

解説

不均質媒質を用いた光学系の設計

植田 博文・山本 公明

オリンパス光学工業(株)諸隈研究室 〒192 八王子市久保山町 2-3

(1992年11月26日受理)

Design of Optical Systems that Use GRIN Materials

Hirofumi TSUCHIDA and Kimiaki YAMAMOTO

T. Morokuma Research Laboratory, Olympus Optical Co., Ltd.,
2-3, Kuboyama-cho, Hachioji 192

1. はじめに

不均質媒質 (GRIN materials) は, 光学系の設計に新たな自由度を付加するので, レンズ枚数の削減や光学性能の向上に大きな効果が期待でき, 近年関連する多くの研究が行われてきている. 古いところでは 1854 年の Maxwell のフィッシュアイ¹⁾や 1905 年の Wood によるゼラチンを用いた実験²⁾ などが有名であるが, 近年における不均質光学系の発展は, 1968 年の日本板硝子と日本電気の共同によるセルフオックレンズの開発³⁾ に端を発していると思われる. 不均質レンズ系の理論的研究は, 1970 年代初めの Sands による収差論的研究⁴⁻⁸⁾ によって大きく進展した. そして, その後の Marchand や Sharma らによる理論研究^{9,10)} や Moore らによる設計, 製作, 測定にわたる精力的研究¹¹⁻¹³⁾ により, 実用面も含むより総合的, 体系的なものとして進歩してきている.

不均質レンズを光学レンズとして用いる場合, その光学的潜在能力を十分に利用し単体で用いる場合と, 高度な収差補正やレンズ枚数の削減効果を狙って組み合わせレンズ中の一要素レンズとして用いる場合の二とおりがある. 前者には, コピー機用のアレーレンズ¹⁴⁾, 硬性鏡用のリレーレンズ¹⁵⁾, 光ファイバ用の結合レンズ¹⁶⁾, 光ピックアップ用レンズ^{17,18)} 等既に実用化されているものが多く, 解説^{19,20)} も多く存在する. したがって, ここでは主に後者の場合につき, 光学設計に係わる基本的な事項について述べてみたい. なお, 組み合わせレンズのような複雑な光学系では, アキシャル型およびラジアル型

不均質レンズの使用が期待されるので, 主にこれらのレンズに絞って解説する.

2. 不均質光学設計に係わる基本量

2.1 不均質レンズの屈折率分布表現

回転対称な不均質媒質の屈折率分布は, 一般的に次のような多項式で表すことができる.

$$N(x, r) = N_0(x) + N_1(x)r^2 + N_2(x)r^4 + \dots \quad (1)$$

$$N_i(x) = N_{i0} + N_{i1}x + N_{i2}x^2 + \dots \quad (2)$$

ここで, x は光軸方向の距離, r は光軸から垂直方向の距離, また N_{ii} は屈折率分布係数である.

アキシャル型不均質レンズは, 図 1(a) に示されるようにレンズの光軸方向に屈折率分布を持ち, (1)式において $N_i(x) = 0$ ($i \geq 1$) の場合に相当する. 等屈折率面は光軸に垂直な平面となり, 屈折率分布 $N_a(x)$ は次式で与えられる.

$$N_a(x) = N_{00} + N_{01}x + N_{02}x^2 + \dots \quad (3)$$

ラジアル型不均質レンズは, 図 1(b) に示されるように光軸に垂直な方向に屈折率分布を持ち, (1)式において $N_i(x) = \text{定数}$ の場合に相当する. 等屈折率面は光軸を中心としたシリンダー状となり, 屈折率分布 $N_r(r)$ は次式で示される.

$$N_r(r) = N_{00} + N_{10}r^2 + N_{20}r^4 + \dots \quad (4)$$

2.2 不均質レンズの近軸特性⁶⁾

光学設計において近軸量の設定が最初に必要となるが, 不均質媒質中における近軸光線高 $y(x) \equiv y'$ および近軸光線角度 $u(x) \equiv u'$ は一般的に次式によって決定される.

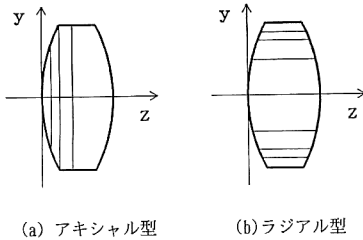


図1 アキシャル型およびラジアル型不均質レンズ

$$u(z) = \frac{dy(z)}{dz} \tag{5}$$

$$2N_1(z)y(z) = \frac{d}{dz} \{N_0(z)u(z)\} \tag{6}$$

ここで、 $u(z)$ の符号は第1象限の角度を正とする通常の幾何学に従う。(5)、(6)式に(3)式を適用すると、アキシャル型不均質媒質の近軸光線追跡式は、次式となる。

$$\begin{pmatrix} y' \\ N_0' u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^z \frac{ds}{N_0(s)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ N_0 u \end{pmatrix} \tag{7}$$

ここで、 $u = u(0)$ 、 $y = y(0)$ である。ラジアル型不均質媒質の近軸光線追跡式は、(4)~(6)式から同様に計算され、 $N_{10} < 0$ のとき次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} y' \\ N_{00} u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha z & \frac{\sin \alpha z}{N_{00} \alpha} \\ \frac{2N_{10} \sin \alpha z}{\alpha} & \cos \alpha z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ N_{00} u \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\alpha^2 = \left| \frac{2N_{10}}{N_{00}} \right| \tag{9}$$

$N_{10} > 0$ に対する近軸光線追跡式は、(8)式で次のような変換を行ったものとなる。

$$\cos \alpha z \rightarrow \cosh \alpha z, \quad \sin \alpha z \rightarrow \sinh \alpha z \tag{10}$$

(7)式からアキシャル型媒質中では、近軸光線はほとんど屈曲しないことがわかる。また、よく知られているように、(8)式から $N_{10} < 0$ の場合にラジアル型媒質中で近軸光線は正弦波状に蛇行しながら進むことがわかる。

2.3 不均質レンズの収差係数^{4),21)}

収差係数は、光学特性を理解する上で不可欠である。不均質媒質を用いたレンズ系の3次収差係数は、(1)面の寄与と(2)光線が不均質媒質中を通過するとき発生する媒質による寄与からなっている。また、面での寄与は(1a)ベースの屈折率による通常(均質系)の面の寄与と(1b)不均質部分による補正量からなっており、全体の収差は(1a)、(1b)および(2)の都合三つの和で構成される。一般性を持つ収差係数の具体的な計算式を

以下にまとめて記載する。

$$\sigma_i = -\frac{1}{n u a_k'} \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} + \sum_{j=1}^k a_{ij}^* \right) \quad (i=1, \dots, 5) \tag{11}$$

$$a_1 = \mathbf{a} + \kappa y a^4 \tag{12}$$

$$a_2 = q \mathbf{a} + \kappa y a^3 y_b \tag{13}$$

$$a_3 = q^2 \mathbf{a} + \kappa y a^2 y_b^2 \tag{14}$$

$$a_4 = \frac{1}{2} H^2 C \Delta \left(\frac{1}{N_0} \right) \tag{15}$$

$$a_5 = q^2 \mathbf{a} + q a_4 + \kappa y a y_b^3 \tag{16}$$

$$a_1^* = \frac{1}{2} \mathcal{F} (N_0 y a u a'^3) + \int_0^t \left(4N_{20} y a^4 + 2N_{10} y a^2 u a'^2 - \frac{1}{2} N_{00} u a'^4 \right) dz \tag{17}$$

$$a_2^* = \frac{1}{2} \mathcal{F} (N_0 y a u a'^2 u_b') + \int_0^t \left\{ 4N_{20} y a^3 y_b + N_{10} y a u a' (y_a u_b' + y_b n a') - \frac{1}{2} N_{00} a'^3 u_b' \right\} dz \tag{18}$$

$$a_3^* = \frac{1}{2} \mathcal{F} (N_0 y a u a' u_b'^2) + \int_0^t \left(4N_{20} y a^2 y_b^2 + N_{10} y a y_b u a' u_b' - \frac{1}{2} N_{00} a'^2 u_b'^2 \right) dz \tag{19}$$

$$a_4^* = H^2 \int_0^t \frac{N_{10}}{N_0^2} dz \tag{20}$$

$$a_5^* = \frac{1}{2} \mathcal{F} (N_0 y a u u_b'^3) + \int_0^t \left\{ 4N_{20} y a y_b^3 + N_{10} y_b u_b' (y_a u_b' + y_b u_a') - \frac{1}{2} N_{00} a' u_b'^3 \right\} dz \tag{21}$$

$$\mathbf{a} = \frac{N_0}{2} \left(\frac{N_0}{N_0'} - 1 \right) y a i_a^2 (i_a + u_a') \tag{22}$$

$$\kappa = -C \Delta \left\{ 2N_{10} + \frac{1}{2} C \left(\frac{dN_0}{dz} \right) \right\} \tag{23}$$

$$H = N_0 (y_b u_a' - y_a u_b') \tag{24}$$

$$q = \frac{i_b}{i_a} \tag{25}$$

ここで、 j は面番号、 k は総面数、 σ_i はザイデルの5収差を表す収差係数、 a_{ij} は j 面における通常の面の寄与と不均質の面の寄与の和、 a_{ij}^* は j 面における媒質の寄与、 n_k および u_{ak}' はそれぞれ最終面以後の屈折率およびマージナル光線の角度、 H はラグランジュの不変量、 C はレンズの曲率、 i_a, i_b はそれぞれ近軸マージナル光線および近軸主光線の入射角度、 Δ および \mathcal{F} はそれぞれ光線の面での屈折前後および媒質中の伝播開始、終了前後における諸量の差を表す。

表 1 図 2 におけるアキシャル型レンズの収差係数と非球面で置換後の収差係数

		SA	COMA	AS	DIT	PAC	PLC	備考
アキシャル型 レンズ	媒質	0.0000	-0.0006	0.0026	-0.0340	0.0006	-0.0081	$\Delta n=0.023$
	面	0.1640	0.2574	0.0449	0.0235	—	—	
非球面レンズ	面	0.1679	0.2638	0.0460	0.0241	—	—	$\Delta x=0.034$

3. アキシャル型不均質ガラスを用いた レンズ系の設計

3.1 近軸特性

アキシャル型レンズでは、(7)式からもわかるように媒質自体には屈折力はない。したがって、レンズ単体の屈折力は薄いレンズの場合、面の屈折力のみで決まると考えてよく、両側が空気の場合、その屈折力 ϕ_a は次式で与えられる。

$$\phi_a = (N_a(0) - 1)c_1 + (N_a(t) - 1)c_2 \quad (26)$$

ここで、 c_1, c_2 はそれぞれレンズ第 1 面および第 2 面の曲率、また t はレンズの厚みを示す。 $N_a(0)$ と $N_a(t)$ は通常それ程大きく相違しないので、(26)式からアキシャル型レンズの屈折力はベース屈折率 N_{00} をもつ均質系のそれとほとんど同等であることがわかる。

近軸色収差も面で発生するものと媒質中で発生するものの和で与えられるが、屈折率分布の近軸的な影響がもともと小さいことより、屈折率分布の近軸色収差への影響は多くの場合小さなものとなる。

3.2 3 次収差特性

屈折率分布が近軸色収差に与える影響が通常無視できる量になるので、実際のレンズ設計では、主に単色の収差に対する屈折率分布の寄与を検討すればよい。この寄与は、面および媒質中それぞれにおいて存在するが、アキシャル型レンズでは媒質中での光線の屈曲は小さいので、媒質による寄与は多くの場合小さなものとなる。したがって、屈折率分布による面での補正量が重要となる。この量は(12)~(16)式のパラメータ κ を通し影響を受けるが、アキシャル型レンズにおける κ は次式で示される。

$$\kappa = -\frac{C^2}{2} \Delta \left\{ \frac{dN_a(z)}{dz} \right\} \quad (27)$$

(27)式からわかるように、アキシャル型レンズの屈折率分布効果は $dN_a(z)/dz$ つまり面における屈折率分布の勾配に依存する。光軸方向の分布勾配 $dN_a(z)/dz$ があまり変化せずに単調に続く場合、(27)式から面の曲率に関係なくレンズ前面と後面での寄与が逆符号になり、効果を相殺してしまうので注意を要する。アキシャル型レ

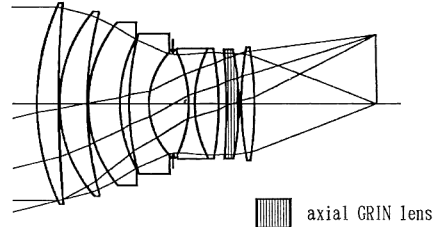


図 2 アキシャル型レンズを用いた設計例
($f=85$ mm, $F/1.4$, $2\omega=28.5^\circ$)

ンズがさらに非球面形状をもつ場合、その光学的効果は(27)式の κ にさらに非球面の寄与が独立に加わる形となる。すなわち、アキシャル型レンズの屈折率分布は均質系の非球面と同等の収差補正効果を持つと考えることができる。なお、アキシャル型レンズの屈折率分布がベッツパール和におよぼす寄与は非球面と同様にゼロである。

3.3 レンズ系の設計例

アキシャル型レンズを用いた設計例²²⁾を図 2 に示す。これは、カメラ用の大口徑望遠レンズの例であるが、屈折率分布はレンズの像側の面近傍のみにほぼ線型についており、球面収差の補正に役立っている。この場合の収差係数とそれを非球面に置き換えた場合の収差係数を表 1 に示す。これからアキシャル型レンズの媒質の寄与が通常非常に小さいこと、またアキシャル型レンズと非球面がほとんど同等の働きをしていることがわかる。表 1 には、アキシャル型レンズ使用と非球面使用それぞれにおける最大屈折率差 Δn と最大非球面量 Δx を参考のために記載した。

4. ラジアル型不均質ガラスを用いた レンズ系の設計

4.1 近軸特性¹²⁾

ラジアル型レンズは、媒質自体が屈折力を持つところに最大の特徴がある。そのため、両端平面レンズ(ウッドレンズ)でも屈折力を持ち、レンズ厚が比較的小さいときその屈折力 ϕ_m は次式で与えられる。

$$\phi_m \doteq -2N_{10}t_m \quad (28)$$

ここで、 t_m は媒質の厚みを示す。また、面での屈折力

は屈折率 N_{00} の均質レンズと同じであり、ラジアル型レンズ単体の屈折力 ϕ_r は、レンズ厚が小さい仮定の下では次式で与えられる。

$$\phi_r = \phi_s + \phi_m \quad (29)$$

ただし、 ϕ_s は屈折率 N_{00} の均質レンズの屈折力を示す。

媒質が屈折力をもつことからラジアル型レンズの屈折率分布は近軸色収差にも大きな影響をおよぼすが、ラジアル型ガラスのアッベ数は以下のように定義される。

$$V_{i0} = \frac{N_{i0d}}{N_{i0F} - N_{i0c}} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (30)$$

$$V_{00} = \frac{N_{00} - 1}{N_{00F} - N_{00c}} \quad (i=0) \quad (31)$$

ここで、 N_{i0d} 、 N_{i0c} 、 N_{i0F} はそれぞれ d ライン、C ライン、F ラインに対する屈折率分布係数 N_{i0} を示している。このとき、薄肉系の近軸軸上色収差 PAC は、次式によって与えられる。

$$PAC = K \left(\frac{\phi_s}{V_{00}} + \frac{\phi_m}{V_{10}} \right) \quad (32)$$

ここで、 K は近軸光線高と最終面以後の近軸光線角度に依存する係数である。(32)式からわかるように、ラジアル型レンズでは V_{10} の値が重要な意味を持ち、その値を変化させ近軸色収差をコントロールすることが可能となる。

4.2 3次収差特性

ラジアル型レンズを用いた収差補正では、面と媒質の両方で屈折率分布の効果を利用できる。面での効果は、(12)~(16)式よりアキシャル型レンズ同様、 κ を通して作用し、 N_{10} によりベッツバール和以外の4収差に影響をおよぼす。

媒質での効果は、屈折率分布係数 N_{00} 、 N_{10} 、 N_{20} を通しコントロールされる。この効果は5収差すべてにおよぶが、中でも以下に示すようにベッツバール和に対する効果は特筆に値する。(20)式から、ラジアル型レンズのベッツバール和 PTZ は近似的に次式で示される。

$$PTZ = \frac{\phi_s}{N_{00}} + \frac{\phi_m}{N_{00}^2} \quad (33)$$

上式から、 N_{10} の値を変化させ媒質の屈折力と面の屈折力の配分を変えることでベッツバール和のコントロールが可能であること、また、屈折力が同じでも PTZ に対する影響は面と媒質で異なり、媒質での方が絶対値でより小さくなることからわかる。このことは、正レンズとして使用する場合、媒質でより多くの屈折力を得るように設計すれば、像面湾曲に関し有利になることを意味している。

以上のように、ラジアル型レンズの収差補正能力は強力でまた多様な利用法があるが、その能力を非球面と比較すると、ベッツバール和と色収差のコントロールが可能になる点に最大の特徴がある。

4.3 準等価ガラス

ラジアル型レンズは高い収差補正能力を持つが、有効利用するためには適用箇所等の選定に十分考慮を要する。ラジアル型レンズを有効利用するための指針を得る上で準等価ガラスの概念²³⁾を用いると便利である。準等価ガラスは、ラジアル型レンズのベッツバール和と色収差の補正能力およびそれらのレンズ設計上の重要性に注目し、それらの能力を仮想的な均質ガラスと等価とし、定量化したものである。いま、ラジアル型レンズ1枚が屈折率 n_{eff} 、アッベ数 ν_{eqv} を持つ均質ガラスとベッツバール和および色収差に関し等価であるとすると、(32)、(33)式より次の関係が導かれる。

$$\frac{\phi}{n_{\text{eff}}} = \frac{\phi_s}{N_{00}} + \frac{\phi_m}{N_{00}^2} \quad (34)$$

$$\frac{\phi}{\nu_{\text{eqv}}} = \frac{\phi_s}{V_{00}} + \frac{\phi_m}{V_{10}} \quad (35)$$

ここで、

$$\phi = \phi_s + \phi_m \quad (36)$$

準等価ガラスは、 $(n_{\text{eff}}, \nu_{\text{eqv}})$ を持ったガラスと定義され、これらの値は(34)、(35)式より $a = \phi_m / \phi$ をパラメータとして計算される。これを用いれば、従来のレンズ設計手法の延長でラジアル型レンズの設計を考えることが可能となる。

4.4 レンズ系の設計例

ラジアル型レンズの収差補正能力が高いとはいえ、いわゆる5収差と軸上色収差、倍率色収差を合わせた7収差を1枚ですべて実用的レベルで補正することはできない²⁴⁾。すべての収差を良好に補正するためには、少なくとも2枚のラジアル型レンズが必要である¹²⁾。図3は、ラジアル型レンズをカメラ用撮影レンズに適用し、従来6枚必要であったレンズ枚数を1/3に削減した例である。このレンズの屈折率分布は、パラボリックに近く、媒質が正の屈折力を持っている。このレンズ系の収差補正原理を表2にまとめた。また、収差係数を表3に示す。このようなレンズ構成にすることで高度な収差補正が可能となる。

図3のレンズ系では、表2からわかるように絞りに対する対称性を有効に利用しているが、絞りをレンズ系の外に配置したタイプでも同様の十分有効な設計が可能である。この方法をズームレンズに適用した設計例²⁵⁾を図

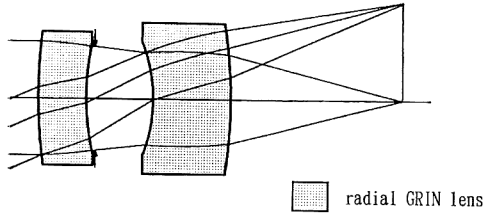


図3 ラジアル型レンズを用いた設計例
($f=50\text{ mm}$, $F/2.0$, $2\omega=46.7^\circ$)

表2 図3のレンズ系における収差補正原理

収差	補正パラメータ
球面収差	N_{20}
コマ収差	対称性
非点収差	絞り位置
ベッツパール和	N_{10}
歪曲収差	対称性
軸上色収差	V_{10}
倍率色収差	V_{10} , 対称性

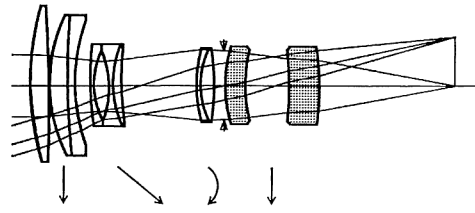


図4 ラジアル型レンズのズームレンズへの適用例
($f=75\sim 150\text{ mm}$, $F/2.8$, $2\omega=32.1\sim 16.4^\circ$)

表4 図3および図4におけるラジアル型レンズの
 n_{eff} , ν_{eqv}

	n_{eff}	ν_{eqv}
図3の第1ラジアル型レンズ	5.84	119.3
図3の第2ラジアル型レンズ	14.31	-132.8
図4の第1ラジアル型レンズ	2.49	84.7
図4の第2ラジアル型レンズ	2.63	90.3

表3 図3のレンズ系に対する3次収差係数

	SA	COMA	AS	DIT	PTZ	PAC	PLC
第1面	1.168	-1.148	0.001	-1.236	-0.219	-0.047	-0.175
媒質	0.799	0.455	-0.349	0.236	-0.276	-0.035	0.007
第2面	-1.576	0.291	-0.179	1.645	0.417	0.028	0.187
第3面	-1.437	-4.931	-0.593	-1.217	0.797	0.135	-0.089
媒質	0.860	2.634	0.417	-0.926	-0.572	0.024	0.022
第4面	0.121	2.569	0.688	1.105	-0.251	-0.105	0.050
合計	-0.065	-0.130	-0.015	-0.393	-0.104	0.000	0.002

4に示す。

図3, 図4の設計例におけるラジアル型レンズは, 先の準等価ガラスで考えた場合, 非常に高屈折率で非常に低分散なガラスに相当している. 参考のため, これらの設計例における準等価ガラスの値を表4に示す.

5. おわりに

不均質媒質を用いた光学系の設計について基本的で重要と思われる点を述べた. しかし, まだまだ未検討の部分も多く, その潜在的な能力が十分わかっているとは言えない状況と思われる. 今後の研究で新たに斬新な設計理論やレンズ系が出現することを期待したい.

また, 今回の解説の中では実際の素材特性については触れなかったが, 現状では白色光学系で設計的に望まれる素材特性 (特に分散特性) と現存する素材の特性には隔りがある. 素材設計の面からは設計的に望まれる特性

の作製もかなり可能なようであるが, その検証および実現にはまだまだ努力と年月を要すると思われる. 今後の進展を期待したい.

文 献

- 1) J.C. Maxwell: "Some solutions of problems," Cambridge Dublin Math. J., 8 (1854) 188.
- 2) R.W. Wood: *Physical Optics* (MacMillan, New York, 1905) pp. 71-77.
- 3) T. Uchida, M. Furukawa, I. Kitano, K. Koizumi and H. Matsumura: "Optical characteristics of a light-focusing fiber guide and its applications," IEEE J. Quantum Electron., **QE-6** (1970) 606-612.
- 4) P.J. Sands: "Third-order aberrations of inhomogeneous lenses," J. Opt. Soc. Am., **60** (1970) 1436-1443.
- 5) P.J. Sands: "Inhomogeneous lenses, II. Chromatic paraxial aberrations," J. Opt. Soc. Am., **61** (1971) 777-783.
- 6) P.J. Sands: "Inhomogeneous lenses, III. Paraxial

- optics," J. Opt. Soc. Am., **61** (1971) 879-885.
- 7) P. J. Sands: "Inhomogeneous lenses, IV. Aberrations of lenses with axial index distributions," J. Opt. Soc. Am., **61** (1971) 1086-1091.
 - 8) P. J. Sands: "Inhomogeneous lenses, V. Chromatic paraxial aberrations of lenses with axial or cylindrical index distributions," J. Opt. Soc. Am., **61** (1971) 1495-1500.
 - 9) E. W. Marchand: *Gradient Index Optics* (Academic Press, New York, 1978).
 - 10) A. Sharma, D. V. Kumar and A. K. Ghatak: "Tracing rays through graded-index media: a new method," Appl. Opt., **21** (1982) 984-987.
 - 11) D. T. Moore: "Gradient-index optics: a review," Appl. Opt., **19** (1980) 1035-1038.
 - 12) L. G. Atkinson, S. N. Houde-Walter, D. T. Moore, D. P. Ryan and J. M. Stagaman: "Design of a gradient-index photographic objective," Appl. Opt., **21** (1982) 993-998.
 - 13) D. S. Kindred and D. T. Moore: "Design, fabrication, and testing of a gradient-index binocular objective," Appl. Opt., **27** (1988) 492-495.
 - 14) M. Kawazu and Y. Ogura: "Application of gradient-index fiber arrays to copying machines," Appl. Opt., **19** (1980) 1105-1112.
 - 15) D. C. Leiner and R. Prescott: "Correction of chromatic aberrations in GRIN endoscopes," Appl. Opt., **22** (1983) 383-386.
 - 16) I. Kitano, H. Ueno and M. Toyama: "Gradient-index lens for low-loss coupling of a laser diode to single-mode fiber," Appl. Opt., **25** (1986) 3336-3339.
 - 17) H. Nishi, H. Ichikawa, M. Toyama and I. Kitano: "Gradient-index objective lens for the compact disc system," Appl. Opt., **25** (1986) 3340-3344.
 - 18) 西 壽巳, 市川裕之, 遠山 実: "光ディスク用屈折率分布型対物レンズ", 光学, **15** (1986) 303-308.
 - 19) 伊賀健一: "分布屈折率レンズにおける結像の基礎", 光学, **10** (1981) 89-95.
 - 20) 西澤絃一: "分布屈折率レンズの現状と動向", オプトロニクス, **102** (1990) 62-68.
 - 21) D. Y. H. Wang and D. T. Moore: "Third-order aberration theory for weak gradient-index lenses," Appl. Opt., **29** (1990) 4016-4025.
 - 22) 青木法彦: 特開平 2-50116.
 - 23) 永岡利之, 植田博文, 山本公明: "準等価ガラスを用いたラジアル型 GRIN レンズの光学設計法", 光学, **21** (1992) 795-798.
 - 24) D. T. Moore and R. T. Salvage: "Radial gradient-index lenses with zero Petzval aberration," Appl. Opt., **19** (1980) 1081-1086.
 - 25) H. Tsuchida, N. Aoki, K. Hyakumura and K. Yamamoto: "Design of zoom lens systems that use gradient-index materials," Appl. Opt., **31** (1992) 2279-2283.