

解説**画像処理におけるフラクタルの利用**

永江 孝規・安居院 猛・長橋 宏

東京工業大学情報工学研究施設 〒227 横浜市緑区長津田町 4259

(1992年8月20日受理)

Applications of Fractal to Image Processing

Takanori NAGAE, Takeshi AGUI and Hiroshi NAGAHASHI

Imaging Science and Engineering Laboratory, Tokyo Institute of Technology,
4259, Nagatsuta, Midori-ku Yokohama 227**1. はじめに**

フラクタルは厳密に定義された用語ではなく、従来から一部で知られていた自己相似性や非整数次元などの諸概念をばくぜんと指したものである。これらの理論は19世紀に創始された集合論、そして20世紀に体系化された位相幾何学に基づく。従来、自己相似性や非整数次元などは数学的構成に徹した際に現れてくる病的な例であり、素朴な直感がもはや成り立たないことを示すための特殊例として注目を集め、数学の発達にも貢献したが、一般数学や実用への影響は少ないと考えられていた。

フラクタルを提唱した Mandelbrot の業績は、これらの無用と見なされていた理論を用いて、自然界の一見不規則に見える現象に説明を与え、フラクタルという用語を作って一つの研究分野にまとめ上げたことにある。

今日、ランダムなデータ列からなんらかの規則性を抽出して、データ解析や圧縮などに利用しようという試みが盛んに行われているが、これらはフラクタルの成功に触発されたものであると言ってもよいであろう。

しかしながら、自然現象はさまざまな要因が複雑に絡んだ結果であって、単一の理論によって何もかもうまく説明できるわけではないことは当然であろう。例えば、樹木の構造は典型的なフラクタルであると言われるが、植物も大局的に見たり局所的に見たりすると、もはやフラクタルではない。フラクタルはその適用可能範囲を見定めて、他の手法と複合してはじめて有用である。

2. Peano 走査

自然界にフラクタルが“実在”してはじめて有用性が認められる適用分野もあれば、さほど実在を仮定しなくてもその理論を応用できる分野もある。以下に説明する画像の処理や変換は、フラクタルとは無縁ではないにしても、画像のフラクタル性を仮定する必要はない。

自然画像は隣接する画素の値に相関を持つ2次元のデータ配列であり、自然画像のRGB空間もやはり分布に片寄りがある3次元のデータ配列である。このようなデータ配列は、一つの画素の値を変換・処理するにも、周辺の画素値が関係してくるので、一般に逐次処理を行うだけでは不十分である。やむなく逐次処理する場合にも、その順序が結果に大きく影響する。

画像を逐次処理する際の走査には、従来から直線的なラスタ走査が用いられてきた。本報告では、このラスタ走査に代わって、Peano 走査と呼ばれる走査を画像処理に応用する方法について述べる。Peano 走査は今日ではフラクタル図形の一種と考えられているが、もともとは1890年に Giuseppe Peano が考案した曲線に由来している。

2.1 Peano 曲線

Peano 曲線は平面、または空間上の特定の領域内のすべての点を通る連続曲線である。Peano によるオリジナルの Peano 曲線の他にも、さまざまな例が考案されてきた。

現在、Peano 走査と呼ばれているのは、1891年に David Hilbert によって示された Peano 曲線に基づく。

このために Hilbert 走査とか Hilbert 曲線と呼ばれることも多い。

Hilbert による Peano 曲線は単位正方形を再帰的に4等分し、各分割の段階で、ある規則に従って分割領域に順序を定めた極限として得られる。その再帰の過程を有限の回数で打ち切ると、正方形の内部の格子点をもれなくたどる折れ線が得られる。この折れ線がいわゆる Peano 走査である。図 1 に Peano 走査の例を示す。

2.2 Peano 走査に関する近年の研究

現在行われている Peano 走査に関する研究は、アルゴリズムの改良と、実際の処理への応用に大きく分かれる。アルゴリズムの研究には、次のようなものが挙げられる。

1) Peano 走査の逐次生成¹⁻⁴⁾

Peano 走査は Koch 曲線などの多くのフラクタル図形と同様に、手続きの再帰呼出しによって生成される。再帰呼出しはアルゴリズムを簡潔に表現するには適しているが、呼出しのたびに必要の変数を格納しておく領域を動的に確保しなくてはならないために、高速化やハードウェアによる実現には不向きであると考えられている。したがって、あらかじめ必要な領域を確保しておいて、テーブルを参照して逐次的に Peano 走査を生成する方法が検討されている。

2) 高次元化⁵⁻⁷⁾

Peano 走査は従来平面のものに限られていたが、3次元以上のデータ配列にも適用するために高次元化がはかられている。ただし、現在までのところ実用的な適用例はほとんど見られない。

3) 大きさ、形の一般化⁷⁻¹⁰⁾

Peano 走査は 2.1 でも述べたように、正方形の再帰的な4等分から得られるので、走査する格子の配列はその縦横の長さがともに2の中(ベキ)でなくてはならない。任意の領域を走査するために、アルゴリズムの一般

化が試みられている。

次に画像処理への応用の例を挙げる。

4) ランレンクス符号化圧縮への応用¹²⁾

自然画像の画素値の分布には片寄りがあり、クラスタ状になっていると考えられる。Peano 走査上の近接点は走査されたもとの画像中でも近接しているので、走査によって1次元の列に変換したのちにも空間的な相関が保持されると考えられる。

Peano 走査を2値画像のランレンクス符号化圧縮に利用すると、ランの長さが一般に長くなり、したがってランの個数が減り、圧縮に効果があると考えられる。また、階調画像に応用すると、走査上の階調の変化がなだらかになるために、やはり圧縮効果があると考えられる。

5) 画像の量子化への応用⁹⁾

RGB 空間内の画素値の片寄りを利用して、カラー画像に含まれる色数を限定する際に、RGB 空間内での色分布をもとめ、その空間を3次元の Peano 走査によって1次元のヒストグラムで表現し、従来のヒストグラムの一様化とはほぼ同様にして画素値を量子化する手法が報告されている。

6) Digital halftoning への応用⁹⁻¹¹⁾

階調画像を誤差分散法によってより少ない階調数の画像に変換する際に Peano 走査を用いると、誤差の配分が非周期的になって、従来の誤差分散法に見られる斜め方向の縞模様が発生しない。

また、Peano 走査を誤差分散法の簡略化に用いた例も報告されている。Floyd & Steinberg の誤差分散法は、階調を落として生じた誤差を周囲の4画素に配分しているが、Peano 走査を用いる場合には、次に変換する画素だけに誤差を配分しても、周期的な模様が生じない。

7) 画像のスクランブルへの応用¹³⁾

画像を伝送する際に画素の並びをランダムに入れ替えて、機密を保護することをスクランブルと言う。Peano 走査は一見不規則に走査しているように見えても、画素値の並びがもとのデータの空間的な相関を保持しているために、スクランブルをかけた後でも圧縮率の劣化が少ない。スクランブルするためには、少ない鍵から多様な経路の Peano 走査が得られる必要があるために、柔軟なアルゴリズムが求められる。

3. Peano 走査の一般化

Peano 走査のアルゴリズムの一般化は 2.2 で述べたように、現在も多様な研究が進められている。ここでは

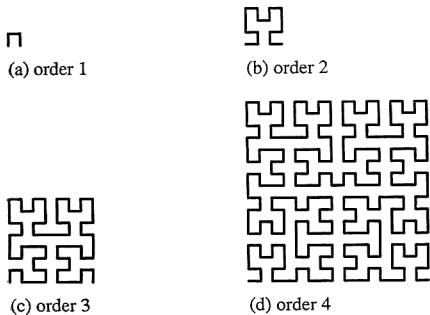


図 1 Peano 走査

筆者らが提案した2進走査, 簡略化3進走査を例に挙げて説明する.

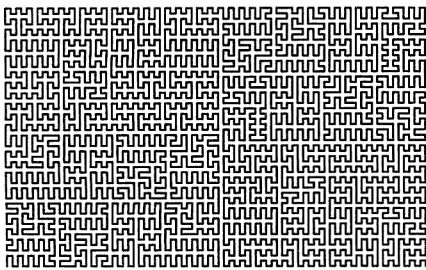
3.1 2進走査

2進走査は矩形領域の再帰的な2分割から得られる. 矩形領域の縦横の長さは任意の整数である. オリジナルの Peano 走査では, 領域を厳密に等分して走査を構成するが, この等分法では縦横の格子の個数が分割数の巾でなくてはならない. 例えば, 領域を縦横ともに再帰的に2等分するならば, 最終的な分割数は縦横ともに2の巾である. したがって, 任意の矩形領域を走査するためには, 領域の等分割を採用することはできない.

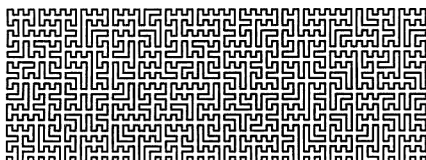
2進走査では, 例えば矩形領域を左右に分割するとき横の長さが13であれば左を6, 右を7というように分割する. 左右を極端に不均等に分割すると, 一方が細長い領域になってしまい, ラスタ走査に近づく. したがって, 左右ができるだけ等しくなるように分割する.

また, 2進走査では縦と横の分割をできるだけ交互に行う. また, 縦と横のどちらを分割してもよい場合には, 長い方を分割する. このようにして, 分割によって一方の領域が細長くなってラスタ走査に近づくことを極力避けている. 図2に2進走査の例を示す.

2進走査上の2点間のユークリッド距離の自乗平均は, 走査に沿った長さに比例する. これはブラウン運動が持つ統計的性質と同じであって, 経路が不規則に変化していることが言える. 図3は20×20の大きさの2進走査上の2点間の距離の自乗平均と, 走査に沿った長さの関係をグラフにしたものである. この図では, 左半分



(a) 80x50



(b) 80x30

図2 2進走査

の運動と同一の性質を持つことがわかる.

3.2 簡略化3進走査

2進走査と全く同様に, 矩形領域の3分割, 4分割か

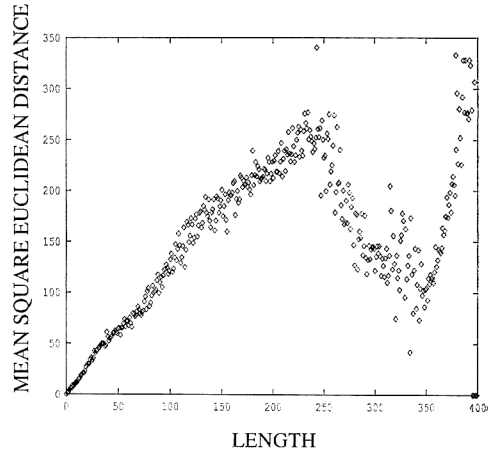
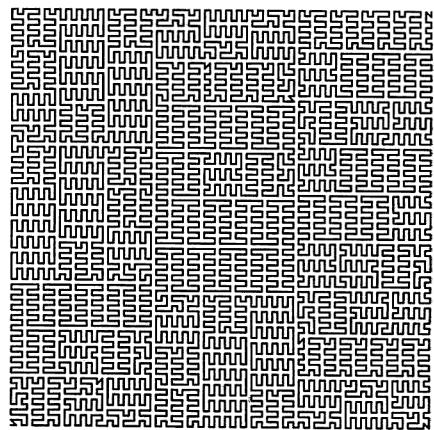
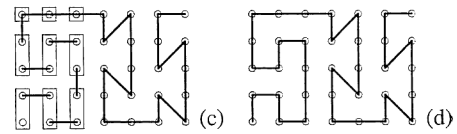
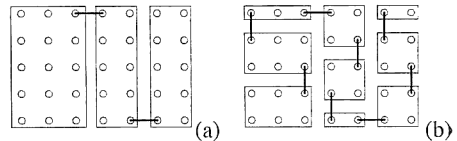


図3 2進走査上の2点間のユークリッド距離の自乗平均と, 走査に沿った長さ



(e) 80x80



(f) 80x20

図4 簡略化3進走査

それぞれ3進走査, 4進走査が得られる。

走査する次の点を隣接する上下左右の格子点以外に, 右上, 右下, 左上, 左下を含めた8近傍でもよいことにすれば, アルゴリズムを簡略にした, 3進走査が得られる。

図4に簡略化3進走査を示す。(a)から(d)までは, 7×5 の矩形を走査する過程を順次に表したものである。(a)では, 横の長さが縦の長さよりも長いので, 左から順に横幅が3, 2, 2になるように分割する。このとき分割される長さはできるだけ等しくなるようにし, 最も長い辺と最も短い辺の長さの差はたかだか1になるようにする。分割された三つの領域の間を結ぶ橋として, 走査が2カ所だけ確定している。さらに(b)では分割される領域はいずれも横よりも縦が長いので, 左, 真中, 右の矩形を縦の高さが2, 1, 1になるように分割する。縦横どちらの長さも3より小さくなると, もはや三つの矩形に分割できないので, その矩形の走査は確定する。(c)では, 右側の 4×5 の領域の走査が既に確定している。斜め方向の走査が現れるのは 2×2 の矩形領域が最後まで残る場合だけである。(d)では, すべての走査が確定している。同図(e), (f)はそれぞれ $80 \times 80, 80 \times$

20の矩形領域を走査したものである。

4. 2値画像のランレングス符号化 圧縮への応用例

ラスタ走査と Peano 走査で, ランの長さ, すなわちランレングスとランの個数がどのように変わるかを示す。

ランレングス符号化圧縮では画素の並びをランレングスの並びに置き換えて圧縮を行う。したがって, ランレングス符号のビット長の総和から, 圧縮率が推定できる。

図5は実験に用いた2値画像の例である。それぞれ 256×256 の大ききで, 全部で120枚用いた。走査はラスタ走査と Peano 走査, そして2進走査を用いた。この実験では, Peano 走査との比較を行うために画像の一边長が2の巾になっているが, 2進走査とラスタ走査

表1 Peano 走査, 2進走査, およびラスタ走査を用いてランレングス符号化圧縮を行ったときの圧縮率の比較。数値は Peano 走査を用いたときの圧縮率を100としたときの相対比である。

| サンプル画像 | 2進走査 c_1 | ラスタ走査 c_2 |
|------------|------------|-------------|
| tree | 99.71 | 160.32 |
| boy | 102.08 | 137.21 |
| french | 102.53 | 110.90 |
| graph | 102.39 | 121.08 |
| chemical | 101.62 | 149.47 |
| camera | 103.49 | 111.73 |
| orthicon | 104.60 | 73.10 |
| bug | 101.64 | 114.99 |
| littlegirl | 101.41 | 130.24 |
| sketch | 101.84 | 121.33 |
| galley | 101.00 | 119.06 |
| table | 97.22 | 126.09 |
| english | 100.49 | 113.60 |
| pyramid | 101.01 | 97.46 |
| moji | 101.22 | 135.22 |
| mesh | 102.36 | 127.90 |
| heart | 100.78 | 132.24 |
| notebook | 101.71 | 110.13 |
| punchcard | 104.15 | 106.55 |
| narihira | 102.70 | 143.18 |
| weather | 100.87 | 113.51 |
| xerox | 102.83 | 118.66 |
| encoder | 101.53 | 116.72 |
| formula | 101.47 | 110.25 |
| equation | 100.09 | 135.72 |

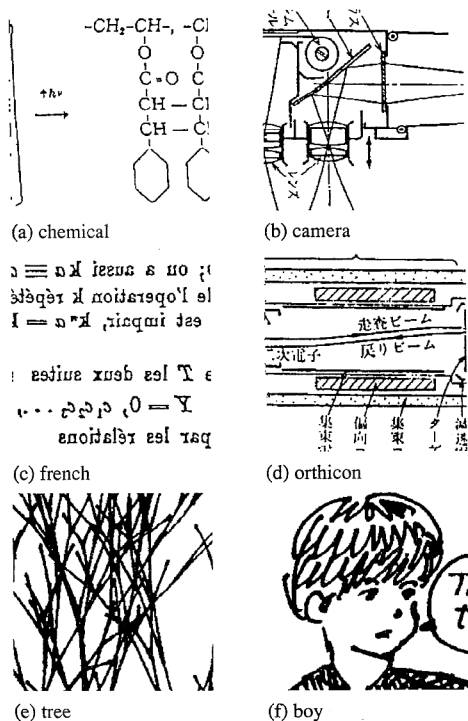


図5 ランレングス符号化圧縮に用いたサンプル画像

は本来任意の矩形画像を走査できることは言うまでもない。

表1に実験結果の一部をまとめる。2進走査は Peano 走査に対して若干劣るものの、ほぼ同じ圧縮率が得られることがわかる。また、ラスタ走査は Peano 走査よりも 10% から 20% ほど圧縮率が劣り、画像によるばらつきも大きいことがわかる。

5. 誤差分散法への応用例

ラスタ走査の順で画像に Floyd & Steinberg の誤差分散法を施すと、誤差が左から右へ、また上の行から下の行へ伝播するために、誤差の蓄積が周期的な斜め方向

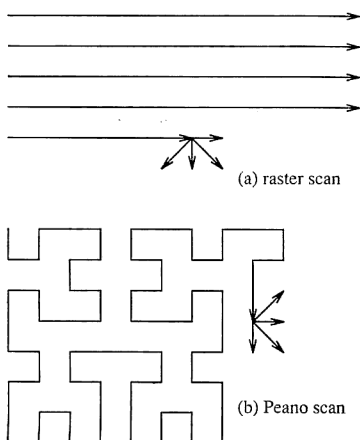


図6 誤差分散の方向

の縞模様になって現れる。これに対して Peano 走査を用いると、誤差がすべての方向にランダムに配分されるために、周期的な模様を生じない。図6はラスタ走査と Peano 走査が誤差を配分する方向を表している。図7は誤差分散法によって階調画像を2値化した例である。元画像の大きさは 512×640 で、階調数は 256 である。Peano 走査としては簡略化3進走査を用いた。

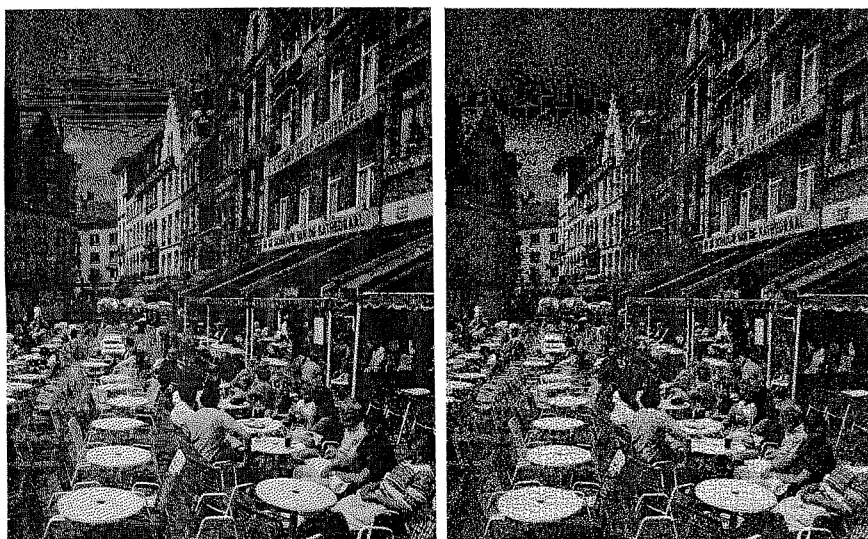
なお、誤差分散法は出力装置がディスプレイであるかレーザープリンタであるかによって、また同じレーザープリンタでもその解像度によって結果に大きな差が生じる。Peano 走査は比較的高い解像度のレーザープリンタに向いていると考えられる。

6. おわりに

フラクタルの画像処理への応用の例として Peano 走査に関して近年行われている研究を取り上げ、それらのうち画像圧縮、digital halftoning について実験結果を示した。また、Peano 走査のアルゴリズムの一般化の例として、2進走査と簡略化3進走査を示した。

文 献

- 1) W. Skarbek, T. Agui and M. Nakajima: "Software tools for Hilbert scan of large images," *IEICE Trans.*, **E72** (1989) 561-564.
- 2) W. Skarbek: "Practical algorithm for octree construction from volume data using Hilbert scan," *印刷学会誌*, **26** (1989) 258-264.



(a) ラスタ走査

(b) 簡略化3進走査

図7 誤差分散法への応用例

- 3) W. Skarbek, T. Agui and M. Nakajima: "Compression of dithered binary images using Hilbert scan," *IEICE Trans.*, **E 72** (1989) 1235-1242.
- 4) 鎌田清一郎, A. Perez, 河口英二: "2, 3次元空間におけるヒルベルト曲線の一計算法", *信学論*, **J 74-D-II** (1991) 1217-1226.
- 5) R. J. Stevens, A. F. Lehar and F. H. Preston: "Manipulation and presentation of multidimensional image data using the Peano scan," *IEEE Trans.*, **PAMI-5** (1983) 520-526.
- 6) W. J. Gilbert: "A cube-filling Hilbert curve," *Math. Intell.*, **6**, 3 (1984) 78.
- 7) 安居院猛, 永江孝規, 中嶋正之: "Peano 走査の一般化による任意の大きさの配列の走査", *TV 学会技報*, **14**, 37 (1990) 25-30.
- 8) T. Agui, T. Nagae and M. Nakajima: "Generalized Peano scans for arbitrarily-sized arrays," *IEICE Trans.*, **E 74** (1991) 1337-1342.
- 9) T. Agui, T. Nagae and M. Nakajima: "Digital halftoning using a generalized Peano scan," *Visual Commun. and Image Proc. '91: Image Proc.* (SPIE 1606, Boston, 1991) pp. 912-916.
- 10) 永江孝規, 安居院猛, 長橋 宏: "Peano 走査の一般化とハーフトーン処理への応用", *TV 学会技報*, **16**, 9 (1992) 25-30.
- 11) I. E. Witten and R. M. Neal: "Using Peano curves for bilevel display of continuous-tone images," *IEEE CG&A*, **2**, 3 (1982) 47-51.
- 12) K. M. Yang, L. Wu and M. Mills: "Fractal based image coding scheme using Peano scan," *ISCAS* (IEEE, 1988) pp. 2301-2304.
- 13) 佐藤雅也, 小松尚久: "SFC を用いた文書画像のスクランブルアルゴリズム", *信学会春季大会* (1992) D-442.