

## 講義

## フレッシュマンのための現代光学—II

## 焦点近傍の光学 (1)

大木 裕史

(株)ニコン光学本部光学技術開発部 〒140 東京都品川区西大井 1-6-3

(1992年3月5日受理)

## Modern Optics for Freshmen—II

## Optics in Focal Regions (1)

Hiroshi Ooki

Optical Division, Nikon Corporation, 1-6-3, Nishi-Ohi, Shinagawa-ku, Tokyo 140

## 1. はじめに

筆者が初めてレーザーなる言葉に出合ったのは30年近い昔、かの有名な漫画「エイトマン」の中であった。この漫画で人間を一瞬のうちに蒸発させてしまう恐ろべき殺人光線として登場し、当時の少年たちを震えあがらせたレーザーは、30年近くを経た今、多くの光学技術に不可欠なものとして急速に世の中に普及した。実際、たいてい家庭にはレーザーがあり (CD プレーヤー, CD ラジカセ), スーパーマーケットのレジでは殺人光線が飛び交っている (バーコードリーダー)。なぜこんなことを書くかという、 「焦点近傍の光の挙動」が重要な意味を持つようになったのはまさにレーザーが登場したためだと思えるからである。言うまでもなく、光ディスク、レーザー走査顕微鏡、レーザートラッピングなどの技術は「焦点」に注目することなしには考えられない。もちろん点像強度分布それ自身はレーザー光学系に限らず一般の結像論においても重要であるが、物理的に生じた「点像」を扱い、応用することは特別な意味があると思う。

ところで、焦点という言葉が気軽に使ってしまったが、理化学辞典によれば、焦点とは「回転対称な結像系の光軸上にあつて、無限遠にたいする共役点をいう」とある。したがって、点光源が有限の距離にあれば、点像ができるのは当然ながら焦点の位置ではない。この意味での「焦点」について語ることは本稿の趣旨ではないから、ここでは「焦点」といえばレンズを通過した球面波

の中心位置、すなわち「点像が生じる場所」を指すものとする。

さて、今回の「焦点近傍の光学」第1回は、「スカラー回折理論による点像の解析」という形でまとめた。スカラー理論自体がよく知られているので、どうしてもある程度はわかりきったことを書かざるを得ないが、できるだけ目新しい内容を盛り込んだつもりである。とくにレーザー光学系の開発に従事する技術者を念頭において、応用の見地から役に立つことをこころがけた。したがって、あまり哲学的な深みはない。なお、焦点近傍の光学について、徹底して勉強したいという方には、Stamnes の立派な教科書<sup>1)</sup>があるのでぜひ一読をおすすめする。なお、次回 (来月) は、「ベクトル回折理論による点像の解析」を中心に、やや哲学的にも深みのある内容を述べる。

## 2. スカラー理論

焦点近傍の光の様子を知るために、まず回折理論が必要になる。一般に光の回折問題ではスカラー理論と呼ばれる手法が用いられており、特殊な例外を除いてほとんどの問題がこれで解決してしまう。この「スカラー理論」なる名称は、そもそもキルヒホフの積分定理において、場を記述する関数を一つの複素スカラー関数で代用したものを意味する。しかし、光学系、とくに正弦条件を満たす光学系の結像について考えるとき、この回折のスカラー的な扱いは結局フーリエ変換を基本とする美しいフーリエ光学 (またはフーリエ結像論) に帰着し、そ

れゆえ「スカラー理論」と「フーリエ光学」はほとんど同じ意味で使われている。

スカラー理論による回折の扱いは、多くの光学の教科書においてはまずフレネル・キルヒホフの回折積分から始まる。そしてその近似としてフレネル回折、さらにそのまた近似としてフラウンホーファー回折が登場する。つまり気の毒にもフラウンホーファー回折は近似のなれのはてとといった形で現れる。しかし、フーリエ光学がフーリエ変換、すなわちフラウンホーファー回折を基本としているからといって、粗い近似であると考えては正しくない。否、むしろ結像系ではフラウンホーファー回折を基本として扱うのが最も正当なのである。このことについてはベクトル回折の扱いとも関連するので次回詳しく議論することにして、今回はフーリエ光学を良い近似であると認めて先へ進むことにしよう。

### 3. 焦平面上での点像強度分布

フーリエ結像論に従って、円形開口レンズによる点像強度分布を考えよう。こんなことはわかりきっているという読者は、スキップして先に進んでいただきたい。

さて、図1に示すごとく、瞳上に  $(\xi, \eta)$ 、像面上に  $(x, y)$  なる直交座標をとる。なお、 $(\xi, \eta)$  は図中の実寸をレンズの焦点距離  $f$  で割った値とする。レンズの開口数を  $NA$  とすると、 $(\xi, \eta)$  は半径  $NA$  の円周の内部を動く変数となる。

レンズが無収差なら、像面上の焦点付近での振幅分布  $U(x, y)$  は定数を  $C$  として、

$$U(x, y) = C \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq NA^2} \exp[-ik(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta \quad (1)$$

で与えられる。ここで  $k = 2\pi/\lambda$  は波数である。  $C$  は規格化条件から決まるが、今の場合中心強度が1となるように選ぶのがふつうである。あまり厳密なことをいわなけ

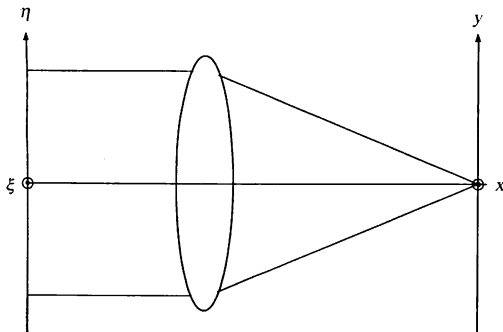
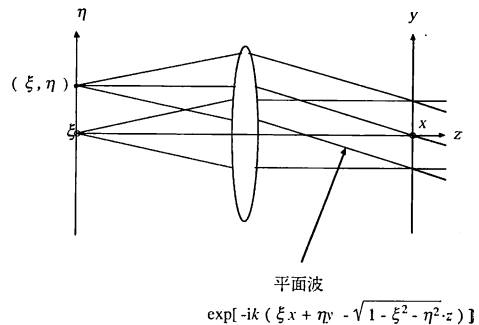


図1 瞳座標および像面座標

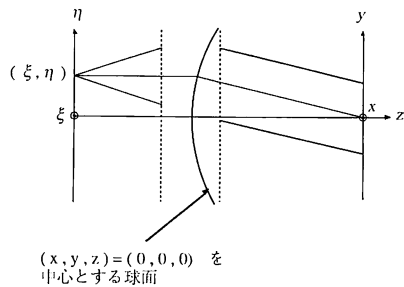
れば、(1)式を感覚的に理解するにはむしろ図1より図2(a)のように考えたほうがわかりやすい。実際(1)式の被積分関数は  $z=0$  における平面波を表している。ただし、ここで光学系が正弦条件を満たすということに注意しなくてはならない。すなわち、平面波の進行方向 ( $k$  ベクトルの方向) と光軸のなす角  $\theta$  はつねに  $\sin \theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  を満たす。したがって図2(a)は、より正しくは図2(b)のように表すべきである (もちろんこのことを常に踏まえておけば、図2(a)で代用してもかまわない。図2(b)は美しいから)。

もうひとつ注意すべきことがある。それは(1)式が、図中の瞳面でのみ回折が生じると仮定していることである。逆に言えば、その他の場所では回折は生じないと考えているわけで、これは物体の結像を考える上では支障はないが、瞳から瞳への結像では問題がある。たとえば像面にピンホール (またはそれに近いもの) があり、これをはさんで次の光学系がつながっているような場合、瞳⇄瞳結像の開口数が異常に小さくなる。この結果、この光学系全体としての波面収差はピンホールの前と後の波面収差の和としては表せなくなる。

さて、レンズは多くの場合円形だから、(1)式も極座標で表した方が便利である。いま、瞳上の極座標  $(\rho, \theta)$  と像面上の極座標  $(w, \phi)$  を



(a) 便宜的な図



(b) 正しい図

図2 平面波の重ね合わせモデル

$$\rho \cos \theta = \xi / NA, \quad \rho \sin \theta = \eta / NA \quad (2)$$

$$w \cos \varphi = x, \quad w \sin \varphi = y \quad (3)$$

となるように選ぶ。wは実寸に対応するが、ρのとりうる範囲は  $0 \leq \rho \leq 1$  である。このとき(1)式は

$$U(w, \varphi) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[-ikNA \cdot \rho w \cos(\theta - \varphi)] \rho d\rho d\varphi \quad (4)$$

となる。(4)式にベッセル関数  $J_0(z)$  の積分表示

$$J_0(z) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \exp[iz \cdot \cos \alpha] d\alpha \quad (5)$$

を用いれば、回転対称な振幅分布  $U(w)$  は

$$U(w) = 2\pi C \int_0^1 J_0(k \cdot NA \cdot \rho w) \rho d\rho \quad (6)$$

である。ここで、(6)式の積分範囲を  $0 \leq \rho \leq 1$  でなく、適当な値  $\delta > 0$  を用いて  $1 - \delta \leq \rho \leq 1$  とすれば、幅  $\delta$  (実寸では幅  $f\delta$ ) の輪帯開口における点像振幅分布が得られる。 $\delta$ が極限まで小さいとき、(6)式の積分記号は消失し、 $U(w)$  は

$$U(w) = 2\pi C J_0(k \cdot NA \cdot w) \quad (7)$$

となって0次のベッセル関数となる。これはベッセルビーム、あるいは無回折ビーム<sup>2)</sup>などという劇的な名称で呼ばれ、最近注目を集めている。無回折という言葉は誤解をうけやすいが、焦点深度はきわめて深く、なんらかの応用が考えられよう。焦点深度についてはあとでまた触れるとして、一般に関数  $zJ_0(az)$  の不定積分は  $(z/a) \cdot J_1(az)$  であるから(6)式より円形開口の点像振幅分布は

$$U(w) = 2\pi NA^2 C \cdot \frac{J_1(kNAw)}{kNAw} \quad (8)$$

となる。点像強度分布  $I(w)$  は当然

$$I(w) = |U(w)|^2 \quad (9)$$

である。(8)式を(9)式に代入すればエアリーディスクの式が得られるが、もちろんこれが正しいのは入射光が振幅一定の平面波であり、かつ開口が円形で収差のない場合に限られる。実際の光学系の設計にあたっては、ガウスビーム入射や収差のある場合まで考慮することが多いので、(8)式をそのまま使うことはあまりない。回転対称でない収差を考えるときは(6)式も使えないから、結局直交座標系で2次元の数値積分を行うのが一般的である。

さて、(9)式はあくまでも焦平面内、言いかえれば図1において  $z=0$  で与えられる平面内の挙動である。次に焦平面外の分布も考えることにしよう。

#### 4. 焦点近傍の点像強度分布

焦平面外での光の分布はすべてデフォーカスした状態

にあるわけだから、任意のデフォーカス量  $z$  に対する点像振幅分布関数  $U(x, y, z)$  が求まればよい。図3を見よう。見たとおり、これは図2の像面を  $z=0$  から  $z=L$  へ移しただけである。

図3中の像空間における平面波は  $\exp[-ik(\xi x + \eta y - \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \cdot z)]$  であり、 $z=L$  におけるこの平面波の重ね合わせは即、デフォーカスした像面での点像振幅分布  $U_d(x, y)$  を与える。直交座標でこれを書くと、

$$U_d(x, y) = \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq NA^2} \exp[-ik(\xi x + \eta y - \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \cdot L)] d\xi d\eta \quad (10)$$

となる。(2)、(3)式で定義した極座標を用いれば、

$$U_d(w) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[-ik(NA\rho w \cos(\theta - \varphi) - \sqrt{1 - NA^2\rho^2} \cdot L)] \rho d\rho d\theta \quad (11)$$

である。(4)式と(11)式を比べると、

$$\exp[ik\sqrt{1 - NA^2\rho^2} \cdot L]$$

なる位相項が余分であり、これがデフォーカスによる波面収差だとわかる。ただし、この項は光が光軸に沿って  $L$  だけ伝播したことによる位相変化  $\exp[ikL]$  を含んでおり、これは収差とは無関係だから、

$$\exp[ikW_d(\rho)] = \exp[ik\sqrt{1 - NA^2\rho^2} \cdot L - ikL] \quad (12)$$

で与えられる  $W_d(\rho)$  がデフォーカスの収差関数である。改めて書くと

$$W_d(\rho) = -L(1 - \sqrt{1 - NA^2\rho^2}) \quad (13)$$

一般にデフォーカス収差は瞳座標の二次に比例すると言われているが、(13)式に示すようにこれは厳密には正しくない。ただしレンズの開口数が小さければ  $1 \gg NA \cdot \rho$  と仮定して(13)式より

$$W_d(\rho) = -(1/2)LNA^2\rho^2 \quad (14)$$

となる。通常のデフォーカス状態の解析にはたいてい(14)式が使われており、レンズ開口数が大きい場合は注

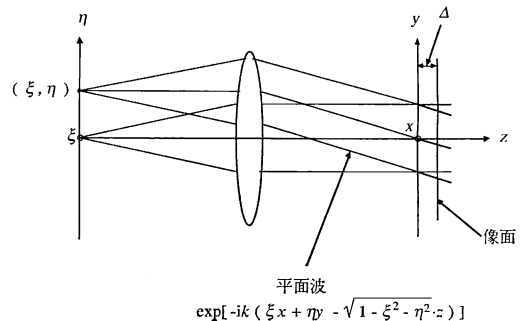


図3 デフォーカスした像面の様子

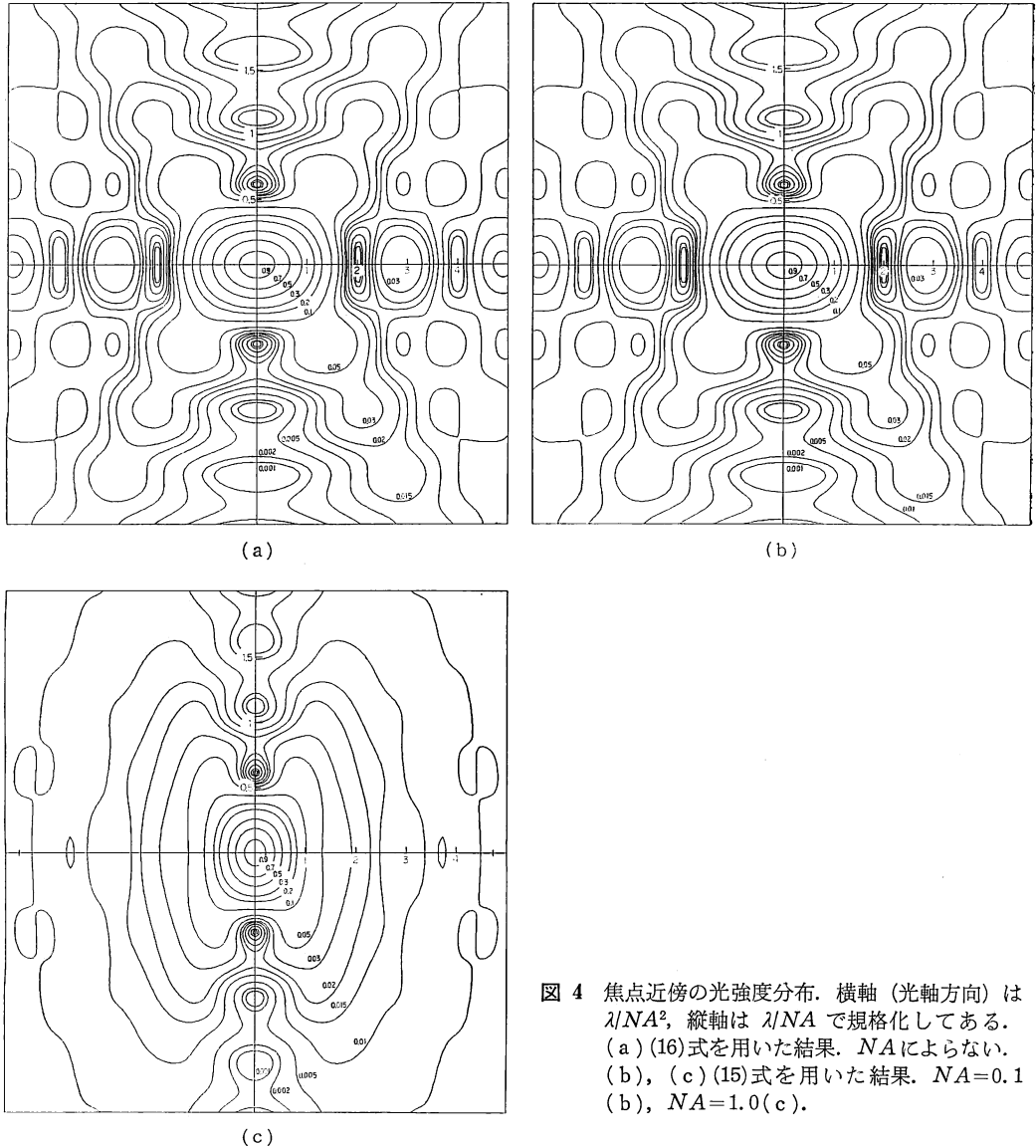


図4 焦点近傍の光強度分布. 横軸(光軸方向)は  $\lambda/NA^2$ , 縦軸は  $\lambda/NA$  で規格化してある. (a) (16)式を用いた結果.  $NA$ によらない. (b), (c) (15)式を用いた結果.  $NA=0.1$  (b),  $NA=1.0$  (c).

意しないといけない.

光軸を含んだ断面における焦点近傍の振幅分布  $U(x, y, z)$  は, (10)式で  $\Delta=z$  とおいて

$$U(x, y, z) = \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq NA^2} \exp[-ik(\xi x + \eta y - \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \cdot z)] d\xi d\eta \quad (15)$$

から得られる. ちなみに(13)式の代りに(14)式の近似を用いると,  $U(x, y, z)$  は

$$U(x, y, z) = \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq NA^2} \exp[-ik(\xi x + \eta y + (z/2)(\xi^2 + \eta^2))] d\xi d\eta \quad (16)$$

となり, 多くの教科書で用いられているのはこちらの方

である. 図4に  $I(x, y, z)$ , すなわち  $U(x, y, z)$  の絶対値を二乗したものの  $z$  軸を含んだ断面図を示す. ただし  $z$  軸の目盛りは  $\lambda/NA^2$ ,  $w(\omega = \sqrt{x^2 + y^2})$  軸の目盛りは  $\lambda/NA$  で規格化してある.

図4(a)は(16)式を用いた計算結果であり, 等高線の形は開口数  $NA$  によらない. これに対し(15)式を用いた計算結果(b), (c)は開口数に依存して変化する. (b)は  $NA=0.1$  の場合で, ほとんど(a)に等しいが,  $NA=1.0$  に対する結果(c)は, (a)とは大きく異なっている.

ここで, 輪帯開口の場合もあわせて示そう. 図5は開口部分が  $0.7 \leq \rho \leq 1.0$  となるような輪帯開口の  $I(x, y,$

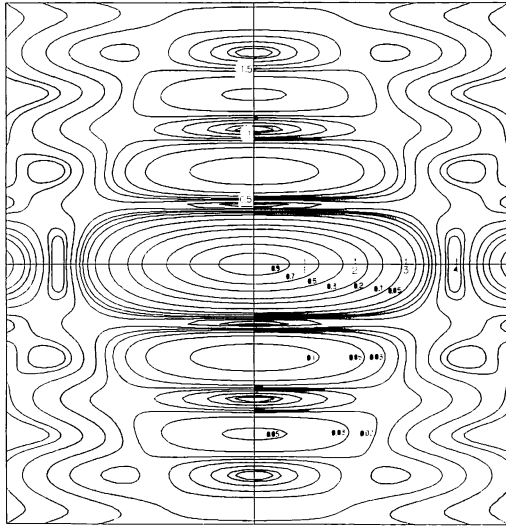


図 5 輪帯開口における焦点近傍の光強度分布。スケールは図 4 と同じ。

$z$  の断面図である。スポット径は広がっているが、焦点深度は大幅に深くなっていることがわかる。開口が  $\rho=D$  に位置する無限に細い輪帯である場合は(7)式にデフォーカス項を付け加えればよく、

$$U(w) = 2\pi CDJ_0(k \cdot NA \cdot Dw) \cdot \exp[ikz\sqrt{1-NA^2}D^2] \quad (17)$$

となるが、強度になおすとデフォーカスの位相項は落ちてしまい、結局  $z$  に依存しなくなる。これが「無回折」の起源である。このように輪帯開口での焦点深度は際立った性質をもつが、これをあまり鵜呑みにするのは危険である。この性質は、輪帯を透過した光すべてが重なりあって干渉している領域でのみ言えることである。

なお、 $U(w, z)$  を記述するのは便利な方法として Lommel 関数がある<sup>3)</sup>。しかしこの関数を用いた表現は(14)式の仮定を置いているので高開口数の場合に対応しない。また、計算機が速度が大幅に向上した今日では、数値積分に比べてそれほどのメリットがないことからここでは省略する。ただしこの解析から得られる結果として、焦点近傍における光の軸上強度の変動が sinc 関数

で表されること、すなわち

$$I(0, z) \propto \sin^2(kNA^2z/4)/(kNA^2z/4)^2 \quad (18)$$

であることは覚えておくくと便利である(もちろん(14)式の仮定ははいている)。

### 5. 焦点深度

前節(15)式の近似は焦点深度にも関係してくる。焦点深度の定義は、点像の軸上強度が合焦点の 80% に低下する距離とするのが一般的であるが、開口最外周におけるデフォーカス波面収差  $W_d(\rho=1)$  の絶対値が  $\lambda/4$  に等しくなる距離ということもできる(実際、両者の定義はほとんど同じである)。後者の条件から得られる焦点深度  $d$  は、

$$|W_d(\rho=1)| = \lambda/4 \quad (19)$$

を満たす  $d$  であるから、(14)式を用いれば、

$$d = \lambda/(2NA^2) \quad (20)$$

となり、これが一般的な波動光学的焦点深度である。しかしすでに述べたとおりこれは高開口数の場合には近似が悪く、正確には(13)式から導くべきである。それによれば

$$d = \frac{\lambda}{4(1-\sqrt{1-NA^2})} \quad (21)$$

となって、(21)式が高開口数までカバーできる焦点深度の式を与える。NA をいろいろ変えた場合の、焦点深度  $d$  と軸上強度の関係を表 1 にまとめた。これより、 $NA > 0.8$  では、焦点深度として(20)式を用いるのはきわめて危険であることがわかる。

もうひとつ、焦点深度について書いておこう。それは異なる開口数のレンズの焦点深度を、いかにして比較するかという問題についてである。焦点深度はおおよそ(20)式(正しくは(21)式だが、簡単のためここでは(20)式を認めて進もう)で与えられるから、開口数が高くなるほど焦点深度は浅くなる、というのが一般の常識である。しかし、これは常に正しいだろうか。開口数の高いレンズは、もともとの解像力が高いのだから、この点も考えて比較を行わなければ不公平ではないだろうか。

表 1 焦点深度と軸上強度の関係

NA	(20)式の焦点深度と軸上強度		(21)式の焦点深度と軸上強度	
0.2	12.50 $\lambda$	0.796	12.37 $\lambda$	0.800
0.4	3.13 $\lambda$	0.782	2.99 $\lambda$	0.800
0.6	1.39 $\lambda$	0.756	1.25 $\lambda$	0.799
0.8	0.78 $\lambda$	0.703	0.63 $\lambda$	0.797
0.99	0.51 $\lambda$	0.534	0.29 $\lambda$	0.818

(20)式は明らかに開口数の差による「先天的な解像力の差」を考慮していない。

そこで、異なる開口数のレンズの性能差を考慮できる評価量として、information volume<sup>4)</sup>を採用しよう。ここで用いる information volume  $V$  とは、直流で規格化した二次元 OTF (=OTF( $\mu, \nu$ )) の積分値であり、下式で与えられるものとしよう。

$$V = \iint \frac{\text{OTF}(\mu, \nu)}{\text{OTF}(0, 0)} d\mu d\nu \quad (22)$$

OTF の積分というだけで、いかにもレンズの性能をかたよりなく表していそうな気がするが、 $V$  はさらに別な表現もできる。点像強度分布  $I(x, y)$  と二次元 OTF との関係

$$I(x, y) = \iint \text{OTF}(\mu, \nu) \exp[i(\mu x + \nu y)] d\mu d\nu \quad (23)$$

より

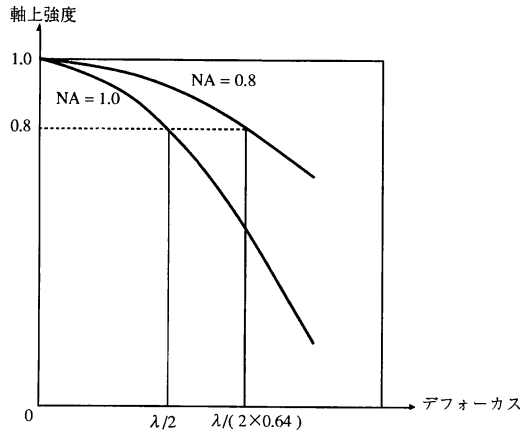
$$V = \frac{I(0, 0)}{\iint I(x, y) dx dy} \quad (24)$$

と書ける。(24)式をよく眺むと、点像強度分布のピークが切り立っていればいるほど、つまり点像がシャープであればあるほど  $V$  が大きくなるのがわかる。このことから  $V$  がレンズの絶対性能を表すことについて直観的な納得がゆく。さて(22)式に戻ろう。無収差レンズ(もちろんデフォーカスもない)の OTF 曲線は周波数座標を  $NA$  で規格化すれば  $NA$  にかかわらず同じ形であり、また、カットオフ周波数  $\mu_c$  と  $\nu_c$  はいずれも  $NA$  に比例する。したがって(22)式より無収差状態での  $V$  が  $NA^2$  に比例することが容易にわかる。図6(a)は  $NA$  の差を無視した焦点深度比較の様子である。縦軸はそれぞれの開口数での無収差状態で規格化した軸上強度である。

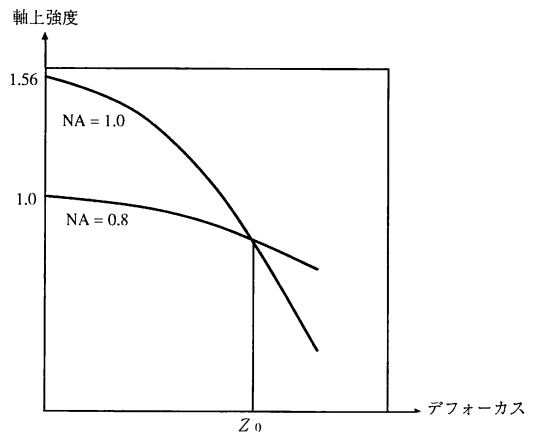
これに対し図6(b)は縦軸が information volume  $V$  に比例しているから、デフォーカス0のとき、すでに  $NA^2$  の分だけ差がついている。ただカーブの形は(24)式の分子に依存する((24)式の分母は一定)ので、図6(a)と変りはなく、縦軸方向のスケールだけが異なる。この場合、ふたつの曲線が一致する点  $z_0$  までは、高開口数のレンズの方が  $V$  が大きい。一般にデフォーカスがあまり大きくなければ、焦点近傍での軸上強度の変動を表す(19)式を  $z$  についての二次式で近似して、

$$I(0, z) = 1 - \frac{\pi^2 NA^4}{12\lambda^2} z^2 \quad (25)$$

と表せるから、このとき  $z_0$  は



(a) 無収差状態で規格化したグラフ



(b) Information volume で規格化したグラフ

図6 軸上強度とデフォーカス

$$z_0 = \frac{2\sqrt{3}\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{NA_1^2 - NA_2^2}{NA_1^6 - NA_2^6}} \quad (26)$$

である。ただし  $NA_1 > NA_2$  とする。もし、

$$z_0 > \lambda / (2NA_2^2) \quad (27)$$

ならば、開口数の大きいレンズ ( $NA_1$ ) の方が焦点深度が深いといえる。もちろんこれは information volume で性能を表した場合にのみ成り立つもので、一般的ではないかもしれない。しかし、システムにおけるレンズの開口数の決定などの際には、このようなことまで考えるべきなのである。

### 6. 微小光学系の焦点

前節までに述べたように、開口数が大きい場合の焦点近傍の解析においては、デフォーカス項に注意を払わねばならない。しかし、焦点近傍の解析ではもうひとつ注意しなければならないことがある。それは、わかりやす

く言えばレンズ径の問題である。いま、レンズの開口径 (実寸の瞳径) を  $a$  としよう。もちろん

$$a = f \cdot NA \quad (28)$$

である。無収差の場合、点像の大きさ (スポット径)  $p$  はおよそ

$$p \cong \lambda / NA = \lambda / (a/f) \quad (29)$$

だから、いま瞳径  $a$  がスポット径  $p$  の  $N$  倍の大きさがあるとすると

$$a = N \cdot \lambda / (a/f) \quad (30)$$

と書ける。通常の光学系ではレンズはスポット径よりはるかに大きいので  $N$  は事実上無限大と考えてよいが、そうでない場合はどうだろうか。たとえばレンズ径がスポット径とたいしてかわらないような場合 ( $N \cong 1$ ) を考えよう。このような場合でもレンズはあくまでレンズだから、入射波面を光軸上の一点に収束させようとするだろう。しかし、径が小さいのでレンズを通過した光の回折による広がりもまたきわめて大きくなってしまふ。その結果、レンズ作用による収れんと回折による発散の勝負がどうなるか。少なくとも 4 節で解析した結果とは異なりそうである。

このことは解析的に実証される。ただし、「レンズ径が小さい場合」というのは正確な表現ではなく、「(30) 式中の  $N$  が小さい場合」とするのが正しい。(30) 式より  $N$  は

$$N = a^2 / (\lambda f) \quad (31)$$

と書け、これをフレネル数という。レーザー共振器などではおなじみの数だが、結像系ではたいてい無限大と仮定しても差し支えないのでほとんど登場する機会がない。しかし今後光学系の微小化、集積化技術が進めば、フレネル数は重要な意味をもつことになるだろう。

さて、フレネル数を反映した焦点近傍の解析は、まず図 7 に示すような回折積分の基本モデルから再出発する<sup>9)</sup>。再出発しなければならない理由は、あとでわかる

ように回折積分の被積分関数が平面波の重ね合わせでは記述できなくなるからである<sup>6)</sup>。幾何光学的な焦点位置を原点とする直交座標系をとり、波面上の一点  $Q$  の座標を  $(p, q, -r)$ 、像空間内の一点  $P$  の座標を  $(x, y, z)$  とする。

点  $P$  での振幅分布  $U(P)$  は、開口を通過した波面の領域を  $A$ 、 $A$  上の面積素片を  $dS$  として

$$U(P) = C \iint_A \frac{\exp[ik(s-f)]}{s} dS \quad (32)$$

で与えられる。図 7 より

$$s = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z+r)^2} \quad (33)$$

であり、ここで波面が原点を中心とする半径  $f$  の球面であるから、

$$p^2 + q^2 + r^2 = f^2 \quad (34)$$

が成り立つことを考慮して、「 $f$  が  $x, y, z$  に対して十分大きい」と仮定すれば

$$s - f = -\frac{px + qy - rz}{f} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2f} \quad (35)$$

となる。右辺第 2 項は積分に関係ない位相項なので強度分布を考える限り無視できる。明らかに (35) 式の右辺第 1 項は (10) 式右辺の被積分関数の指数項と同じである。

では、フレネル数が小さいと、事情はどのように変わるのだろうか。

ふつう焦点近傍の解析範囲は、光軸方向については焦点深度を基準として決定するから、 $M$  を適当な定数 (1 ~ 10 くらい) としておよそ

$$|z| \leq M \cdot \lambda / (2NA^2) = M \cdot \lambda / 2(a/f)^2 \quad (36)$$

である。(36) 式に (31) 式を代入すると

$$|z| \leq Mf / 2N \quad (37)$$

となるから、結局フレネル数が小さいときは、 $z$  が  $f$  に比べて無視できなくなることがわかる。そこで (35) 式の近似をやり直し、 $(f+z)$  が  $x, y$  に比べて十分大きいとすれば (35) 式の代わりに

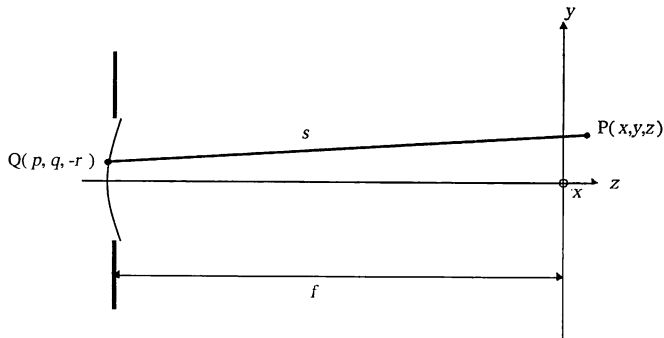


図 7 回折積分のモデル

$$s - f = -\frac{px + qy - (r - f)z}{f + z} + \frac{x^2 + y^2}{2(f + z)} \quad (38)$$

が得られる。ここで、フレネル数の小さいレンズが一般に開口数も小さいと仮定した(そうでなければ開口径が波長程度の大きさになってしまい、さすがに非現実的であるし、スカラー理論の正当性も怪しくなってくる)。この仮定によって  $r \cong f$  となり、 $(r - f)z$  が微小項の扱いとなる。また、 $r$  についてもつぎの近似((14)式の近似と同じである)が成立する。

$$r - f = -\frac{(p^2 + q^2)}{2f} \quad (39)$$

さて、極座標  $(\rho, \theta)$ ,  $(w, \varphi)$  を改めて

$$a\rho \cos \theta = p, \quad a\rho \sin \theta = q \quad (40)$$

$$w \cos \varphi = x, \quad w \sin \varphi = y \quad (41)$$

で定義し、(38)式右辺第1項を  $F$  とすれば(39)式より

$$F = -\frac{a\rho w \cos(\theta - \varphi)}{f + z} - \frac{a^2 \rho^2 z}{2f(f + z)} \quad (42)$$

となる。(32)式右辺の被積分関数の分母  $s$  を  $f + z$  で置き換え、指数項に(42)式を代入すればフレネル数が小さ

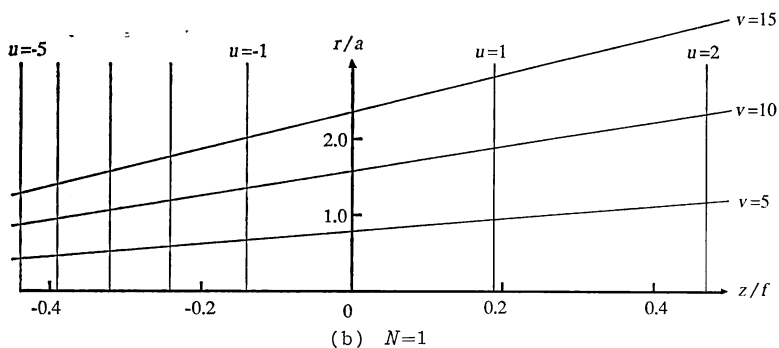
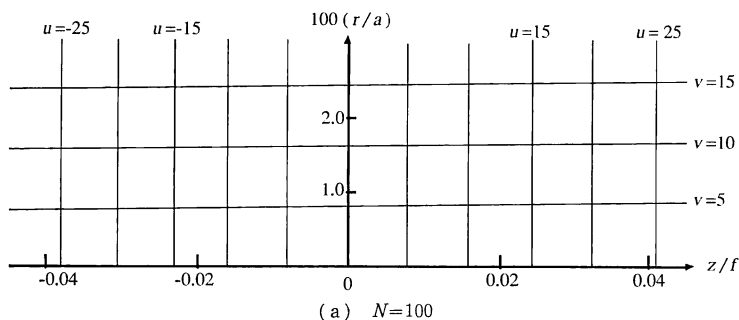


図8 フレネル数による焦点近傍の光強度分布の変形

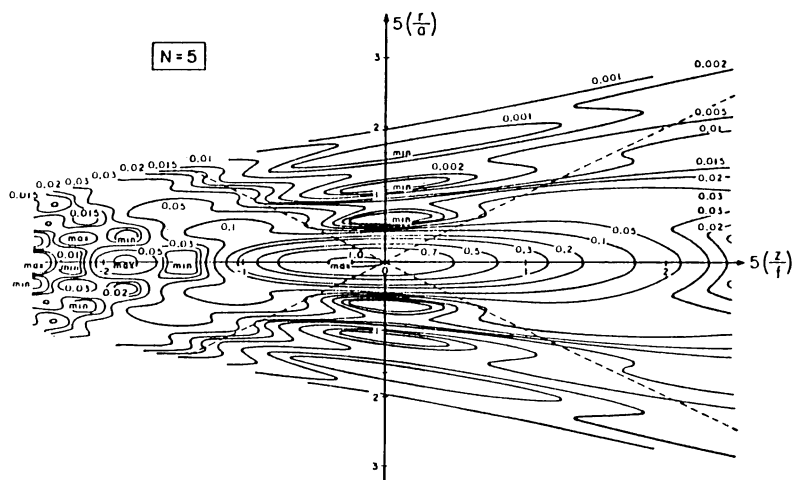


図9 フレネル数が小さい場合 ( $N=5$ ) の焦点近傍の光強度分布



いときも成り立つ焦点近傍解析の式が得られる。さて、ここで次の一見意味不明な変数  $u_N, v_N$  を定義する。その理由はすぐわかる。

$$u_N = 2\pi N \frac{z/f}{1+z/f}, \quad v_N = 2\pi N \frac{w/a}{1+z/f} \quad (43)$$

(42)式に(43)式を代入すると、

$$kF = -\rho v_N \cos(\theta - \varphi) - (u_N/2)\rho^2 \quad (44)$$

となる。(44)式は、(11)式の右辺被積分関数の指数項に(14)式の近似を用いた場合とまったく同じ形をしている。ということは、図4で、 $z, w$  軸の代りに  $u_N, v_N$  軸を用いて表示すれば焦点近傍の光強度分布の形が変らないのである。したがって、 $(u_N, v_N)$  座標で等間隔の升目を形成する水平および垂直の直線群を  $(z, w)$  座標系で書けば、光強度分布がいかに変形されるかがわかる。

図8(a)は  $N=100$  の場合で、ほとんど変形はない。しかし  $N=1$  の場合図8(b)は激しく変形している。この図より、フレネル数が小さいときは光エネルギーは焦点よりもレンズ寄りの位置で集中することがわかる。図9に  $N=5$  の場合の光強度分布を示す<sup>7)</sup>。

ここで述べた光強度分布の変形の原因は、すでに明らかかなように回折積分の基本式((32)式)における被積分

関数の分母がもはや定数ではなく変数  $z$  を含むこと、それゆえ単なる平面波の重ね合わせとして記述できないことにある。

とにかく、やたらと小さいレンズ、もしくは焦点距離の長いレンズなどには気をつけた方がよい。

### 文 献

- 1) J. J. Stamnes: *Waves in Focal Regions* (Adam Hilger, Bristol, 1986).
- 2) J. Durnin: "Exact solutions for nondiffracting beams. I The scalar theory," *J. Opt. Soc. Am. A*, **4** (1987) 651-654.
- 3) M. Born and E. Wolf: *Principles of Optics*, 5th ed. (Pergamon Press, Oxford, 1975) Chap. 8.
- 4) 佐柳和男: "写真レンズの Information Volume II, Information Volume とその実験", *応用物理*, **25** (1956) 193-198.
- 5) Y. Li: "Encircled energy for systems of different Fresnel numbers," *Optik*, **64** (1983) 207-218.
- 6) 鶴田匡夫: "第3光の鉛筆・ガウスビームの伝播", *Oplus E*, 1991年4月号, 116-126.
- 7) Y. Li and E. Wolf: "Three-dimensional intensity distribution near the focus in systems of different Fresnel numbers," *J. Opt. Soc. Am. A*, **1** (1984) 801-808.