



## フレッシュマンのための現代光学—III

## レーザー共振器とレーザービームの伝搬 (1)

有本 昭

(株)日立製作所中央研究所 〒185 国分寺市東恋ヶ窪 1-280

(1992年5月15日受理)

## Modern Optics for Freshmen—III

## Laser Resonator and Laser Beam Propagation (1)

Akira ARIMOTO

Central Research Laboratory, Hitachi Ltd.,  
1-280, Higashikoigakubo, Kokubunji 185

## 1. はじめに

レーザーの発明が行われてから、既に30年余が経過し、情報処理装置、計測装置、ディスプレイなど多くの装置に光源として使われていることは周知のとおりである。

1960年のMaimanによる「ルビーレーザー」<sup>1)</sup>、1961年のJavanによるHe-Neレーザーの発明<sup>2)</sup>を機として数多くのレーザーが発明されてきた。それらのレーザーの多くは共振器の端に反射ミラーを有しそれと直交する方向は開放端の、ファブリーペロ型の共振器である。一方1970年に室温出力が可能となった半導体レーザー<sup>3)</sup>は、周りが壁で囲まれた導波路型の共振器である。

今回(気体レーザーおよび固体レーザー用ファブリーペロ型)と次回(半導体レーザー)の2回に分けて、レーザー共振器とそこから出てくるレーザー光の伝搬の様子を解説する。

## 2. ファブリーペロ型共振器と発振モード

光軸と直交する方法が開放端の共振器の解析はFoxとLi<sup>4)</sup>、BoydとKogelnik<sup>5)</sup>およびGordon<sup>6)</sup>によって詳しく行われた。

## 2.1 縦モード

レーザーの共振器の長さはmmからmオーダーまで千差万別であるが、一般に波長に比べて著しく長く、マイクロ波とは異なり縦モードが基本モードとはならず、

数千から数百万の高次のモードとなっている。共振器の長さを $d$ 、共振器内の屈折率 $n_0$ 、発振波長を $\lambda(=c/\nu)$ 、 $c$ は真空中の光速、 $\nu_q$ は周波数)とすると

$$2n_0d = q\lambda = qc/\nu_q \quad (1)$$

となる。 $q$ は整数でモードの次数と呼ばれ、レーザー媒質の発振利得との関係で決まる。He-Neレーザー、Ar<sup>+</sup>レーザーの場合には2、3本がつねに発振している。

隣り合うモード間の波長間隔 $\Delta\lambda$ は

$$\Delta\lambda = |\lambda_{q+1} - \lambda_q| = \lambda^2/2n_0d \quad (2)$$

で与えられる。例えば波長633nmで発振するHe-Neレーザーの場合は $\Delta\lambda = 4 \times 10^{-4}$ nmであり、780nmで発振する半導体レーザーで $n_0d = 1$ mmの場合には0.3nm程度である。波長間隔の狭いHe-Neレーザーの場合にはスペクトル幅の中に数本の発振モードが入りマルチモード発振する。一方、半導体レーザーには2種類の発振の様子の異なるレーザーが存在し、利得導波形マルチモード半導体レーザーでは3~10本のモードが同時に発振するが、DFB、DBRなどの特別な構造をしている半導体レーザーや屈折率導波形半導体レーザーでは1本の縦モードで発振する。

## 2.2 横モード

上記にあげた研究者たちによる解析は主として横モードに関するものである。レーザー光の集光、伝搬特性には縦、横モード両方が影響を与えるが、発振スペクトラムが半導体レーザーに比べて狭い、気体レーザーの場合には、色収差の問題をあまり考慮する必要がなく横モー

ドだけを考えれば良い応用が多かったためと思われる。  
空間的な集光特性に効くのは主に横モード特性と考えて良い。

図1のようなファブリーペロ型共振器で反射鏡の光の振幅分布が反射鏡2の振幅分布に影響を与え、また反射鏡2の振幅分布が反射鏡1の振幅分布に影響を与えていることを考えると、フレネルキルヒホッフの回折積分を用いて、

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)}u^{(1)}(r_1, \phi_1) &= \int_0^a \int_0^{2\pi} K^{(2)}(r_1, \phi_1; r_2, \phi_2) u^{(2)}(r_2, \phi_2) r_2 dr_2 d\phi_2 \\ &\quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}u^{(2)}(r_2, \phi_2) &= \int_0^a \int_0^{2\pi} K^{(1)}(r_2, \phi_2; r_1, \phi_1) u^{(1)}(r_1, \phi_1) r_1 dr_1 d\phi_1 \\ &\quad (4) \end{aligned}$$

で表される<sup>4)</sup>。  $\gamma^{(1)}$ ,  $\gamma^{(2)}$  は固有値であり,  $K^{(1)}$ ,  $K^{(2)}$  は

$$\begin{aligned} K^{(2)}(r_1, \phi_1; r_2, \phi_2) &= K^{(1)}(r_2, \phi_2; r_1, \phi_1) \\ &= (i/\lambda d) \exp[-i k/2d \{g_1 r_1^2 + g_2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\}] \end{aligned} \quad (5)$$

で表される積核,  $g_1 = 1 - d/b_1$ ,  $g_2 = 1 - d/b_2$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  である。そして  $a_1$ ,  $a_2$  は反射鏡1, 2の半径, また  $b_1$ ,  $b_2$  は各々の曲率半径である。

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r_1, \phi_1) &= Sm^{(1)}(r_1) \exp(-im\phi_1), \\ u^{(2)}(r_2, \phi_2) &= Sm^{(2)}(r_2) \exp(-im\phi_2) \end{aligned} \quad (6)$$

と置き, 方位角方向の積分をベッセル関数を用いて表すことにより,  $Sm^{(1)}$  と  $Sm^{(2)}$  は次の積分方程式を満足する。

$$\begin{aligned} \gamma_m Sm^{(1)}(r_1) \sqrt{r_1} &= \int_0^a Km(r_1, r_2) Sm^{(2)}(r_2) \sqrt{r_2} dr_2 \\ \gamma_m Sm^{(2)}(r_2) \sqrt{r_2} &= \int_0^a Km(r_2, r_1) Sm^{(1)}(r_1) \sqrt{r_1} dr_1 \end{aligned} \quad (7)$$

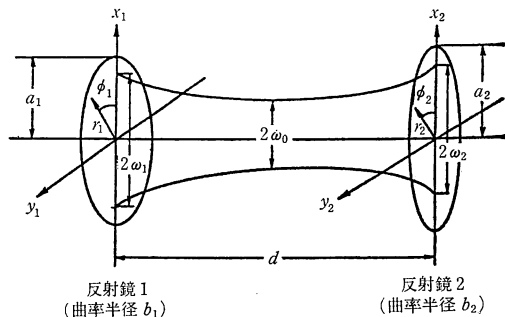


図1 レーザー共振器

$$= \int_0^a Km(r_2, r_1) Sm^{(1)}(r_1) \sqrt{r_1} dr_1 \quad (8)$$

ここで,  $Km$  は

$$\begin{aligned} Km(r_1, r_2) &= \{i k/d\} J_m(kr_1 r_2/d) \sqrt{r_1 r_2} \exp \\ &\quad \times \{-i k/2d(g_1 r_1^2 + g_2 r_2^2)\} \end{aligned} \quad (9)$$

で表される積核,  $J_m$  は第1種のベッセル関数である。

レーザーの共振状態での  $Sm^{(1)}(r_1)$ ,  $Sm^{(2)}(r_2)$  を得るには, 任意の振幅分布を一つの反射鏡上で仮定し, 逐次回折積分を数値計算で行い, 解が収束するまで繰り返す過程を経なければならぬ<sup>5)</sup>。

平面鏡 ( $b_1 = b_2 = \infty$ ) を用いた共振器の場合にこのようにして求められた Fox と Li の計算結果を図2に示す。一方, 解析的な解が得られるのは  $b_1 = b_2 = d$ ,  $a_1 = a_2$ ,  $g_1 = g_2 = 0$  のお互いの反射鏡の中心が相手側の鏡の曲率中心になっている対称共焦点共振器の場合のみである<sup>6,7)</sup>。この時の(7あるいは8)式の積分方程式は若干の変数変換を施すことによって、

$$\gamma_m Sm(r_1) \sqrt{r_1} = \int_0^1 J_m(Cr_1 r_2) Sm(r_2) \sqrt{r_2} dr_2 \quad (10)$$

のフレドホルム型積分方程式となる。ここで  $C = 2\pi a^2/\lambda d = 2\pi N$  ( $N$ : フレネル数) である。(10)式の解は一般化された偏長スフェロイド関数として, もう一つの整数パラメータ  $n$  を用いて  $\psi_{mn}(r)$  で与えられる。この  $m, n$

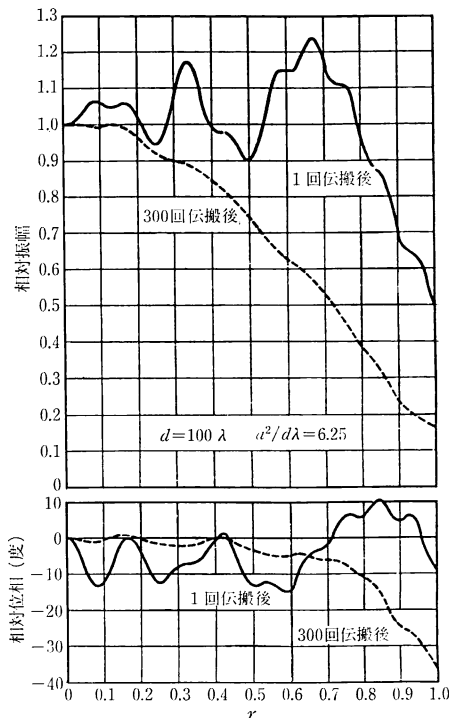


図2 レーザーモードの振幅と位相分布

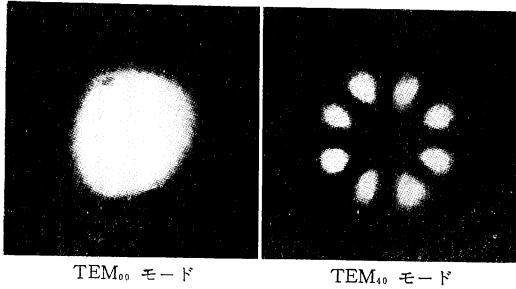


図 3 レーザーモード (円形ミラー共振器の場合) 千葉大学小倉磐夫教授のご好意による。

はモードの次数に対応する整数である<sup>8)</sup>。

(10)式の積分核  $Jm(Cr_1r_2)$  は連続で  $r_1$  と  $r_2$  にたいして対称な形をしているため、 $\psi_{mn}$  と  $\psi_{m'n'}$  の間には

$$\int_0^1 \psi_{mn}(r)\psi_{m'n'}(r)r dr = \delta_{nn'} \quad (11)$$

の直交関係が成立する ( $\delta$ ; クロネッカーのデルタ)。方位角方向は既にフーリエ展開されており、積分範囲  $0 \sim 2\pi$  の範囲で直交関係が成立しているため、反射鏡上の振幅分布  $u_{mn}(r, \phi)$  にも  $m, n$  のパラメータを用いて

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a u_{mn}(r, \phi)u_{m'n'}(r, \phi)r dr d\phi = \delta_{mm'}\delta_{nn'} \quad (12)$$

となり 2次元の範囲で直交関係が成立する。

(7)あるいは(8)式の二つの積分は 2次元のフーリエ変換の関係をしており、さらに二つの反射鏡上の振幅分布は対称な配置関係から等しくなるので反射鏡上の光振幅分布  $u$  は 2次元のフーリエ変換を施しても関数系が不変であるという結果を得る。

ここで特別の場合として、両端の反射鏡で蹴られのない場合を考える。この時は近似的に

$$u_{mn}(r, \phi) = \exp\{-(r_2/\omega_s)^2\} L_n^m 2(r/\omega_s)^2 \times \{\sqrt{2}r/\omega_s\}^m \exp(-im\phi) \quad (13)$$

の形のガウシアン関数と随伴ラゲール関数  $L_n^m$  の積ラゲールガウシアン関数になる<sup>7)</sup>。ここで  $\omega_s$  は反射鏡上のスポットサイズである。このような場合のモードの写真例を図3に示す。ここで実用上最も使用される  $m=0, n=0$  の基本モードはガウシアン関数で近似される。矩形の反射鏡を用いた共焦点共振器の場合には、各次元に変数分離をした積分方程式を得ることができる。この時の解は偏長スフェロイド関数となる。やはりレーザースポットが矩形の鏡による蹴られがないとすると、その解は

$$u_{mn} = \exp[-(x^2+y^2)/\omega_s^2] \times Hm(\sqrt{2}x/\omega_s)Hn(\sqrt{2}y/\omega_s) \quad (14)$$

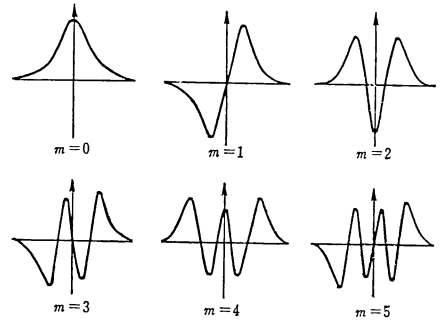


図 4 エルミート-ガウシアン関数の例

のガウシアン関数とエルミート関数  $Hm, Hn$  の積、エルミートガウシアン関数<sup>7)</sup>となる。エルミートガウシアン関数を図4に示す。

共焦点共振器のビームウエストの位置は二つの反射鏡の中間にあり、そのスポットサイズは

$$\omega_0 = \sqrt{\lambda d/2\pi} \quad (15)$$

で与えられ、また両端の二つの反射鏡上のスポットサイズ  $\omega_s$  は

$$\omega_s = \sqrt{\lambda d/\pi} \quad (16)$$

となり、反射鏡上の位相の分布は反射鏡の曲率半径に一致した等位相面となっている。共振器のビームウエストから  $z$  の距離離れた位置でのスポットサイズ  $\omega$ 、波面の曲率半径  $R$  は各々、

$$\omega(z) = \omega_0 \{1 + (z/z_0)^2\} \quad \text{ただし、} z_0 = \pi\omega_0^2/\lambda \quad (17)$$

$$R(z) = z + z_0/z \quad (18)$$

で与えられる。すなわち等位相面の曲率半径は  $z$  の変化によって刻々と変化する。

ここで任意の等位相面をその曲率半径に合った反射鏡で置き換えても、光の振幅、位相分布は乱されない。これは任意の共振器には適当な共焦点共振器が存在することを示している。両端の反射鏡曲率を  $b'$ 、反射鏡間距離を  $d'$  としたときの等価な共焦点共振器の反射鏡の曲率とその間隔  $b$  は

$$b = \sqrt{2b'd'/d'^2} \quad (19)$$

で与えられ、この時の二つの鏡面上でのスポットサイズを  $\omega$  とすると

$$\omega = \sqrt{\frac{d'\lambda}{\pi} \left\{ \left( \frac{d'}{2b} \right) - \left( \frac{d'}{b} \right)^2 \right\}^{1/4}} \quad (20)$$

となる。

一方、間隔が  $d$  で、両端の反射鏡の曲率半径が  $b_1, b_2$  の非対称な共振器の場合の両反射鏡上のスポットサイズも同様にして得ることができる。

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda b_1/\pi} \left\{ \frac{d(b_2-d)}{(b_1-d)(b_1+b_2-d)} \right\}^{1/4} \quad (21)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\lambda b_2 / \pi} \left\{ \frac{d(b_1 - d)}{(b_2 - d)(b_1 + b_2 - d)} \right\}^{1/4} \quad (22)$$

2.3 共振器の安定条件

共焦点共振器と一般の共振器との関係を説明してきたが、ここでレーザー発振が安定に起きるかどうかの条件について言及する。

レーザーの発振ではレーザー共振器中での媒体による光の増幅と共振器での光の損失（反射鏡での反射損失と反射鏡間での伝搬中の回折損失など）がバランスしたときに定常発振する。したがって、共振器中での損失を少なくすることが大切である。

二つの反射鏡の曲率半径を  $b_1, b_2$ 、それと等価の共焦点共振器の曲率半径を  $b$  とする。(19)式を用いて、 $b'$  に  $b_1, b_2$  を代入して各々の  $d'$  を求める。この時の  $d'$  の値はビームウエスト位置から反射鏡を置く位置  $(z_1, z_2)$  の2倍となっているので<sup>7)</sup>

$$2z_1 = b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - b^2}, \quad 2z_2 = b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - b^2} \quad (23)$$

となる。したがって、共振器間隔  $d$  は

$$d = z_1 + z_2 = b_1 + b_2 \pm \sqrt{b_1^2 - b^2} \pm \sqrt{b_2^2 - b^2} \quad (24)$$

で与えられる。

ここで  $b_2 > b_1$  とした場合、等価共振器の反射鏡の曲率半径  $b$  は  $0 < b < b_1$  である。

この結果から二つの反射鏡の間隔  $d$  について許容される条件は、

$$0 < d < b_1, \quad b_2 < d < b_1 + b_2 \quad (25)$$

となる。安定に発振する共振器の存在範囲と端面のスポットの大きさ  $\omega_1, \omega_2$  を示したものが図5である。

存在不能領域では、スポットサイズは無限に広がり、回折による損失が非常に大きくなり、発振に至らないことを示している。

さらにこの高損失、低損失の領域の分布を示したものが図6である。図中で (1, 1) は平行平面共振器、(-1, -1) は共心系、(0, 0) は共焦点共振器であり  $b_1 = b_2$  の

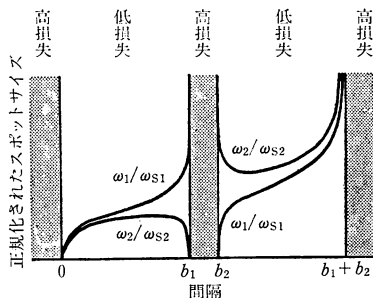


図5 レーザーのスポットサイズと共振器存在条件 ( $\omega_{s1} = \sqrt{\lambda b_1 / \pi}$ ,  $\omega_{s2} = \sqrt{\lambda b_2 / \pi}$ )

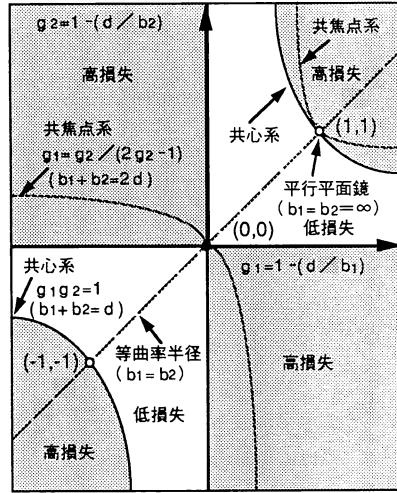


図6 共振器の低・高損失条件図

場合を示す。

これらの点は高損失と低損失の境界にある。実際の共振器はこの状態からずらした低損失領域でなければならない。最初に発振した Javan の He-Ne レーザーは平行平面を使っており、これは高損失と低損失の境界にある条件の共振器を使うことになり、発振に至るための調整には苦労したものと考えられる。

2.4 レーザー共振器の回折損失

レーザー光が共振器間を往復するときに生じる回折損失を定量的に考えるため、再び(10)式に話を戻そう。簡

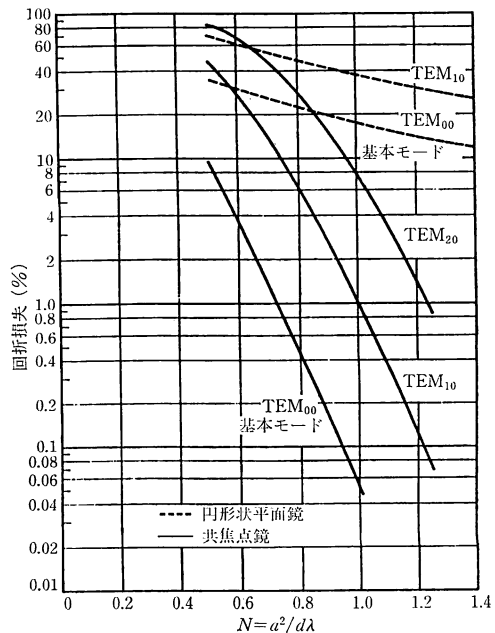


図7 1回の光の伝搬と回折損失

単のために対称型の共焦点共振器を考える。

二つの共振器上の分布はお互いに他の共振器上の分布を再現することになるので、

$$\gamma E' = E \quad (26)$$

の形になる。したがって1回ごとの回折損失は伝搬するときの減衰率 $\gamma$ によって表すことができ、損失 $L$ は

$$L = 1 - |\gamma|^2 \quad (27)$$

とかくことができる。

回折損失の計算例を図7に示す<sup>9)</sup>。

### 3. レーザービームの伝搬

レーザーは指向性が良く従来の光線と比べて広がらずにまっすぐ進み他の光線とは異なる特性を示す。

応用上興味のあるのは TEM<sub>00</sub> モードであるが他の高次モードも興味ある振舞をする。

#### 3.1 空気中の伝搬

レーザーの横モードの振幅分布は上記の共振器理論によって、フーリエ変換を施しても関数形が不変な関数によって記述できることを述べた。このことは共振器を出た直後のレーザー光のスポット形状とかなりの距離レーザー光が伝搬されたファーフールド領域の関係もフーリエ変換の関係にあることから、レーザー光のスポット分布は遠く伝搬した後もレーザー共振器を出た後の形状を維持していることがわかる。例えば TEM<sub>00</sub> モードのガウシアン分布はファーフールド領域でもそのままガウス分布を維持するし、ドーナツモードの TEM<sub>01</sub> モードもそのままドーナツ形状を維持できることを示している。ここで話を再び、応用上最も大切な TEM<sub>00</sub> 基本モードに戻そう。共振器内のレーザー光の様子は前節で述べたが、レーザー共振器を出たレーザー光の振舞もその延長にあると考えて良く、ビームウエスト位置から $z$ の位置でのスポットサイズとビームウエストでのスポットサイズの関係は

$$\omega^2 = \omega_0^2 \{1 + (\lambda z / \pi \omega_0^2)^2\} \quad (28)$$

の双曲線になることを示している(図8)。 $z$ が十分に大きいとスポットサイズは漸近線に近づいて、

$$\omega = \lambda z / \pi \omega_0 \quad (29)$$

となる。これよりレーザー光の拡がり角は半角で

$$\theta = \lambda / \pi \omega_0 \quad (30)$$

となる。 $\lambda = 633 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 0.5 \text{ mm}$  の He-Ne レーザーを考えると、 $\theta = 0.4 \text{ mrad}$  である。

#### 3.2 レンズ通過特性

双曲線に沿って、伝搬したレーザー光がレンズなどの結像作用を有する光学素子を通過したときの振舞について述べる<sup>9)</sup>。

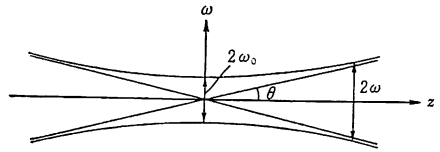


図8 レーザービームの伝搬の様子

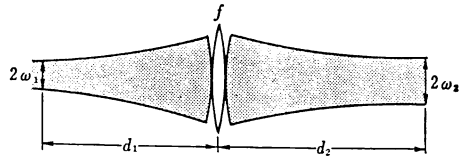


図9 レーザービームのレンズ通過特性

て述べる<sup>9)</sup>。

レンズ通過前後のレンズからの距離が  $d_1, d_2$ 、ビームウエストでのスポットサイズがそれぞれ  $\omega_1, \omega_2$  になる系において(図9)、どのような関係があるかを述べる。レンズ上ではビームウエストから伝搬した、レーザー光のスポットサイズは通過前後で等しいから、(28)式を用いて、

$$\omega_1 \sqrt{1 + (\lambda d_1 / \pi \omega_1^2)^2} = \omega_2 \sqrt{1 + (\lambda d_2 / \pi \omega_2^2)^2} \quad (31)$$

が成り立つ。レンズ前後のレーザー光の波面の曲率半径は(18)式より  $d_1 \{1 + (\pi \omega_1^2 / \lambda d_1)^2\}$ ,  $d_2 \{1 + (\pi \omega_2^2 / \lambda d_2)^2\}$  であり、レンズにとってみてはその曲率中心位置から光がきて通過後結像すると考えると、レンズの結像式から、

$$\frac{1}{[d_1 \{1 + (\pi \omega_1^2 / \lambda d_1)^2\}]} + \frac{1}{[d_2 \{1 + (\pi \omega_2^2 / \lambda d_2)^2\}]} = 1/f \quad (32)$$

が成り立つ。この式と(31)式から

$$(d_2/f - 1) = (d_1/f - 1) / \{(d_1/f - 1)^2 + (\pi \omega_1^2 / \lambda f)^2\} \quad (33)$$

$$\omega_2^2 / \omega_1^2 = 1 / \{(d_1/f - 1)^2 + (\pi \omega_1^2 / \lambda f)^2\} \quad (34)$$

が得られる。

ここで従来の幾何光学との関係を調べてみよう。 $\pi \omega_1^2 / \lambda \ll |d_1 - f|$  の時、

$$1/d_1 + 1/d_2 \doteq 1/f \quad (35)$$

となり、従来の薄肉レンズの結像公式が成立する。

一方、 $\pi \omega_1^2 / \lambda f$  が十分に大きいときには(33)式より、 $d_2 = f$  となり、平行光束がレンズに入り、後方焦点に光が収束する場合に相当する。

逆に、 $\omega_1$  と  $\omega_2$  および  $f$  が与えられた時、 $d_1, d_2$  がどのように決められるかを示す公式を示そう<sup>10)</sup>。マッチング長と呼ばれる長さ  $f_0$  を導入し、

$$f_0 = \pi \omega_1 \omega_2 / \lambda \quad (36)$$

と定めると、

$$\begin{aligned} d_1/f &= 1 \pm (\omega_1/\omega_2) \sqrt{1-f_0^2/f^2}, \\ d_2/f &= 1 \pm (\omega_2/\omega_1) \sqrt{1-f_0^2/f^2} \end{aligned} \quad (37)$$

で与えられる。当然ながら、これは(33)式と(34)式を満足することはいうまでもない。これらのことから、レンズ通過後のレーザー光の集光位置は幾何光学的結像位置と異なることを示している。これはレーザー光のみで起きる現象ではない。通常回折現象を考慮すると必ず回折的な焦点と幾何光学的な焦点とは異なる。レーザー光の場合特にこの現象が問題となるのは単色性が良くコヒーレンスの高いレーザー光は指向性がよく拡がらずに光線を飛ばすことができ、実質的にF数が大きい光学系が構成される場合が多いためである。上記検討から波動光学的な焦点(ビームウエストの位置)と幾何光学的な焦点の距離zは

$$z = f(\lambda f / \pi \omega_1^2)^2 = 16 \lambda^2 F^4 / \pi^2 f \quad (38)$$

となりF数の4乗に比例して増加することがわかる。例えば共焦点共振器で各々の鏡から反射したレーザー光は反対側の位置を焦点として進むはずであるがビームウエストの位置は共振器の中間にありその距離は数十cmのオーダーになっているのはこのためである。レンズでの蹴られない場合にはレンズ通過後のレーザー光の振幅分布がガウシアン関数で表されることを述べたが、蹴られのある場合も若干触れてみよう<sup>11)</sup>。蹴られのある場合の焦点上の光の分布は次式で表される。

$$I \propto \left| \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp(-r^2/\omega^2) \right.$$

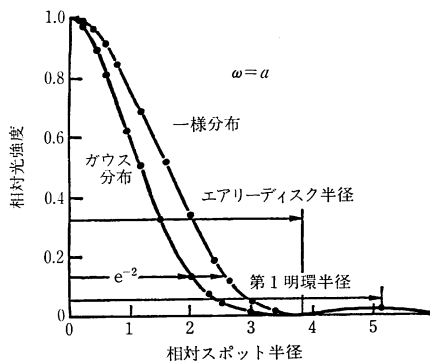


図10 レーザー光の集光特性(一様分布とガウス分布)

$$\times \exp\{i 2\pi \rho r / \lambda f \cos(\theta - \phi)\} r dr d\phi \}^2 \quad (39)$$

ここで、aを無限大にすると蹴られない場合に近づくし、逆にωを無限大にするとエアリディスク形状が得られる。蹴られのある場合は二つの関数の中間の形状が得られることになる(図10)。

ここで集光位置の中心位置での強度は、入射光強度をPとすると(39)式にρをゼロとすることにより得られ、

$$I_0 = 2\pi P a^2 / \lambda^2 f^2 \{1 - \exp(-a^2/\omega^2)\} (a/\omega)^2 \quad (40)$$

のようになる。Iが最大値となるのはa=1.12ωの時である。これはωが小さいとレンズによる蹴られはなく光の有効利用が図れるがF数が実行的に小さくスポット系が大きくなりIは小さくなる。逆にa≪ωであると、レーザー光の光学系での蹴られのためにIが低下する。ちょうどa=1.12ωを満足する時に最大値をとると解釈できる。

文 献

- 1) T. H. Maiman: "Stimulated optical radiation in ruby," Nature, **187** (1960) 433-495.
- 2) A. Javan, W. R. Bennet, Jr. and D. Herriott: "Population inversion and continuous optical maser oscillation in a gas discharge containing a He-Ne mixture," Phys. Rev. Lett., **6** (1961) 106-110.
- 3) I. Hayashi, M. Panish, P. W. Foy and A. Sumsi: "Junction lasers which operate continuously at room temperature," Appl. Phys. Lett., **17** (1970) 109-111.
- 4) T. Li: "Diffraction loss and selection of modes in maser resonators with circular apertures," Bell Syst. Tech. J., **44** (1965) 917-933.
- 5) A. G. Fox and T. Li: "Resonant modes in a maser interferometer," Bell Syst. Tech. J., **40** (1961) 453-488.
- 6) G. Boyd and J. Gordon: "Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers," Bell Syst. Tech. J., **40** (1961) 489-508.
- 7) G. Boyd and H. Kogelnik: "Generalizes confocal resonator theory," Bell Syst. Tech. J., **41** (1962) 1347-1369.
- 8) D. Slepian: "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty 4," Bell Syst. Tech. J., **43** (1964) 3009-3057.
- 9) T. S. Chu: "Geometrical representation of Gaussian beam propagation," Bell Syst. Tech. J., **45** (1966) 287-299.
- 10) H. Kogelnik: "Matching of optical modes," Bell Syst. Tech. J., **44** (1965) 334-337.
- 11) R. W. Rhyns: "Lenses for lower modes," Laser Focus, **10**, 6 (1974) 55-61.