



逐次近似による一軸結晶内の光線追跡法

早水 良定

早水光学設計 〒192-01 八王子市西寺方町 1019-235

(1992年3月26日受付, 1992年8月26日受理)

Ray-Tracing Method for Uniaxial Crystals by Successive Approximations

Yoshisada HAYAMIZU

Hayamizu Optical Design Laboratory, 1019-235, Nishiterakata, Hachioji 192-01

(Received March 26, 1992; Accepted August 26, 1992)

In this paper, a new method of ray tracing in uniaxial crystals is proposed. Snell's law applies to incidental and refractive wave-normal vectors in uniaxial crystals as well as ray vectors in isotropic media. The refractive index of such crystal is a function of the angle between the wave-normal and the optic axis of the crystal. This paper shows the way the refracted wave-normal vector and refractive index in uniaxial crystals are calculated by the successive approximations so that they can satisfy above two relations simultaneously. The refracted ray vector is then obtained from the relation among the wave-normal vector, ray vector, and optic axis vector.

1. ま え が き

近年、偏光を用いるケースが多くなりつつあるが偏光の光学はかなり複雑である。その一例として、結晶の如き複屈折を示す媒質における屈折、反射の問題がある。

複屈折は異方性媒質における光の伝搬を特長づけるものであり、これを応用した各種の光学素子、例えば、偏光子、波長板、複像プリズム等がいろいろな分野で用いられているのは周知のことである。しかし、これらの素子における複屈折の光学、特に光線の屈折(または反射)の取り扱いはずいぶん明確になっていない。本論文の主旨は、複屈折媒質、特に一軸性結晶における光線の屈折を、いわゆる光線追跡の形で行うことを示すことにあり、光学系(レンズ、プリズム等よりなる)における異常光線の追跡に役立つことを期待したものである。

一軸性結晶内の光線追跡については、Stavroudisの論文がある¹⁾。これは、Huygensの原理を用い、異常光線の方向(光線ベクトル)を求めるものである。しかし、数式(ベクトル演算)が必ずしも簡明でなく、通常の光線追跡の式にときほぐされていないので、直ちに応用さ

れ難いきらいがある。

また、この論文では、入射側が一軸性結晶の場合については言及せず、したがって、結晶内の反射光線の追跡も全く論じていない。さらに、屈折の際に生ずることのある全反射への対応が不明確であり、全反射を利用する偏光子(アーレンプリズム等)の光線追跡による解析には適用が容易でない。これらは、Huygensの原理により屈折光線を求める追跡法の難点と思われる。

本論文では、従来法とは逆に、波面法線の屈折を求めから光線の屈折を求める。この方法は従来、複雑で簡単には解が求められないとされていたが、逐次近似法の採用により解決することができた。すなわち、波面法線に屈折の法則を適用し、屈折波面法線のベクトルを求める。この際、屈折率が率必要となるが、異常光線の場合は、最初は未知である。そこで、波面法線と光学軸のなす角により屈折率がきまることを利用し、逐次近似により、波面法線ベクトルと屈折率を交互に求め、屈折の法則と屈折率の式が同時に成立するまで繰り返し、波面法線ベクトルを確定する。波面法線ベクトルが求められると、光学軸、波面法線ベクトルおよび、光線ベクトルの

間に成立する関係を用い、光線ベクトルを求める。これらベクトル間の関係はすでに知られてはいるが、適用可能な数式にはなっていない。そこで本論文では、ベクトル算法による新しい関係式を導入し、波面法線ベクトルから光線ベクトルがただちに求められる算式を確立した。

以上のように、本論文で提案する異常光線追跡法は、屈折の法則をベースにしており、計算方式はそのままに、反射側の屈折率を負にすることにより、反射光線の追跡を行うことができる。また、光線追跡中における全反射の有無は、屈折角が実数か虚数かを計算することにより、検定が可能となる。これらも、本論文の光線追跡法の利点と思われる。

2. 逐次近似による屈折波面法線ベクトルの算出

異方性媒質内では、光波の波面（位相一定の面）と、光線（光エネルギーの進む径路）の伝搬方向は異なり、また、波面の速度と光線速度も、異なるとされている。

一般的に、屈折率は真空中の光速度を媒質中の光速度で割った値とされるので、異方性媒質内では、波面速度に対応する屈折率と、光線速度に対応する屈折率が異なるわけであるが、通常、前者を異方性媒質内の屈折率としている。屈折率は波面の進行方向の関数であり、その算出は必ずしも簡単ではないが、一軸性結晶では簡明な式となる。この式と、屈折の法則を基本に、逐次近似による屈折波面法線ベクトルの算出に適した数式を導入する。

2.1 波面法線ベクトルの屈折式^{2,3)}

等方性、異方性を問わず、波面に垂直な法線ベクトルについては、以下の屈折の法則が成り立つ (Fig. 1 参照)。

- 入射波面の法線、境界面の法線、屈折波面の法線は同一面内にある。
- 入射角を \bar{u} 、屈折角を u とすると、 $\bar{n} \sin \bar{u} = n \sin u$ となる (いわゆる Snell の式)。

以上において、 \bar{n} 、 n は等方性の場合には固有値であるが、異方性媒質では、波面法線方向によって異なる値をもつ。

入射波面法線、屈折波面法線および境界面法線の単位ベクトルを \bar{D} 、 D および H とすると、二つの単位ベクトルのベクトル積（外積）の絶対値は、両ベクトルのなす角の \sin となることを考慮すれば、上述の屈折の法則は以下の如く、ベクトル演算で表し得る（なお、以下においてベクトル積は $H \times D$ の如く、また、スカラー積

$H \cdot D$ の如く表すものとする）。

$$nH \times D = \bar{n}H \times \bar{D} \tag{1}$$

したがって

$$\begin{aligned} H \times (nD - \bar{n}\bar{D}) &= 0 \\ \therefore nD - \bar{n}\bar{D} &= tH \end{aligned}$$

となる。係数 t を求めるには、両辺の H のスカラー積をとると、 $H \cdot H = 1$ 、 $D \cdot H = \cos u$ 、 $\bar{D} \cdot H = \cos \bar{u}$ であるから

$$t = n \cos u - \bar{n} \cos \bar{u}$$

となり、結局、屈折波面法線ベクトル D は

$$D = \frac{1}{n}(\bar{n}\bar{D} + tH) \tag{2}$$

となる。 \bar{D} 、 D および H の成分表示（方向余弦）を $(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3)$ 、 (d_1, d_2, d_3) および (h_1, h_2, h_3) とし、 $n \sin u = \bar{n} \sin \bar{u}$ となること、および、スカラー積 $H \cdot \bar{D} = \cos \bar{u}$ 等となることを考慮すれば、以下の如く、屈折の一般式が得られる。すなわち

$$\cos \bar{u} = H \cdot \bar{D} = h_1 \bar{d}_1 + h_2 \bar{d}_2 + h_3 \bar{d}_3 \tag{3}$$

$$n \cos u = n \sqrt{1 - (\bar{n}/n)^2 (1 - \cos^2 \bar{u})} \tag{4}$$

$$t = n \cos u - \bar{n} \cos \bar{u} \tag{5}$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{n}(\bar{n}\bar{d}_1 + th_1) \\ d_2 &= \frac{1}{n}(\bar{n}\bar{d}_2 + th_2) \\ d_3 &= \frac{1}{n}(\bar{n}\bar{d}_3 + th_3) \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

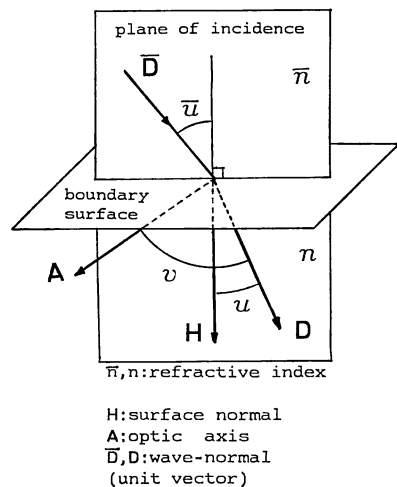


Fig. 1 Relation of \bar{n} , n , H , A , \bar{D} and D . (1) law of refraction: $\bar{n} \sin \bar{u} = n \sin u$ (Snell's law) or Eq. (2). (2) refractive index: $1/n^2 = \sin^2 \times v/n_e^2 + \cos^2 v/n_o^2$ or Eq. (8), (9). (n_o : refractive index of ordinary ray) (n_e : refractive index of extraordinary ray).

となる (ベクトル演算が行えるソフトを用い, (2)式より直接 \mathbf{D} を求めてもよい)。

2.2 屈折率 n の式

以上の式で, \bar{n} が与えられているとしても, n は未知である。しかし, n は, Fig. 1 に示す如く, 光学軸の単位ベクトル $\mathbf{A}(a_1, a_2, a_3)$ と屈折波面の法線ベクトル \mathbf{D} とのなす角 v の関数として, 一軸性結晶では

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2 v}{n_e^2} + \frac{\cos^2 v}{n_o^2} \quad (7)$$

として与えられる⁴⁾。 n_o, n_e はいわゆる常光線, 異常光線の屈折率 ($v=0, v=90^\circ$ に対応する) である。よって

$$\cos v = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \quad (8)$$

$$n = \frac{n_e}{\sqrt{1 + \{(n_e/n_o)^2 - 1\} \cos^2 v}} \quad (9)$$

として, d_1, d_2, d_3 が既知であれば n が求められることになる。

2.3 逐次近似による n の算出

以上の諸式が示す如く, 屈折波面の法線ベクトル \mathbf{D} を求めるには n が, また n を求めるには \mathbf{D} が必要となり, 結局, (2), (9)式が同時に成立するとして, 非線型方程式を解くことが必要となるが, これは困難と予想される。そこで逐次近似法により n および \mathbf{D} を求める。

2.3.1 n の初期値

n の初期値を

$$n = \frac{n_o + n_e}{2}$$

として求める。

2.3.2 \mathbf{D} の算出

求められた n を用い, (3)~(6)式を用いて, $\mathbf{D}(d_1, d_2, d_3)$ を算出。

2.3.3 再び n の算出

求められた $\mathbf{D}(d_1, d_2, d_3)$ を用い, (8), (9)式を用い, n を算出。

2.3.4 n および \mathbf{D} の決定

以上の 2.3.2 および 2.3.3 の iteration を繰り返し, いわゆる successive approximations により, n と \mathbf{D} を決定する。 i を iteration の回数として

$$|n_{i+1} - n_i| < m$$

の如く, 所望の微小値 m (例えば 0.00001) 以下となる回数をもって計算を終了させる。 \mathbf{D} は n_i (または n_{i+1}) に対応する値とすればよい。以上の手順のフローチャートの概要を Fig. 2 に示す。

2.4 実例計算

以下に, 実例計算を 2, 3 示す。全例 $\bar{n}=1.0$ とする。

2.4.1 Example 1

$$n_o = 1.5; n_e = 1.7$$

$$\mathbf{H}: h_1 = h_2 = 0; h_3 = 1.0 (90^\circ)$$

$$\bar{\mathbf{D}}: \bar{d}_1 = 0.707107 (45^\circ), \bar{d}_2 = 0, \bar{d}_3 = 0.707107 (45^\circ)$$

$$\mathbf{A}: a_1 = 0; a_2 = a_3 = 0.707107 (45^\circ)$$

の場合 (入射角: $\bar{u} = 45^\circ$ 。

$$n_1 = (1.5 + 1.7)/2 = 1.6$$

$$n_2 = 1.6103479$$

$$n_3 = 1.6100909$$

$$n_4 = 1.6100972$$

$$n_4 - n_3 = 0.0000063$$

となり, n_3 に対応する \mathbf{D} は

$$d_1 = 0.4391720$$

$$d_2 = 0$$

$$d_3 = 0.8984030$$

となる。

2.4.2 Example 2

$$n_o = 1.5; n_e = 1.7$$

$$\mathbf{H}: h_1 = h_2 = h_3 = 0.5773503$$

$$\bar{\mathbf{D}}: \bar{d}_1 = \bar{d}_2 = 0.4, \bar{d}_3 = 0.8246211$$

$$\mathbf{A}: a_1 = a_2 = 0.65, a_3 = 0.3937004$$

の場合 (入射角: $\bar{u} = 20.2857^\circ$)

$$n_1 = 1.6$$

$$n_2 = 1.5296236$$

$$n_3 = 1.5310003$$

$$n_4 = 1.5309719$$

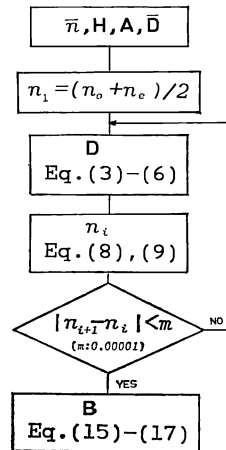


Fig. 2 Flowchart of successive approximations for calculation of the refractive wave-normal vector, refractive index, and ray vector.

$$n_5 = 1.5309725$$

$$n_5 - n_4 = 0.0000006$$

となり、 n_4 に対応する D は

$$d_1 = 0.469900$$

$$d_2 = 0.469900$$

$$d_3 = 0.747254$$

となる。

2.4.3 Example 3

$$n_o = 1.5; n_e = 1.7$$

$$H: h_1 = h_2 = h_3 = 0.577350$$

$$\bar{D}: \bar{d}_1 = \bar{d}_2 = 0.4, \bar{d}_3 = 0.8246211$$

$$A: a_1 = 0.393700, a_2 = a_3 = 0.65$$

の場合 (入射角: $\bar{u} = 28.2857^\circ$).

$$n_1 = 1.6$$

$$n_2 = 1.5075115$$

$$n_3 = 1.5080346$$

$$n_4 = 1.5080312$$

$$n_4 - n_3 = -0.0000034$$

となり、 n_3 に対応する D は

$$d_1 = 0.468028$$

$$d_2 = 0.468028$$

$$d_3 = 0.749600$$

となる。

2.5 逐次近似の考察

前述した逐次近似について若干の考察を試みよう。

2.5.1 解の取れん性

解の取れん性について、数式による検討は行っていない。しかし、屈折率 n は n_o と n_e の間に存在する値であり、したがって、 D も入射面内において、 n_o と n_e に対応する屈折角内に存在し、 D と A とのなす角 v (Fig. 1) も D の屈折角に対応する値をとり、(9)式から求められる n がこの v の範囲内できめられることは明らかである。ただし、全反射の場合は一考を要する (後述)。

2.5.2 n の初期値について

n の初期値を $(n_o + n_e)/2$ としたが、 v が小さい場合は n_o を、また、 v が 90° に近い場合は n_e を初期値とすれば、取れんが早いであろう ((9)式参照)。しかし、一般のレンズ系やプリズム等では、予想は必ずしも容易でなく、 $(n_o + n_e)/2$ を初期値として良いであろう。

2.5.3 常光線、および等方性媒質の場合

常光線の屈折は、上述の諸式において、 $n_e = n_o$ として求めればよい。等方性媒質では、 $n_o = n_e = n$ とする。

2.5.4 全反射の場合

全反射の場合は、 $n^2 \leq \bar{n}^2(1 - \cos^2 \bar{u}) = \bar{n}^2 \sin^2 \bar{u}$ となり、(4)式は虚数となる。すなわち、臨界角を \bar{u}_c とすると $\bar{u}_c = \sin^{-1}(n/\bar{n})$ であり、 $\bar{u} > \bar{u}_c$ の場合が全反射である。しかし、屈折側が一軸性結晶であると、 n は(9)式で与えられ、 \bar{u}_c も一義的にはきまらず、設定された \bar{u} が全反射かどうか、簡単には求められない。

したがって、初期値の n 、すなわち、 $n = (n_o + n_e)/2$ で(4)式が虚数となっても、ただちに全反射とは断定できない。何故ならば、(2)、(9)式が同時に成立する解の n が初期値の n より大きく、(4)式が実数となるかもしれないからである。同様なケースが逐次近似の過程でも生じ得る。

何故ならば、2.4 の実例計算からわかるように、逐次解は不連続であり、全反射の精密な判定は困難と予想されるからである。いずれにしても、逐次近似の過程で(4)式が虚数となると、計算を中断せざるを得ない。そこで、 n を大きな値から少しずつ小さくしてゆき、(2)、(9)式が同時に成立する解の有無を、(4)式の実、虚を判断しながら求める。以下に例を示す。

(1) 初期値の n を $(n_o + n_e)/2$ とした場合に(4)式が虚数となったとすると、 n_o 、 n_e のいずれか大きな値を初期値とする。この初期値の n で(4)式が虚数であれば、全反射となる。なお、入射角 \bar{u} が臨界角となるような屈折率 n_c は、 $n_c = \bar{n} \sin \bar{u}$ であるから、 n を n_c と比較して、 $n < n_c$ ならば全反射としてよい。

(2) 初期値の n で(4)式が実数であれば、(6)式より D を求め、(9)式より D に対応する屈折率を求める。この値を n' とすれば、 $|\Delta n| = |n' - n|$ が、所望の微小値 m (例えば 0.00001) 以下となるか否かを判定する。

(3) $|\Delta n| > m$ であれば、 n を $n - \delta$ とし (屈折率を δ だけ小さくして設定)、同様な計算を行い、 Δn を判定する。

(4) 以下、順次、 $-\delta$ ずつの変化を n に与えてゆき、 $|\Delta n| \leq m$ となるまで、計算を繰り返す。

(5) $|\Delta n| \leq m$ となる前に、(4)式が虚数となれば、全反射となる。しかし、(4)式が常に実数であれば、 $|\Delta n| \leq m$ となる n と D が、(2)、(9)式を同時に満足する解となる。

(6) δ が小さいと、解の精密度は高いが、計算回数が多くなり、大きいと、この逆になる。そこで、 δ を最初は大きく (0.01 等)、解の近くで小さく (0.001, 0.0001 等) してもよい。解の近傍では、 Δn の正負が逆転する (全反射でない場合)。

(7) 実例計算 ($n=(n_o+n_e)/2$ で (4) 式が虚数のケース)

1) $\bar{n}=1.85 : n_o=1.5 : n_e=1.7$

$$H(0, 0, 1) : \bar{D}(0.866025, 0, 0.5)$$

$$(\bar{u}=60^\circ, n_c=1.60215)$$

1) $A(0.707107, 0, 0.707107)$ とすると, 初期値 $n=1.7$ で $\Delta n=-0.16832$, $\delta=0.01$ ずつ n を減少し, $n=1.61$ で $\Delta n=-0.03845$, さらに $\delta=0.001$ とし $n=1.603$ で $\Delta n=-0.01877$ となり, $n=1.60215(=n_c)$ でも $\Delta n=-0.01189$ であり, 全反射.

2) $A(0.5, 0, 0.866025)$ とすると, $n=1.7$ で $\Delta n=-0.12474$ となり, 以下, $\delta=0.01, 0.001, 0.0001$ と段階的に変化させ, 最終的に $n=1.61645$ で $\Delta n=0.00001$ となり, 全反射でないケースとなる. $D(0.991182, 0, 0.132506)$ で屈折角 $u=82.3856^\circ$.

なお, 屈折側が等方性媒質の場合には, 臨界角が一義的にきまり (n = 一定), 上述の手法は不要となる. 結晶を用いたプリズムの接合材は等方性媒質で, このケースに該当する.

3. 光線ベクトルの算出

異方性結晶内では, 光線と波面法線の方法は異なるが, 光線速度面上の点 (光線ベクトルの先端点) における法線の方法は, 波面法線ベクトルの方法と一致する^{2,3)}.

特に, 一軸性結晶では, 光線速度面が回転楕円面であり, 光線ベクトルと波面法線ベクトルの間に簡明な関係が成立し, これらを用い, 一方から他方への変換式を求めることができる.

3.1 光線ベクトルと波面法線ベクトルの変換式

3.1.1 光線と波面法線

一軸性結晶では, 光線と波面法線の関係は次の如く記述される⁴⁾.

- 光線と波面法線と光学軸は同一平面内にある (ベクトルとしては, 共面ベクトルとなる).
- 光線と光学軸, および, 波面法線と光学軸とのなす角を, Fig. 3 に示すごとく, それぞれ, w および v とすれば

$$\tan w = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan v \quad (10)$$

以上の関係から, 光線ベクトルの算出の式を導入する.

3.1.2 光線ベクトルの算出

上式を書き改めると

$$n_e^2 \sin w \cos v = n_o^2 \sin v \cos w \quad (11)$$

となる. 光線方向の単位ベクトルを B とすれば, 波面法線ベクトル D , 光学軸ベクトル A (それぞれ単位ベクトル) を用い, 上述の関係は

$$n_e^2 [A \times B] \cos v = n_o^2 [A \times D] \cos w$$

の如く, ベクトル積の式で表される. よって

$$A \times [B n_e^2 \cos v - D n_o^2 \cos w] = 0$$

$$\therefore B n_e^2 \cos v - D n_o^2 \cos w = kA$$

両辺に A のスカラー積を乗ずると, $A \cdot B = \cos w$, $A \cdot D = \cos v$, $A \cdot A = 1$ であるから

$$k = (n_e^2 - n_o^2) \cos v \cos w$$

$$\cos v = A \cdot D = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \quad (8) \text{ (前出)}$$

$$B = \frac{1}{n_e^2} \left\{ n_o^2 \frac{\cos w}{\cos v} D + (n_e^2 - n_o^2) \cos w \cdot A \right\} \quad (12)$$

となる. しかるに, (10) 式の両辺を 2 乗すると

$$\frac{1 - \cos^2 w}{\cos^2 w} = \frac{n_o^4 (1 - \cos^2 v)}{n_e^4 \cos^2 v}$$

$$\therefore \cos^2 w = \frac{n_e^4 \cos^2 v}{n_o^4 + (n_e^4 - n_o^4) \cos^2 v}$$

$$\therefore \cos w = \frac{n_e^2 \cos v}{\sqrt{n_o^4 + (n_e^4 - n_o^4) \cos^2 v}} \quad (13)$$

となるので, (12) 式は (8) 式の $\cos v$ を用いて

$$B = \frac{1}{\sqrt{n_o^4 + (n_e^4 - n_o^4) \cos^2 v}} \times \{ n_o^2 D + (n_e^2 - n_o^2) \cos v \cdot A \} \quad (14)$$

となる. 上式が光線ベクトルを求める基本式である. また

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{n_o^2}{\sqrt{n_o^4 + (n_e^4 - n_o^4) \cos^2 v}} \\ g &= \frac{(n_e^2 - n_o^2) \cos v}{\sqrt{n_o^4 + (n_e^4 - n_o^4) \cos^2 v}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

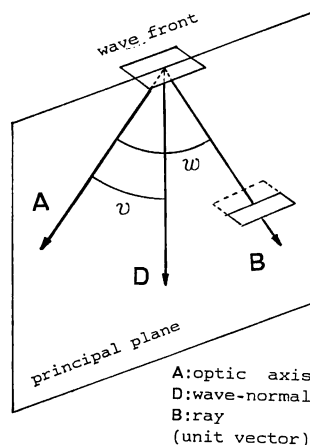


Fig. 3 Relation of A, D and B . $\tan w = (n_o^2/n_e^2) \tan v$ or Eq. (13), (14).

とおけば

$$\mathbf{B} = f\mathbf{D} + g\mathbf{A} \quad (16)$$

したがって、 \mathbf{B} の成分表示 (方向余弦) は

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= fd_1 + ga_1 \\ b_2 &= fd_2 + ga_2 \\ b_3 &= fd_3 + ga_3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となり、 $\mathbf{D}(d_1, d_2, d_3)$ と $\mathbf{A}(a_1, a_2, a_3)$ から $\mathbf{B}(b_1, b_2, b_3)$ が求められる (Fig. 2 参照).

3.2 実例計算

前述 2.4 に示した実例の場合について、光線ベクトルを求めてみる.

3.2.1 Example 1

2.4.1 の実例では、(15)式より

$$\begin{aligned} f &= 0.890082 \\ g &= 0.160836 \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} b_1 &= 0.390899 \\ b_2 &= 0.113728 \\ b_3 &= 0.913380 \end{aligned}$$

となる.

3.2.2 Example 2

2.4.2 の実例では

$$\begin{aligned} f &= 0.807852 \\ g &= 0.207974 \\ \therefore b_1 &= 0.514792 \\ b_2 &= 0.514792 \\ b_3 &= 0.685549 \end{aligned}$$

3.2.3 Example 3

2.4.3 の実例では

$$\begin{aligned} f &= 0.786007 \\ g &= 0.218147 \\ \therefore b_1 &= 0.453758 \\ b_2 &= 0.509669 \\ b_3 &= 0.730987 \end{aligned}$$

3.3 波面法線ベクトルの算出

前述の設定では波面法線ベクトルを既知として、光線ベクトルを求めたが、光線ベクトルから波面法線ベクトルを求めることもできる.

すなわち、(12)式から \mathbf{D} を \mathbf{B} および \mathbf{A} で表すと

$$\mathbf{D} = \frac{1}{n_o^2} \left\{ n_e^2 \frac{\cos v}{\cos w} \mathbf{B} + (n_o^4 - n_e^4) \cos v \cdot \mathbf{A} \right\}$$

となる. よって、(10)式を2乗し、 $\cos w$ を求めたと同じ手法で、 $\cos v$ を求め

$$\cos v = \frac{n_o^2 \cos w}{\sqrt{n_e^4 + (n_o^4 - n_e^4) \cos^2 w}} \quad (18)$$

$$\cos w = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{\sqrt{n_e^4 + (n_o^4 - n_e^4) \cos^2 w}} \\ &\times \{ n_e^2 \mathbf{B} + (n_o^2 - n_e^2) \cos w \cdot \mathbf{A} \} \end{aligned} \quad (20)$$

として、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} から \mathbf{D} を求めることができる.

したがって

$$\left. \begin{aligned} \vec{f} &= \frac{n_e^2}{\sqrt{n_e^4 + (n_o^4 - n_e^4) \cos^2 w}} \\ \vec{g} &= \frac{(n_o^2 - n_e^2) \cos w}{\sqrt{n_e^4 + (n_o^4 - n_e^4) \cos^2 w}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

とすれば

$$\mathbf{D} = \vec{f} \mathbf{B} + \vec{g} \mathbf{A} \quad (22)$$

となり、 \mathbf{D} の成分表示 (方向余弦) は

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \vec{f} b_1 + \vec{g} a_1 \\ d_2 &= \vec{f} b_2 + \vec{g} a_2 \\ d_3 &= \vec{f} b_3 + \vec{g} a_3 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

として求められる.

3.4 光線の反射

通常の光学系で反射面 (平面鏡, 球面鏡等) を含む場合、反射光線の追跡は、屈折面の諸式をそのまま用いるが、反射の前後で、屈折率の符号を反転させて行うことが多い. 本論文の追跡法では、異常光線に対しても、同様な手法が適用できる. しかし、異方性のために、入射角と反射角が等しくはならない.

一軸性結晶内における反射は、入射角、反射角を \bar{u} 、 u とすれば、屈折の法則と形式的に同じとなり

$$n \sin u = \bar{n} \sin \bar{u}$$

の如く表される⁴⁾. ただし、 \bar{u} 、 u は入射、反射の波面法線と境界面法線のなす角であり、また、 \bar{n} 、 n は光学軸と波面法線とのなす角の関数であるから、 $u = \bar{u}$ というわけにはいかないことになる.

一軸性結晶内での反射波面の法線ベクトル (単位ベクトル) を \mathbf{R} とすれば、波面法線に対する反射の式は、(1)式と同じ形式を用いて

$$\mathbf{n} \mathbf{H} \times \mathbf{R} = \bar{n} \mathbf{H} \times \bar{\mathbf{D}}$$

と表し、 n の値を負とする. 上式で、 \bar{n} 、 n の絶対値を用いた式があり、 \mathbf{R} の向きまで考慮すると、このほうが良いとされる. この場合、 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{R}$ が負となるので、 n が負であれば $\cos u$ が負となる数式上の工夫が要請され、式がやや複雑になる⁵⁾. しかし、 \mathbf{R} の方向のみに着目すれば、上式で n を負とすることで対応できる⁶⁾. 光線追跡では、光線の方向を取り扱う場合が大部分で、光線の向きを問

題とする例は少ない。本論文でも、前述の諸式はそのままとし、反射では n を負とすることにする。

具体的には n_o, n_e を負の値(例えば, $-1.5, -1.7$ の如く)に設定し、計算を行う。

ただし、注意を要するのは \bar{n} , すなわち、入射側の屈折率で、この値も入射波面の法線ベクトル \bar{D} と光学軸ベクトル \mathbf{A} のなす角の関数である。もし、 \bar{D} が与えられていれば、 \bar{D} と \mathbf{A} のなす角を $\bar{\nu}$ とすると、 $\cos \bar{\nu} = \mathbf{A} \cdot \bar{D} = a_{11}\bar{d}_1 + a_{22}\bar{d}_2 + a_{33}\bar{d}_3$ であり、この値を(9)式の $\cos \nu$ の代りに代入し、 \bar{n} を求めねばならない。また、入射光の光線ベクトル(\mathbf{B})が与えられていれば、(20)~(23)式から波面法線ベクトル(\bar{D})を求め、同様の手法により、(8)、(9)式から \bar{n} を求める。

反射波面の法線ベクトル \mathbf{R} が求まれば、反射の光線ベクトルは、屈折の場合の諸式、すなわち、(15)~(17)式をそのまま適用して求めることができる。

4. 光線追跡

光学系において、光線の伝搬経路の計算は、光線追跡とよばれ、光学系の結像性能の評価に欠かせぬものである。等方性媒質からなる光学系では、ある面での屈折(または反射)の式と、屈折光線と次の面との交点を求める式(いわゆる面移行の式)を交互に使い、光線追跡を行う⁵⁾。異方性媒質を含む場合も手順は同じであるが、波面法線と光線の差異を考慮する必要がある。前述の諸式をもとに、手順を概説すると次のようになる。

4.1 面屈折(または反射)の式

(1) 面屈折の計算は、前述の(3)~(6)式、および、屈折率を求める(8)、(9)式を用い、逐次近似により屈折(または反射)の波面法線ベクトル(方向余弦)を求める。反射の場合は、屈折率の符号を反転させる。

(2) 次に、(8)式、および、(15)~(17)式を用い、屈折(または反射)の光線の光線ベクトル(方向余弦)を求める。

(3) 通常は、第1面の入射側の媒質は等方性媒質であり、上記の手順でよいが、入射側が異方性であり、かつ、光線ベクトルが与えられるとすれば、(20)~(23)式により入射側の波面法線ベクトルを求めてから、計算を行う必要がある(3.4参照)。

4.2 面移行の式

面移行の式は、光学系における通常の光線追跡の場合と同じである⁵⁾。すなわち、ある面における屈折(または反射)光線の、屈折点および方向余弦から、次の面の入射点を解析的手法により求める。方向余弦は光線ベク

トルの成分表示を用いる。入射点が求まれば、同様に解析的手法により境界面法線の単位ベクトル((3)式の \mathbf{H})が求められる。以下、手順は4.1に戻り光線追跡が続行されることになる。

4.3 常光線と異常光線の扱いについて

追跡計算は、常光線、異常光線を別々に行う。常光線の振動面は主断面(光学軸と波面法線を含む面)に垂直であり、異常光線では主断面内にあるので、扱う偏光の振動成分の判別が必要となる。しかし自然光(あらゆる振動方向の直線偏光が混在する光)では、常光線、異常光線がともに存在すると考えてよい。したがって、自然光が入射すると、常、異常の両成分の振動面の光線が、一面を通過するごとに、各々2本に分かれるので、面数を m とすると、 2^m の光線数となることが予想される⁴⁾。これまでに述べた光線追跡の手法を用い丹念に計算すれば、 2^m 本の光線の屈折、または反射の経路を、全反射の有無を含めて、詳細に知ることができるはずである。

任意の直線偏光が入射する場合は、入射、屈折における振動成分の判定が必要となるが、これについての検討は別の機会にゆずりたい。

5. ま と め

一軸性結晶を含む光学材料からなる光学系における光線追跡を、逐次近似により行う計算方法を述べ、2、3の具体例の計算も提示した。本論の計算法は、球面、非球面を問わず、また、屈折、反射の混合系の場合でも、いわゆるスキュー光線を含め、一般的に適用できると考えられる。本論の方法は、必ずしも解析的ではないが、現在のコンピュータの能力をもってすれば十分計算が可能であり、実用に適した手法であると思われる。また、一軸性結晶を含むプリズムやレンズ系の自動設計にも適用可能であろう。偏光の光学の解明の一助になれば幸いである。

文 献

- 1) O. N. Stavroudis: "Ray-tracing formulas for uniaxial crystals," J. Opt. Soc. Am., 52 (1962) 187-191.
- 2) M. Born and E. Wolf: *Principles of Optics*, 6th ed. (Pergamon Press, New York, 1985) pp. 673-686.
- 3) マックス・ボルン, エミル・ウォルフ著 草川 徹, 横田英嗣訳: 光学の原理 III (東海大学出版会, 1975) pp. 988-1001 (1)の邦訳.
- 4) 鶴田匠夫: 続光の鉛筆 (新技術コミュニケーションズ, 1988) pp. 354-363.
- 5) 松居吉哉: レンズ設計法 (共立出版, 1984) pp. 42-46.
- 6) 草川 徹: レンズ光学 (東海大学出版会, 1988) pp. 85-86.