解説

フラクタル構造の光学的性質

魚住　純・朝倉　利光

北海道大学電子科学研究所　〒060 札幌市北区北12条西6丁目

(1992年10月9日受理)

Optical Properties of Fractal Structures

Jun Uozumi and Toshimitsu Asakura

Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University,
N 12 W 6, Kita-ku, Sapporo 060

1. はじめに

近年，フラクタルと呼ばれる形が科学のさまざまな分野で注目を集めている．フラクタルは，数学的には病的と言われるほど特異な性質を持っており，それゆえに時として不思議な美しさを我々に見せてくれる[1]．しかしその一方で，自然界の中のよく知られた形の多くがフラクタル的であることが知られており[2]，身近な存在でもある．この特異性と普遍性ゆえに，そしてまた非線形力学系のカオス現象との関連性が深いことからも，フラクタルは物理学や工学の対象として極めて重要な概念となってきている．

光学の分野においては，一つにはフラクタル構造と光波との出会いという観点から，もう一つにはフラクタル画像を対象とする画像技術という観点から，フラクタルに関連した研究が多く行われてきている．この解説では，前者の立場から，フラクタル構造が光波との出会いによって見せる諸現象について述べる．これらの現象は，それらから物体のフラクタル性を推定する逆問題の一つとして，あるいはフラクタル物体の光学的計測や処理に伴うノイズ特性として興味があると同時に，それが従来にない新しい場の性質であって，光計測や光情報処理などの光工学における新しい応用の可能性を秘めているという意味からも魅力のあるものである．以下では，フラクタルの定義とその性質について概観したのち，いくつかの代表的なフラクタル構造からの回折，散乱等によって生じる諸現象について解説する．

2. 自己相似性とフラクタル次元

フラクタルは，「全体と何らかの意味で相似な部分から構成される形」として定義される[3]．この「相似性」には，状況によってその度合いに違いがあり，部分を拡大したものが全体と幾何学的な意味で重なり合う幾何学的（規則的）自己相似性，それが統計的な意味を持つ統計的自己相似性，部分が全体とアフィン変換で結ばれる自己アフィン性などがある．これらの性質は，スケールの変換に対して図形ないしは関数形が保存されるという意味で，スケール不変性（スケーリング）とも呼ばれる．フラクタルには，もっと緩い意味での相似性を導入しなければ定義できないものも存在するが，光の場への影響を調べる目的からは，比較的単純なフラクタルの方が都合が良い．このため，光学においては主として自己相似性または自己アフィンなフラクタルが扱われる．

図1は，数学的に定義された規則的な自己相似フラクタルであるコッホ曲線とその生成規則を表している．イニシエータと呼ばれる図形を出発点とし，その一つの線分をその線分の長さに縮小したジェネレータで再帰的に置き換える操作を考える．置き換え操作の回数（世代あるいはレベル）を N とすると，$N=1,2,3$ に対応して図1(b)，(c)，(d)の各曲線が得られ，$N\to\infty$ の極限において厳密な意味でのコッホ曲線となる．有限レベルの図形はプレフラクタルと呼ばれ，その自己相似性はイニシエータの大きさで決まる上限とレベルに依存する下限の間にのみ存在するため，厳密にはフラクタルとは言えない．しかし，現実の自己相似構造のスケールには

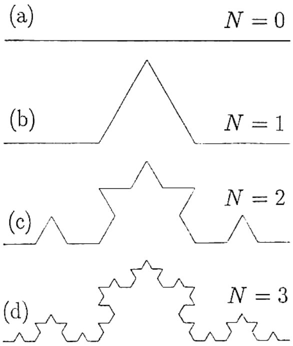

図 1　コッホ曲線の生成過程．(a)と(b)は，それぞれイニシエータとジェネレータに相当する．

常に上限と下限が存在することから，プレフラクタルは物理的フラクタルのモデルとして重要であり，多用される．

コッホ曲線を内包する最低次のユークリッド空間は平面であり，そのユークリッド次元 E は2に等しい．この意味で，コッホ曲線は2次元フラクタルと呼ばれることがある．さて，上述の生成規則から明らかなように，イニシエータの長さを1とすると，レベル N のコッホ曲線の長さ（1次元測度）は $L=(4/3)^N$ であり，これは $N\to\infty$において発散する．一方，その面積（2次元測度）はゼロである．この奇妙な性質は次元の概念を非整数に拡張したフラクタル次元 D を用いることによって定量的に表現することができる．フラクタル次元には，Hausdorff-Besicovitch 次元，相似性次元，質量次元などいくつかの異なる定義があるが，それらの値は多くの場合一致するかまたは極めて近い値になることが知られている[1-3]．

自己相似フラクタルでは，ジェネレータの形から相似性次元が決まる．ジェネレータの差し渡しの長さを1とすると，それが長さ $1/\mu$ の線分 m 個で構成されているとき，生成されるフラクタルの相似性次元は $D=\log m/\log \mu$ となる．図1のコッホ曲線の場合，$\mu=3$, $m=4$ であるから，$D=\log 4/\log 3\sim 1.2619$ となり，この図形の空間的広がりが1次元と2次元の中間的なものであることがわかる．

3.　質量フラクタルとフラクタル表面

コロイド粒子の凝集や拡張制限凝集過程（DLA, diffusion-limited aggregation）によって生じる凝集体はフラクタルであることが知られており[3,4]，光波以外にもX線や中性子線による散乱の研究が盛んである．このようなフラクタル凝集体では，ある点を中心として半径 r の球内に含まれる全質量 $M(r)$ は，

$$M(r)\propto r^D \qquad (1)$$

というスケール不変なべき関数となる．このようなフラクタルは質量フラクタルと呼ばれ，(1)式によって定義される D は質量次元と呼ばれる．フラクタル凝集体は統計的自己相似フラクタルであって，規則的自己相似フラクタルであるコッホ曲線も，その上に一様密度の質量分布を仮定すると，その規則性に対応した離散的な r においては(1)式の関係を満たしている．

質量フラクタルでは，Δr だけ離れた2点間の質量密度の相関関数 $R(\Delta r)$ は

$$R(\Delta r)\propto \Delta r^{D-E} \qquad (2)$$

の関係を満たしている[2]．このような物体に波動が入射すると，凝集体を構成する個々の粒子が2次波源となり，物体の直後の波動場にも(2)式の相関が備わることになる．したがって，多重散乱を無視するならば，遠方界での散乱強度 $I(q)$ は(2)式のフーリエ変換で与えられ，

$$I(q)\propto q^{-D} \qquad (3)$$

となる．ここで，q は散乱ベクトル $\boldsymbol{q}$ の絶対値である．この性質は，凝集体のフラクタル次元を測定する手法としてしばしば用いられる[3,4]．ただし，物体のフラクタル性は上限 L と下限 l の間の有限なスケール範囲にのみ現れるため，(3)式が成り立つのは $1/L\ll q\ll 1/l$ の範囲だけである．これよりも小さな $q<1/L$ は Guinier 領域と呼ばれ，そこでは $I(q)$ の曲線は飽和する(図 2)[4,5]．

さて，散乱体が3次元的に密に充填されていて，外部との境界面がフラクタル次元 D_s のフラクタルとなっている場合を考えてみる．そのような物体からの散乱はフラクタル面散乱と呼ばれ，その散乱強度は

$$I(q)\propto q^{-(2E-D_s)} \qquad (4)$$

で与えられる[5-8]．境界面がフラクタルではない場合には，$D_s=2$, $E=3$ より $I(q)=q^{-4}$ が導かれる．これは

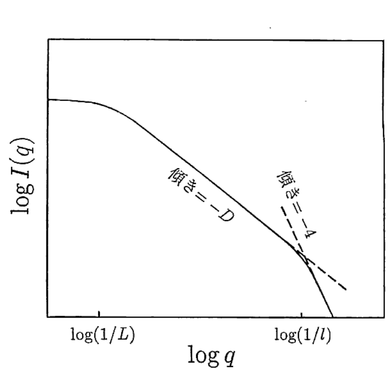

図 2　質量フラクタルからの散乱強度分布の模式図

Porodの法則と呼ばれ，フラクタル凝集体からの散乱において，$q>1/l$ の領域での振舞いがこの式で説明される（図2）．

では，さらに一般的な場合として，質量次元 D_{m} の質量フラクタルが面フラクタル次元 D_{s} のフラクタル面を境界面として持つときはどうであろうか．具体的には，多孔質性の質量フラクタルが粉砕によってフラクタル表面を持つような場合がこれに相当する．このような場合の散乱強度については幾つかの議論があるが[5,9,10]，Wong ら[10]は最近

$$I(q)\propto q^{-D_{\mathrm{m}}}[1+\alpha(qL)^{-(E-D_{\mathrm{s}})}] \qquad (5)$$

という関係を提案している．ただし，α は D_{m} と D_{s} に依存する定数である．この式は，適当な条件の下で（3）式や（4）式に一致するが，一般には $1/L\ll q\ll 1/l$ の領域でも $I(q)$ の両対数グラフは直線にはならないことがわかる．

このほか，多重散乱[11-15]を考慮に入れた考察もなされている．特に，強い多重散乱体では，光におけるアンダーソン局在としての後方散乱エンハンスメントに興味が持たれる．フラクタル散乱体では，フラクタル粗面[14]およびフラクタル凝集体[15]について，後方散乱エンハンスメントが報告されており，散乱体のフラクタル性を反映して，非フラクタル散乱体の場合とは異なる強度ピーク形状が観測されている[15]．

4.　フラクタル開口

フラクタル的な空間分布を持つ開口による回折現象も興味深い問題である．開口がランダムフラクタルの場合は，2次元的に広がった質量フラクタルによる散乱とほぼ等価なものと考えることができる．これに対し，規則的な自己相似フラクタル（フラクタル格子）では，現象はもう少し複雑である．開口面での振幅透過率を $A(\boldsymbol{x})$ で表すと，開口の自己相似性は，

$$A(\boldsymbol{x})=A(\mu\boldsymbol{x}) \qquad (6)$$

で表される．（6）式をフーリエ変換することにより，フラウンホーファ領域での強度分布 $I(\boldsymbol{q})$ として，

$$I(\boldsymbol{q})\propto\mu^{-2E}I(\boldsymbol{q}/\mu) \qquad (7)$$

を得る．すなわち，フラウンホーファ回折場の強度分布もスケール不変であって，それが，視覚的には回折パターンの自己相似性として認識される．実際には，物体の自己相似性には図形の拡大だけでなく平行移動や回転が伴っており，（6）式のように簡単には表せない．しかし，1次元フラクタルであるカントール集合[16,17]，2次元フラクタルのコッホ曲線[18]，シェルピンスキーのガスケット[19]やカーペット[20]，3次元フラクタルのメンガースポンジ[21]など，各種の規則的自己相似フラクタルについて，そのフラウンホーファ回折像が実際に規則的自己相似フラクタルとなることが理論と実験により確かめられている．

図3は正三角形のイニシエータ上に生成したコッホ曲線のフラウンホーファ回折像である[18,22]．ランダムフラクタルの回折像（（3）式）とは異なって，強い強度ピークが規則的に配置しており，光軸を中心とする規則的な自己相似性ないしはスケール不変性が認められる．この強度分布について，自己相似のスケーリング係数 $\mu=3$ を考慮に入れた円環状の帯域平均強度を計算すると，（3）式の関数にほぼ一致する．したがって，半径 q の円内の積分強度は q^{E-D} に比例するから，強度分布を質量分布に置き換えれば，この回折像の質量次元は（1）式より $E-D$ となることがわかる[22,23]．Chabassier ら[24]は最近，この関係について理論的な考察を行っている．

開口が規則性を失い，徐々にランダムなゆらぎを伴いはじめると，回折場のフラクタルも次第に崩れ始める．図3に見られるような鋭い強度ピークは，物体の各点に由来する非常に多数の平面波（その角度スペクトルはフラクタル的に分布している）の干渉の結果であるから，その強さは物体のゆらぎに極めて敏感であり，ゆらぎの増大と共に急速に崩れてゆく．その結果，回折場の規則的なフラクタル構造はランダムなスペックルパターンへと変化し，その平均強度は最終的に（3）式のべき関数となる[25]．この状態では，物体のフラクタル性を反映しているのは回折場の平均強度のみであり，そこに含ま

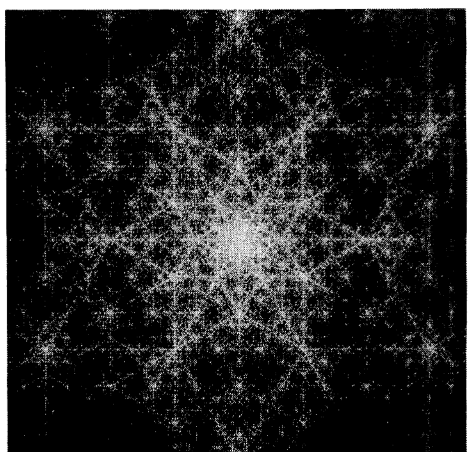

図 3　正三角形のイニシエータ上に生成したレベル5のコッホ曲線のフラウンホーファ回折パターン

れるスペックルはスリガラスなどの通常の散乱体から生じるスペックルと同様に zero-mean circular complex Gaussian 統計に従い，いわゆる fully-developed speckle になることが計算機シミュレーションの結果から明らかとなっている[26,27]．

フラクタル開口のフレネル回折場の性質については報告は少ないが，カントール集合状の開口について数値計算を行った結果では，フレネル領域には2種類のスケール不変性が現れることがわかっている[28,29]．その一つはフラウンホーファ領域に現れる上述のスケール不変性であって，フレネル領域の光軸に垂直な面内においてもそれが不完全ながら現れ，物体面に近づくに従って次第に崩壊して行く[28]．

さらに，開口関数 $A(x)$ にスケール不変性を仮定して，そのフレネル変換を求めると，

$$U(\xi,\tau)\propto U(\xi/\mu,\tau/\mu^2) \qquad (8)$$

で表される第二のスケール不変性が導かれる[29]．ただし，$\tau=\lambda z/a^2$ であり，z および ξ はそれぞれ光軸および観測面の座標，a は開口の幅，λ は照射光の波長である．この式は，ある観測面における場の複素振幅が，それより $1/\mu^2$ 倍の距離にある場を μ 倍に拡大したものと相似であることを示している．このことはフレネル領域内の任意の τ について成り立つから，フレネル場が全体として3次元的なスケール不変性を示すことを表している．図4は，フレネル領域の光軸を含む子午面内の強度分布を計算により求めたもので，(a)と(b)は(8)式のスケール関係を満たすように座標を取ってある．この表示では細かな強度変動は分解できないが，全体的な場の相似性は確認できよう．

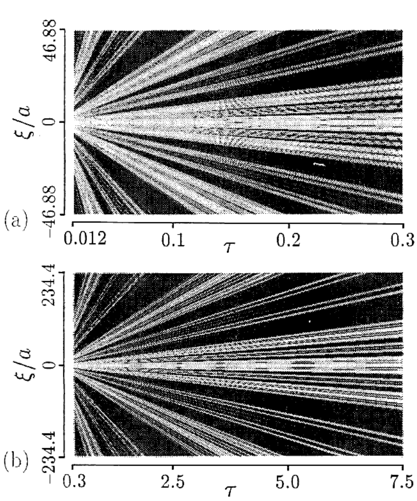

図 4　レベル5の5分割カントール集合 ($\mu=5$, $m=3$) で表される開口によるフレネル回折場の子午面内における強度分布．(a)と(b)の座標軸は，式(8)のスケール関係を満たすようにとってある．

開口がフラクタル性を伴う場合のもう一つの例として，開口周囲の境界の形状がフラクタルとなる場合がある．これは，仕上げの不良などによって不規則な境界を持つ開口のモデルとして興味深く，Beal ら[30]や Kim ら[31]による解析と実験がある．これに対して，Chabassier ら[24]は，この問題を2次元におけるフラクタル面散乱として捉え，フラウンホーファ領域での強度分布が(4)式で表されることを示している．

5.　フラクタル多層膜

多層膜構造は，誘電体ミラーや超格子など重要な応用分野をもつ構造であり，フラクタルな多層膜の光学的特性についても興味が持たれる．多層膜は基本的に1次元構造であるため，ある誘電率の誘電体の中にそれとは異なる誘電率を持つ物質がカントール集合状に配列している多層膜について，その透過・反射特性が詳しく調べられている[32-36]．規則的自己相似フラクタルを用いると，その再帰的生成規則に対応した再帰的な計算法により，単一層の透過率と反射率から多層膜全体の透過率と反射率を導出することができる[34,35]．その結果，膜の透過および反射スペクトルにも自己相似構造が現れ，反射率がほぼ1の波長とほぼ0の波長がフラクタル的に分布することなどが導かれる．このほか，Konotop ら[37]は，誘電率ゆらぎが Weierstrass 関数で記述される1次元フラクタル膜の透過率を摂動法により求め，フラクタル構造からの透過率への寄与が入射光の波数 k に対して k^{D-2} に比例して変化することを示している．

6.　フラクタル位相スクリーン

位相スクリーンは，光を散乱するランダム媒質のモデルとして代表的なものの一つであり，粗面によるスペックルの統計理論をはじめ，多くの分野で重要な役割を果たしている．フラクタル性を備えた位相スクリーンについては，Berry[38]が最初にその概念を明示的に導入して以来，活発な研究が行われ[39-51]，散乱場の性質が次第に明らかになってきている．Berry[38,39]は，フラクタルに遭遇した波動を“diffractal”と名付け，その代表例として非整数ブラウンフラクタルと呼ばれる自己アフィンフラクタルによって記述される位相スクリーンからの散乱場を解析した．その結果，非フラクタルな強い位相スク

リーン ($D=1$) の場合に生じるようなフレネル領域での強度変動の極大現象が, $1.5\leq D<2$ のフラクタルスクリーンでは生じないこと[38]や, パルス状の準単色光がそのような粗面で反射されると, $\tau^{-(3-D)}$ で表されるテールの長いエコーを発生すること[39]などを示している. また, Jakeman[40-43] によれば, 面の傾斜が非整数ブラウンフラクタルとなる粗面 (サブフラクタル) の場合, 散乱場の強度は, 代表的な非ガウス的スペックル場の強度の密度である K-分布に従って変動する.

7. おわりに

フラクタルからの回折・散乱場にはさまざまなべき法則や自己相似構造が現れることを示してきた. これらの現象は, 光などの波動が種々の物体のフラクタル性を非接触に探るプローブとなり得ることを意味しているが, その適用に際しては種々の問題が伴うことも認識する必要がある. たとえば, (3)式の関係はフラクタル次元の測定にしばしば用いられるが, この方法の場合, $1/L<q<1/l$ においてもその両端の cross-over 領域ではべき法則からのずれが生じることや, フラクタルの持つ空隙性 (lacunarity) によるべき関数のゆらぎがあること, 物体が非フラクタル的ノイズを伴う場合にはべき関数に歪みが生じるなどの問題を指摘することができる[52].

物体がさらに複雑なフラクタル構造を持つ場合, その光学的性質についての十分な研究は行われていない. たとえば, フラクタル次元が空間的に分布するマルチフラクタルに対しては, 散乱場の強度分布 (パワースペクトル) は全体の平均的な次元しか与えない. このような場合には, 光学的ウェーブレット変換[53,54]のようなより積極的な光情報処理が必要になるものと思われる. なお, フラクタル解析におけるパワースペクトルとウェーブレット変換の比較については, この特集にも紹介されている. また, フラクタル次元測定における上述の問題点に対処する一つの方法として, パワースペクトルによる方法と相補的な関係にある光学的自己相関処理によるフラクタル次元の測定[55,56]や, 光学的処理の実現は容易ではないものの, バイスペクトル解析によるノイズの影響の除去[57]なども試みられている.

フラクタル構造によって生じる自己相似な光の場は, 新しい光学素子や光計測法への応用を予感させるものの, 具体的な提案はまだない. その一つの理由として, 自己相似な光の場やべき関数的な強度分布を定量的に把握するには, 空間周波数や感度の面でダイナミックレンジの広い計測法や処理法が必要となることなどが挙げられよう. しかし, このこと自体が "diffractal" の優れた特徴であり, それを活かした光学技術の開発が期待される.

文　献

1) B. B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, 1982) (フラクタル幾何学, 広中平祐監訳 (日経サイエンス社, 1984)).
2) 高安秀樹: フラクタル (朝倉書店, 1986).
3) J. Feder: *Fractals* (Plenum, New York, 1988) (フラクタル, 松下　貢, 早川美徳, 佐藤信一訳 (啓学出版, 1991)).
4) T. Vicsek: *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1989) (フラクタル成長現象, 宮島佐介訳 (朝倉書店, 1990)).
5) S. K. Sinha: "Scattering from fractal structures," Phys. D, **38** (1989) 310–314.
6) J. K. Kjems and P. Schofield: "Neutron and X-ray studies of interfaces," *Scaling Phenomena in Disordered Systems* (*NATO ASI Series B vol. 133*), ed. R. Pynn and A. Skjeltorp (Plenum, 1985) pp. 141–149.
7) H. D. Bale and P. W. Schmidt: "Small-angle X-ray-scattering investigation of submicroscopic porosity with fractal properties," Phys. Rev. Lett., **53** (1984) 596–599.
8) A. J. Hurd, D. W. Schaefer, D. M. Smith, S. B. Ross, A. Le Méhauté and S. Spooner: "Surface areas of fractally rough particles studied by scattering," Phys. Rev. B, **39** (1989) 9742–9745.
9) P.-Z. Wong: "Scattering by inhomogeneous systems with rough internal surfaces: Porous solids and random-field Ising systems," Phys. Rev. B, **32** (1985) 7417–7424.
10) P.-Z. Wong and Q.-Z. Cao: "Correlation function and structure factor for a mass fractal bounded by a surface fractal," Phys. Rev. B, **45** (1992) 7627–7632.
11) M. V. Berry and I. C. Percival: "Optics of fractal clusters such as smoke," Opt. Acta, **33** (1986) 577–591.
12) J. Frey, J. J. Pinvidic, R. Botet and R. Jullien: "Light scattering by fractal aggregates: a numerical investigation," J. Phys. (France), **49** (1988) 1969–1976.
13) J. Nelson: "Test of a mean field theory for the optics of fractal clusters," J. Mod. Opt., **36** (1989) 1031–1057.
14) D. L. Jordan and F. Moreno: "Optical backscattering measurements from fractal surfaces and their possible relevance to radar scattering from the sea surface," Waves in Random Media, **2** (1992) 29–38.
15) A. K. Dogariu, J. Uozumi and T. Asakura: "Enhancement of the backscattered intensity from fractal aggregates," Waves in Random Media (to be published).
16) C. Allain and M. Cloitre: "Optical diffraction on fractals," Phys. Rev. B, **33** (1986) 3566–3569.
17) T. Megademini and B. Pardo: "Diffraction de Fraunhofer dans un discontinuum de Cantor," J. Opt., **18** (1987) 213–217.
18) J. Uozumi, H. Kimura and T. Asakura: "Fraunhofer diffraction by Koch fractals," J. Mod. Opt., **37**

(1990) 1011-1031.
19) A. Lakhtakia, N.S. Holter, V.K. Varadan and V.V. Varadan: "Self-similarity in diffraction by a self-similar fractal screen," IEEE Trans. Ant. Prop., **35** (1987) 236-239.
20) C. Allain and M. Cloitre: "Spatial spectrum of a general family of self-similar arrays," Phys. Rev. A, **36** (1986) 5751-5757.
21) P.W. Schmidt and X. Dacai: "Calculation of the small-angle x-ray and neutron scattering from non-random (regular) fractals," Phys. Rev. A, **33** (1986) 560-566.
22) 魚住　純，木村浩行，朝倉利光："一般化されたコッホ曲線によるレーザ回折"，統計数理，**38** (1990) 223-241.
23) J. Uozumi, H. Kimura and T. Asakura: "Fraunhofer diffration by Koch fractals: the dimensionality," J. Mod. Opt., **38** (1991) 1335-1347.
24) G. Chabassier, B. Angéli, F. Héliodore and A. Le Méhauté: "Optical wave diffraction on fractal objects," Pure Appl. Opt., **1** (1992) 41-53.
25) J. Uozumi, H. Kimura and T. Asakura: "Laser diffraction by randomized Koch fractals," Waves in Random Media, **1** (1991) 73-80.
26) J. Uozumi, K. Uno and T. Asakura: "Statistical properties of Fraunhofer diffraction field produced by random self-similar fractals," *ICO Topical Meeting on Atmospheric, Volume and Surface Scattering and Propagation* (ICO, Florence, 1991) pp. 163-166.
27) 鵜野克宏，魚住　純，朝倉利光："ランダムなフラクタルによる回折場の統計的特性—非フラクタル物体との比較"，光学連合シンポジウム京都 '92 講演予稿集，Bp 09 (1992).
28) Y. Sakurada, J. Uozumi and T. Asakura: "Fresnel diffraction by one-dimensional regular fractals," Pure Appl. Opt., **1** (1992) 29-40.
29) 櫻田安志，魚住　純，朝倉利光："規則的フラクタルによるフレネル回折場の特性 (III)—場のスケーリング則について—"，第53回応用物理学会学術講演会予稿集，16pN 6 (1992).
30) M.M. Beal and N. George: "Features in the optical transforms of serrated apertures and disks," J. Opt. Soc. Am. A, **6** (1989) 1815-1826.
31) Y. Kim, H. Grebel and D. L. Jaggard: "Diffraction by fractally serrated apertures," J. Opt. Soc. Am. A, **8** (1991) 20-26.
32) T. Megademini: "Principles and possibilities of interferential multilayer mirrors of nonintegral dimensionality," Phys, Rev. B, **41** (1990) 4693-4699.
33) T. Megademini: "Fourier transform and theory of fractal multilayer mirrors," Opt. Commun., **80** (1991) 312-316.
34) D.L. Jaggard and X. Sun: "Reflection from fractal multilayers," Opt. Lett., **15** (1990) 1428-1430.
35) X. Sun and D. L. Jaggard: "Wave interactions with generalized Cantor bar fractal multilayers," J. Appl. Phys., **70** (1991) 2500-2507.
36) V.V. Konotop, O.I. Yordanov and I.V. Yurkevich: "Wave transmission through a one-dimensional Cantor-like fractal medium," Europhys. Lett., **12** (1990) 481-485.
37) V.V. Konotop: "Transmission coefficient of a fractal layer," Phys. Rev. A, **43** (1991) 1352-1357.
38) M.V. Berry: "Diffractals," J. Phys. A: Math. Gen., **12** (1979) 781-797.
39) M. V. Berry and T. M. Blackwell: "Diffractal echoes," J. Phys. A: Math. Gen., **14** (1981) 3101-3110.
40) E. Jakeman: "Scattering by a corrugated random surface with fractal slope," J. Phys. A: Math. Gen., **15** (1982) L55-L59.
41) E. Jakeman: "Fresnel scattering by a corrugated random surface with fractal slope," J. Opt. Soc. Am., **72** (1982) 1034-1041.
42) E. Jakeman: "Fraunhofer scattering by a sub-fractal diffuser," Opt. Acta, **30** (1983) 1207-1212.
43) J.G. Walker and E. Jakeman: "Observation of sub-fractal behaviour in a light-scattering system," Opt. Acta, **31** (1984) 1185-1196.
44) D.L. Jordan, R.C. Hollins and E. Jakeman: "Experimental measurements of non-Gaussian scattering by a fractal diffuser," Appl. Phys. B, **31** (1983) 179-186.
45) D.L. Jordan, R.C. Hollins and E. Jakeman: "Infared scattering by a fractal diffuser," Opt. Commun., **49** (1984) 1-5.
46) D.L. Jaggard and Y. Kim: "Diffraction by band-limited fractal screens," J. Opt. Soc. Am. A, **4** (1987) 1055-1062.
47) Y. Kim and D.L. Jaggard: "Optical beam propagation in a band-limited fractal medium," J. Opt. Soc. Am. A, **5** (1988) 1419-1426.
48) D.L. Jaggard and X. Sun: "Scattering from band-limited fractal fibers," IEEE Trans. Ant. Prop., **37** (1989) 1591-1597.
49) D.L. Jaggard and X. Sun: "Scattering from fractally corrugated surfaces," J. Opt. Soc. Am. A, **7** (1990) 1131-1139.
50) X. Sun and D.L. Jaggard: "Wave scattering from non-random fractal surfaces," Opt. Commun., **78** (1990) 20-24.
51) P.-Z. Wong and A.J. Bray: "Scattering by rough surfaces," Phys. Rev. B, **37** (1988) 7751-7758.
52) A. ドガリウ，魚住　純，朝倉利光："光学的方法によるフラクタル次元の実験的評価の限界"，第52回応用物理学会学術講演会予稿集，9 aZP 2 (1991).
53) J.F. Muzy, B. Pouligny, E. Freysz, F. Argoul and A. Arneodo: "Optical-diffraction measurement of fractal dimensions and $f(\alpha)$ spectrum," Phys. Rev. A, **45** (1992) 8961-8964.
54) A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, E. Freysz, G. Grasseau, J.G. Muzy and B. Pouligny: "Wavelets, fractals and turbulence—wavelet transform of fractals," *Wavelets and Applications*, ed. Y. Meyer (Masson, 1992) pp. 285-352.
55) C.-K. Lee and F.C. Moon: "An optical technique for measuring fractal dimensions of planar Poincaré maps," Phys. Lett., **114 A** (1986) 222-226.
56) A. ドガリウ，魚住　純，朝倉利光："相関関数を用いたフラクタル次元の光学的評価"，第52回応用物理学会学術講演会予稿集，9 aZP 1 (1991).
57) 和田尚也，魚住　純，朝倉利光："雑音を伴うカントール集合のバイスペクトル解析"，第53回応用物理学会学術講演会予稿集，16 pN 8 (1992).