフーリエ振幅を測定されたフーリエ振幅に置き換えて逆フーリエ変換して得られる物体を出力物体と呼ぶ。したがって、出力物体はフーリエ領域の拘束条件を常に満足しており、出力物体のフーリエ位相は入力物体のフーリエ位相に一致する。

ER の停滞について考えよう。ER は、繰返し回数 m 回目の入力物体を g_m 、その出力物体を g'_m とおくと、 $m+1$ 回目の入力物体を

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \notin \gamma \\ 0 & (x, y) \in \gamma \end{cases} \quad (1)$$

とする方法である. (x, y) は物体のサンプル点を表す. γ は出力物体 \mathbf{g}'_m の値が物体領域の拘束条件を満たしていないサンプル点の集合である. アルゴリズムが不動状態となるのは, 入力物体が繰返しによって変化せず,

$$g_{m+1}(x, y) = g_m(x, y) \quad (2)$$

が成り立つときである. これを(1)式に代入すると,

$$g_m(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \notin \gamma \\ 0 & (x, y) \in \gamma \end{cases} \quad (3)$$

となる. ER においては, 入力物体は物体領域の拘束条件を満たし出力物体はフーリエ領域の拘束条件を満たす. したがって ER が解に収束するためには入力物体と出力物体が等しくならなければならない. ところが, (3)式は γ に含まれるサンプル点でこのことが満足されていなくても ER が収束してしまうことを主張している.

3. ハイブリッド・インプットアウトプット・アルゴリズム (HIO) による停滞の克服

HIO は, $m+1$ 回目の繰返しにおける入力物体を,

$$g_{m+1}(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \notin \gamma \\ g_m(x, y) - \beta g'_m(x, y) & (x, y) \in \gamma \end{cases} \quad (4)$$

とする方法である. β はフィードバック定数で正の実数である. 物体領域の拘束条件を満足していないサンプル点に対する処理が(1)式に示した ER とは異なっていることがわかる.

HIO が ER の停滞を克服できることを示そう. ER が停滞したときの入力物体を \mathbf{g}_s , 出力物体を \mathbf{g}'_s とおく. この \mathbf{g}_s を HIO の初期物体 \mathbf{g}_0 として用いたときの HIO の挙動を考える. Fig. 1 に各物体の関係を概念的に示す. 同図では各物体の $(x, y) \notin \gamma$ および $(x, y) \in \gamma$ における値を, 各々 1 次元の量として表している. 例えば $(x, y) \in \gamma$ における値がゼロである \mathbf{g}_s は横軸上に存在するベクトルとして表示される. さて, ER の停滞状態では(3)式が成り立つので, $(x, y) \notin \gamma$ において入力物体 $\mathbf{g}_s (= \mathbf{g}_0)$ と出力物体 $\mathbf{g}'_s (= \mathbf{g}'_0)$ の値は等しい. すなわち

$$g_0(x, y) = g'_0(x, y) = g'_s(x, y) \quad (x, y) \notin \gamma \quad (5)$$

である. したがって(4)式から \mathbf{g}_1 は

$$g_1(x, y) = \begin{cases} g_0(x, y) & (x, y) \notin \gamma \\ g_0(x, y) - \beta g'_s(x, y) & (x, y) \in \gamma \end{cases} \quad (6)$$

と表すことができる. ここで, 出力物体 \mathbf{g}'_s の $(x, y) \in \gamma$ における値をゼロとした物体を $\mathbf{g}'_{s(\gamma)}$ とおくと, (6)式は

$$g_1(x, y) = g_0(x, y) - \beta g'_{s(\gamma)}(x, y) \quad (7)$$

と書くことができる. ところで $\mathbf{g}'_{s(\gamma)}$ は, \mathbf{g}'_s と \mathbf{g}_s を用いて

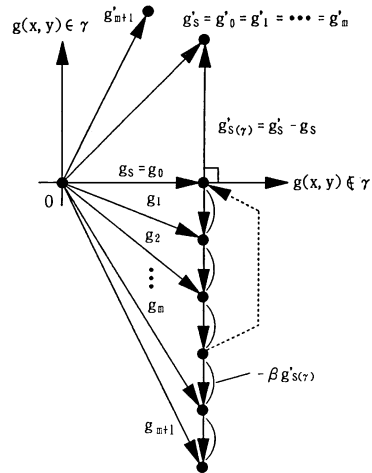


Fig. 1 The input and the output of HIO in the output-stagnation state. In this state, although the input changes by $-\beta \mathbf{g}'_{s(\gamma)}$ in every iteration, the output remains at \mathbf{g}'_s . This figure is drawn assuming that HIO can move out of the output-stagnation state at $(m+1)$ th iteration. The dotted arrow shows that input returns to \mathbf{g}_0 if ER is employed in the output-stagnation state.

$$g'_{s(\gamma)}(x, y) = g'_s(x, y) - g_s(x, y) \quad (8)$$

と表すことができる. \mathbf{g}'_s と \mathbf{g}_s のフーリエ位相は互いに等しいので, (8)式は $\mathbf{g}'_{s(\gamma)}$ のフーリエ位相が \mathbf{g}'_s のフーリエ位相とすべての周波数において, 同位相であるか π (rad) 異なるかのいずれかであることを示している. すなわち,

$$\theta'_{s(\gamma)}(u, v) = \theta'_s(u, v) \pmod{\pi} \quad (9)$$

が成り立つ. ただし空間周波数を (u, v) として物体のフーリエ位相を $\theta(u, v)$ と表し, 添字は物体の添字と共通とする. したがって(7), (9)式および θ_0 は θ'_s に等しいことから,

$$\theta_1(u, v) = \theta'_s(u, v) \pmod{\pi} \quad (10)$$

が成り立つこと, すなわち θ_1 は θ'_s とすべての周波数において, 同位相であるか π (rad) 異なるかのいずれかであることがわかる. もしも θ_1 が θ'_s とすべての周波数において同位相であるならば, 入力物体 \mathbf{g}_1 が $-\beta \mathbf{g}'_{s(\gamma)}$ だけ変化しているにもかかわらず出力物体 \mathbf{g}'_1 は \mathbf{g}'_s に停滞することになる. 本報告では, たとえ入力物体が変化しても出力物体が変化しない状態を出力停滞状態と呼ぶ. (7)式からわかるように, β が小さいほど変化分 $-\beta \mathbf{g}'_{s(\gamma)}$ が小さくなるので θ_1 は θ_0 とすなわち θ'_s と同位相となる可能性が強く, したがって β が小さいほど出力停滞状態を生じる可能性が高い.

出力停滞状態では, \mathbf{g}'_1 は \mathbf{g}'_s に一致するので, (5)

式と(7)式から、

$$g'_1(x, y) = g_1(x, y) \quad (x, y) \notin \gamma \quad (11)$$

が成り立つ。これを(4)式に用いると、 g_2 は

$$g_2(x, y) = g_1(x, y) - \beta g'_{s(\gamma)}(x, y) \quad (12)$$

となる。これに(7)式を代入すると、

$$g_2(x, y) = g_0(x, y) - 2\beta g'_{s(\gamma)}(x, y) \quad (13)$$

と表すことができる。同様の議論を繰り返して、出力停滞状態にあるときの k 回目の入力物体が、

$$g_k(x, y) = g_0(x, y) - k\beta g'_{s(\gamma)}(x, y) \quad (14)$$

となること、またこのとき、

$$g_k(x, y) = g'_s(x, y) \quad (x, y) \notin \gamma \quad (15)$$

が成り立つことを示すことができる。すなわち、出力物体が停滞し続ける間は、Fig. 1 に示すように入力物体の $(x, y) \in \gamma$ における値のみが一回に $-\beta g'_{s(\gamma)}$ ずつ変化する。

さて、(9)式において $\theta'_{s(\gamma)}(u, v)$ がすべての周波数において $\theta'_s(u, v)$ と π (rad)異なっているとすると、

$$|G'_s(u, v)| < |G'_s(u, v) - G'_{s(\gamma)}(u, v)| \quad (16)$$

が成り立つことになる。ただし、 G は物体のフーリエ変換である。この式は、 g'_s のエネルギー(すべてのサンプル点に対する2乗和)は g'_s の $(x, y) \in \gamma$ における値をゼロとした物体のエネルギーよりも大きいという事実と矛盾する。したがって $\theta'_{s(\gamma)}(u, v)$ は、少なくとも一つの周波数において $\theta'_s(u, v)$ と同位相である。この同位相となる周波数を (u_p, v_p) と置き、入力物体 g_k のフーリエ位相 $\theta_k(u_p, v_p)$ に注目しよう。(14)式から

$$G_k(u_p, v_p) = G_0(u_p, v_p) - k\beta G'_{s(\gamma)}(u_p, v_p) \quad (17)$$

である。右辺の第1項と第2項は同位相であるので、繰返し回数 k を増やしてゆくことによって、 $\theta_k(u_p, v_p)$ はいつかは必ず π 反転を生じることがわかる。このとき出力物体は、もはや g'_s には一致しないので出力停滞状態から脱出することができる。Fig. 1 では $m+1$ 回目での π 反転が生じるものとして表示している。このようにHIOは、ERの停滞物体に対して出力停滞状態となっても、入力物体が変化し続けてある周波数のフーリエ位相が必ず π 反転を生じるので、停滞を常に克服することができるのである。

以上の考察から、HIOをERと組み合わせて用いる通常の方法(HIO/ER)が停滞する原因は明らかである。HIOが出力停滞状態からの脱出を目指しているときにERを1回でも実行すると、(1)式が実行されて $(x, y) \in \gamma$ に対する値はすべてゼロとなり、Fig. 1 に示すように入力物体はERの停滞入力物体 $g_s (= g_0)$ にもどってしまう。ERを脱出の途中で実行する限りこのことが

繰り返されるので、出力物体は停滞し続けることになるのである。したがって停滞の克服に関する限り、ERをHIOと組み合わせて用いるべきではない。

つぎに、HIOの不動状態について考察しよう。不動状態では入力物体も出力物体もともに変化しない。したがって、不動状態は先に定義した出力停滞状態の特別な場合と考えられる。不動状態では(2)式が成り立つので、これを(4)式に代入すると、

$$g_m(x, y) = \begin{cases} g'_m(x, y) & (x, y) \notin \gamma \\ g_m(x, y) - \beta g'_m(x, y) & (x, y) \in \gamma \end{cases} \quad (18)$$

となる。下段の関係式から、

$$g'_m(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \gamma \quad (19)$$

となることが導かれる。この式は、アルゴリズムが不動状態になったときの出力物体は物体領域の拘束条件を満たしていることを示している。一方、アルゴリズムの定義から出力物体はフーリエ領域の拘束条件を満たしている。したがってアルゴリズムが不動状態になったときの出力物体は、物体領域とフーリエ領域の両方の拘束条件を満たす物体すなわち解であることがわかる。このことはERと根本的に異なるところである。つまりERではたとえアルゴリズムが収束しても、その収束物体が解ではない可能性があるが、HIOではアルゴリズムが収束すれば、その収束物体は必ず解となっていることが保証されているのである。

HIOによる停滞の克服を具体例によって示す。SeldinとFienupは 3×2 物体(サンプル点は 6×4 でサポートが 3×2)において、HIO/ERを用いては克服できない停滞の例を示している⁵⁾。この例について調べよう。彼らは次式、

$$f = \begin{bmatrix} 0.476 & 3.244 & 1.379 \\ 1.659 & 2.939 & 1.102 \end{bmatrix} \quad (20)$$

で与えられる物体を、HIO/ERによって種々の初期物体から回復する場合、全体の74%が

$$g_{s1} = \begin{bmatrix} 0.353 & 2.143 & 3.172 \\ 0.684 & 2.470 & 1.976 \end{bmatrix} \quad (21)$$

または

$$g_{s2} = \begin{bmatrix} 0.266 & 1.876 & 2.971 \\ 0.746 & 2.711 & 2.222 \end{bmatrix} \quad (22)$$

に停滞すると述べている。

この停滞はHIOを単独で用いることによって克服することができる。ここでは g_{s1} を初期物体とした場合についての結果を示そう。物体領域の拘束条件にはSeldinらと同様にサポート条件と非負条件を用い、フィードバック定数 β は0.2とした。また、出力物体 g'_m に存在するエラーを評価するために E_{om} を

$$E_{om}^2 = \sum_{(x,y) \in \Gamma} \{g'_m(x,y)\}^2 / \sum_{(x,y)} \{g'_m(x,y)\}^2 \quad (23)$$

によって定義した。さらに、入力物体 g_m の $(x,y) \in \Gamma$ における変化を知る目的で W_{7m} を

$$W_{7m}^2 = \sum_{(x,y) \in \Gamma} \{g_m(x,y)\}^2 \quad (24)$$

によって定義した。Fig. 2 に E_{om} , W_{7m} の繰返し回数に対する変化を示す。Fig. 2 の初回から41回までのAと記した部分に注目しよう。 E_{om} が一定であることから、この部分ではHIOが出力停滞状態にあることがわかる。このときには(15)式が成り立つので、入力物体の $(x,y) \in \Gamma$ における値も一定で変化しない。ところが W_{7m} の変化から、入力物体の $(x,y) \in \Gamma$ における値は停滞からの脱出を目指して変化し続けていることがわかる。こうして42回目で停滞から脱出し E_{om} に突然の変化を生じている。このように、HIOはHIO/ERでは克服不可能な停滞を確実に克服していることがわかる。

つぎにBと記した部分に注目する。 E_{om} は一定でさらに W_{7m} も一定となっていることから、入力物体が一定となってアルゴリズムが不動状態となっていることがわかる。このとき出力物体は解に収束している。このことからアルゴリズムの収束の指標としては E_{om} のみでは不十分であり、 W_{7m} などによって入力物体の変化も監視する必要があることがわかる。

Fig. 2 から、HIOは解に収束するまでにAの部分以外でも何度か出力停滞状態となっていることがわかる。ここで(14)式は g_0 が(5)式を満たし g'_1 が(9)式を満たせば成り立つことに注意しよう。したがってHIOはこれらの出力停滞状態でもAの部分と同様の挙動を示して脱出できるのである。不動状態もまた出力停滞状態の特別な場合なので、これらの結果から、HIOは出力停滞状態を目指して進み、出力停滞状態における出力物体が解でなければ脱出し解であれば収束するという挙動を示

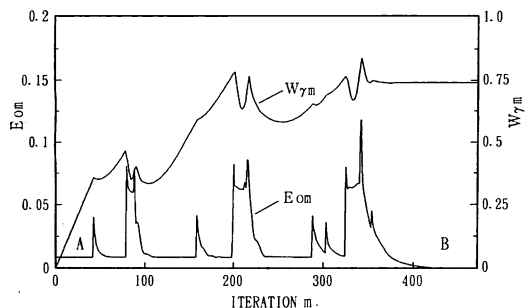


Fig. 2 E_{om} and W_{7m} vs the number of iterations. The object to be recovered and the initial start are f and $g_{.1}$ respectively. Support and non-negativity constraints are used. $\beta=0.2$.

しているということができる。ところでこのような出力停滞状態への収束と脱出というHIOの挙動は β を小さくするほど顕著となった。ただし、 β を小さくするほど出力停滞状態における1回の繰返しに対する入力物体の変化分 $-\beta g'_{.1}$ が小さくなるので、出力停滞状態から脱出するために必要な回数はほぼ β に反比例して大きくなるが、この場合でも繰返し回数をいとななければ最終的に解に収束するという事に変わりはない。一方、 β を大きくした場合 E_{om} や W_{7m} の繰返し回数に対する変化は不安定となって出力停滞状態を目指すという傾向を失ってしまい、解に収束することが不可能となる。例えば $g_{.1}$ に対しては、 β が0.3以下であればHIOは出力停滞状態への収束と脱出という挙動をはっきりと示すが、 β が0.5より大きいと挙動は不安定となり β が0.7以上では5万回の繰返しを行っても解に収束しなかった。以上のことから、ERやHIO/ERとは異なって、HIOは β を小さくして単独で用いるとき、常に解に収束する能力を有するアルゴリズムであるということができる。

4. ま と め

繰返し型位相回復アルゴリズムは、しばしば回復すべき物体以外の物体に収束して停滞するという問題を生じる。この停滞は、HIOを単独で用いることによって克服できることを示した。すなわち出力物体が停滞状態にある間も、繰返しとともに入力物体が変化し続けてある周波数のフーリエ位相が π 反転を生じることによって停滞から脱出できるのである。このことから停滞の克服に関する限りHIOにERを組み合わせて用いるべきではないことを示した。さらにわれわれは、HIOが不動状態となったときの収束物体は解であることが保証されることを明らかにした。HIOはフィードバック定数 β が小さいとき出力停滞状態への収束と脱出を繰返ししながら最終的に解へ収束するという挙動を示す。このようなHIOの挙動をより詳細に明らかにすることが今後の検討課題である。

文 献

- 1) J.R. Fienup: "Phase retrieval algorithms: a comparison," *Appl. Opt.*, **21** (1982) 2758-2769.
- 2) J.R. Fienup and C.C. Wackerman: "Phase-retrieval stagnation problems and solutions," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3** (1986) 1897-1907.
- 3) 高城洋明, 待鳥誠範, 高橋 徹, 永野直広: "繰返し型位相回復アルゴリズムの停滞に関する一考察", *光学*, **20** (1991) 607-611.
- 4) 高橋 徹, 高城洋明, 待鳥誠範, 永野直広: "繰返し型位相回復アルゴリズムにおける停滞問題の数値シミュレーションによる考察", *光学*, **21** (1992) 119-127.
- 5) J.H. Seldin and J.R. Fienup: "Numerical investigation of the uniqueness of phase retrieval," *J. Opt. Soc. Am. A*, **7** (1990) 412-427.