

研究速報

バイスペクトル位相からの最小自乗位相推定のための 新しいアンラッピング・アルゴリズム

高城 洋明*・高橋 徹**・安部 靖史*

* 九州工業大学電子工学教室 〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1

** 大分工業高等専門学校電気工学科 〒870-01 大分市大字牧 1666

(1992年9月24日受付, 1992年11月16日受理)

A New Unwrapping Algorithm for Least-Squares Phase Estimation from the Bispectrum Phase

Hiroaki TAKAJO,* Tohru TAKAHASHI** and Yasushi ABE*

* Department of Electronic Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1, Sensuicho, Tobata-ku, Kitakyushu 804

** Department of Electrical Engineering, Oita National College of Technology,
1666, Maki, Oita 870-01

(Received September 24, 1992; Accepted November 16, 1992)

For estimating the Fourier phase of an object from its bispectrum phase with help from the linear least-squares technique, it is necessary to unwrap the measured bispectrum phase so that the signal parts of the unwrapped bispectrum phases are linked to the Fourier phases by a linear system of equations. In this paper, we develop the new algorithm which performs the unwrapping procedure in an iterative manner. By computer simulations, it is verified that the proposed algorithm contributes to large improvements in the Fourier phase estimation and, as a result, in the reconstruction of the object, as well.

1. はじめに

Triple correlation 法は, 物体のフーリエ位相 (以下簡単に位相という) を回復し得る方法として, 近年特に天体観測の分野で活発に研究されている¹⁾. この方法では測定されたバイスペクトル位相から位相を回復する過程が不可欠でありかつ重要な部分を占めている. この過程を実行するための最も直接的な方法は逐次法²⁾であるが, この方法では回復位相にノイズが蓄積する. 位相はフーリエ振幅よりもむしろ信号についての重要な情報を与えてくれるので³⁾, より強力な位相回復法を構築する必要がある. そのためには, 最小自乗法を用いるのが最も有望であろう.

バイスペクトル位相からの位相回復に最小自乗法を最初に適用したのは Matsuoka らである⁴⁾. 彼らの理論では, バイスペクトル位相と位相の信号分とが線形な関係

にあることが仮定されている. このため, 最小自乗解すなわち回復位相はコスト関数を極小にするばかりでなく最小にすることが保証され, しかも数式によってあらわに表現することができる. ところが実際には, 測定によって得られるバイスペクトル位相は値が 2π の範囲に限られているため, ほとんどの場合にその信号分は位相と線形な関係にはない. したがって, 彼らの方法によって位相を回復できる物体の例は極めて少ない. Marron らは, 測定によって得られるバイスペクトル位相をその信号分が位相と線形な関係で結ばれるようにアンラッピング (unwrapping) することによってこの困難を克服した⁵⁾. 位相は, アンラッピングされたバイスペクトル位相から Matsuoka らの方法によって, すなわち線形最小自乗法によって求められる.

近年, アンラッピングを必要としない最小自乗法も開発されている^{6,7)}. これらの方法では, 位相ならびにバ

イスペクトル位相の代わりにそれらに関するフェイザー (phasor)*1 が取り扱われる。すなわち、バイスペクトル位相に関するフェイザーから位相に関するフェイザーが回復される。しかしながらそれらフェイザーの間には、線形な関係は存在しないので、位相に関するフェイザーを回復するためには非線形最小自乗問題を解かねばならず、最急降下法などの繰返し法を用いねばならない。このため回復される位相に関するフェイザーは、コスト関数を極小にするものではあっても、最小にするものであるという保証はない。またもちろんそれは、数式によってあらわには表せない。

バイスペクトル位相に含まれるノイズはアンラッピングの過程を妨害する。この妨害によりアンラッピングが正常に行われぬ場合には、たとえその程度が軽微であっても、回復位相には多大なエラーがもたらされる⁹⁾。したがって線形最小自乗位相推定を改善するには、アンラッピング操作を改善するのが最も効果的である。本論文の目的は、線形最小自乗位相推定を遂行するための、より強力なアンラッピング・アルゴリズムを提案することである。

2. 線形最小自乗位相推定とアンラッピングの必要性

位相は N 点でサンプルされているものとし、それらを $\phi_i (i=1, \dots, N)$ と表す。文献 8) と同様に、ある物理量からノイズを差し引いた量をその物理量の信号分と呼ぶ。バイスペクトル位相からの線形最小自乗位相推定は、バイスペクトル位相の信号分 β_{ij} が

$$\beta_{ij} = \phi_i + \phi_j - \phi_{i+j} \quad (1)$$

と書くことができるという事実に基づいている⁸⁾。上式はバイスペクトル位相の信号分が位相と線形連立方程式で結ばれることを表している。われわれはそれをベクトル・マトリックス形式で

$$\beta = A\phi \quad (2)$$

と書くことができる。ただし、 ϕ と β はそれぞれ ϕ_i と β_{ij} を要素とする列ベクトルであり、 A は係数マトリックスである。バイスペクトル位相にノイズ n_{ij} が存在するときには、

$$\beta + n = A\phi \quad (3)$$

である。ただし、 n は n_{ij} を要素とする列ベクトルである。推定位相は (3) 式の最小自乗解すなわち

$$\check{\phi} = (A^T A)^{-1} A^T (\beta + n) \quad (4)$$

によって与えられる。

ところで第 1 節で述べたように、測定によって得られるバイスペクトル位相を $\tilde{\beta}_{ij}$ と表すとき、 $\tilde{\beta}_{ij}$ は値が 2π の範囲に限られている。このため、 $\tilde{\beta}_{ij}$ の信号分 $\tilde{\beta}_{ij} (= \tilde{\beta}_{ij} - n_{ij})$ は特別な場合を除いて (2) 式を満足しない。したがって、(4) 式によって、すなわち

$$\check{\phi} = (A^T A)^{-1} A^T \tilde{\beta} \quad (5)$$

によって位相を回復しても、ほとんどの場合位相は有効には回復されない。ただし、 $\tilde{\beta}$ は $\tilde{\beta}_{ij}$ を要素とする列ベクトルである。(4) 式を使って位相を有効に回復するためには、

$$\tilde{\beta}_{ij} = \tilde{\beta}_{ij} + 2\pi K_{ij} \quad (6)$$

によって形成される $\tilde{\beta}_{ij}$ を $\tilde{\beta}_{ij}$ の代わりに用いなければならない。ただし、 K_{ij} は $\tilde{\beta}_{ij}$ の信号分が (2) 式を満足するように決定されねばならない整数である。(6) 式で示される操作はバイスペクトル位相のアンラッピングと呼ばれる。

3. 新しいアンラッピング・アルゴリズム

Marron らはバイスペクトル位相をアンラッピングするためのエレガントなアルゴリズムを構築した。しかしながら彼らのアルゴリズムは測定ノイズの妨害に対して必ずしも強いアルゴリズムであるとは言い難い。本節では、より強力なアルゴリズムを提供する目的で、以下に示す繰返し型の新しいアルゴリズムを構築する：

(I) m 回目の推定位相 $\check{\phi}^{(m)}$ から (1) 式によってすなわち

$$\tilde{\beta}_{ij}^{(m)} = \check{\phi}_i^{(m)} + \check{\phi}_j^{(m)} - \check{\phi}_{i+j}^{(m)} \quad (7)$$

によって $\tilde{\beta}_{ij}^{(m)}$ を生成する。ただし、 $\check{\phi}_i^{(m)}$ は $\check{\phi}^{(m)}$ の要素である ($\tilde{\beta}_{ij}^{(m)}$ の値は 2π の範囲に限られてはならないことに注意)。

(II) 測定によって得られるバイスペクトル位相 $\tilde{\beta}_{ij}$ を用い、次式

$$K_{ij}^{(m+1)} = \text{INT} \{ [\tilde{\beta}_{ij}^{(m)} - \tilde{\beta}_{ij}] / 2\pi \} \quad (8)$$

によってアンラッピングに必要な整数 $K_{ij}^{(m+1)}$ を生成する。ただし、 $\text{INT} \{ x \}$ は x に最も近い整数を表す。

(III) (6) 式すなわち

$$\tilde{\beta}_{ij}^{(m+1)} = \tilde{\beta}_{ij} + 2\pi K_{ij}^{(m+1)} \quad (9)$$

によって、 $\tilde{\beta}_{ij}$ をアンラップする。

(IV) $\tilde{\beta}_{ij}^{(m+1)}$ と (4) 式とから、すなわち

$$\check{\phi}^{(m+1)} = (A^T A)^{-1} A^T \tilde{\beta}^{(m+1)} \quad (10)$$

によって新しい推定位相 $\check{\phi}^{(m+1)}$ を得る。ただし、

*1 ある実数を偏角とする複素数をその実数に関するフェイザーと呼ぶことにする。

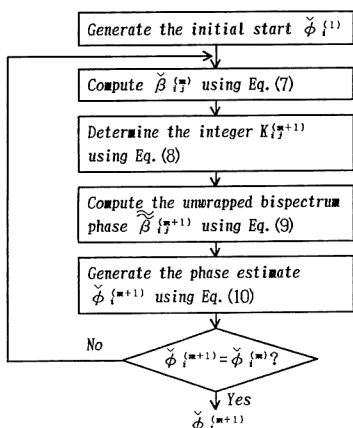


Fig. 1 The flowchart of the proposed algorithm.

$\check{\beta}^{(m+1)}$ は $\check{\beta}_{i_j}^{(m+1)}$ を要素とする列ベクトルである。

(V) $\check{\phi}^{(m+1)}$ が $\check{\phi}^{(m)}$ に等しいか、あるいは繰返し回数があるはじめ設定された最高繰返し回数に達していればアルゴリズムの実行を停止し、そうでなければステップ (I) にもどる。

Fig. 1 にこのアルゴリズムをフローチャートにして示す。

4. 計算機シミュレーションによる検討

前節で提案したアルゴリズムの性能を計算機シミュレーションによって確かめる。Fig. 2 に示す物体を例にとる。物体のサンプル点数は 128 ($N=64$) である。バイスペクトル位相に含まれる測定ノイズとして、平均値がゼロで標準偏差が σ_n の正規乱数を用いる。初期位相 $\check{\phi}_i^{(1)}$ には例えば恒等的なゼロ ($\check{\phi}_i^{(1)}=0$, for any i) などを用いることができるが、ここでは必要な繰返し回数をできるだけ少なくするため、逐次法によって求められ

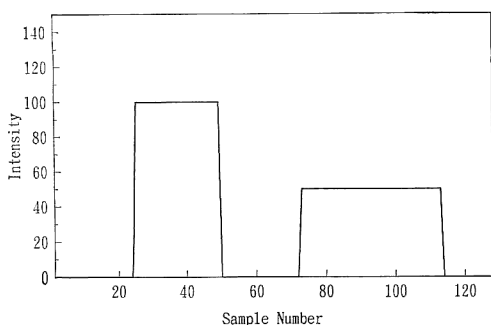


Fig. 2 Original object.

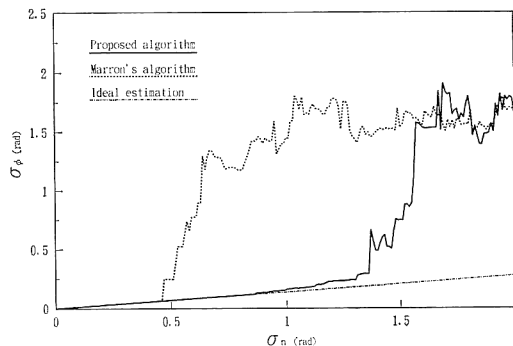


Fig. 3 Relations of σ_ϕ versus σ_n .

た位相を用いる。位相の推定エラーの rms 値を、

$$\sigma_\phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N |\check{\phi}_i^s - \phi_i|_P^2}{N}} \quad (11)$$

によって定義する。ただし、 $\check{\phi}_i^s$ は推定位相から位置ずれを生じる線形項を取り除いたものであり、 ϕ_i は物体の真の位相である。また $\langle \cdot \rangle_P$ は主値を表す。Fig. 3 にシミュレーションによって得られた σ_ϕ と σ_n との関係の一例を掲げる。実線は今回提案した方法を用いて位相を推定した場合の結果であり、点線は Marron らの方法による結果である。文献 8) と同様に、常に正常にアンラッピングを行うことのできる最小自乗位相推定を仮想し、これを理想推定と呼ぶ。Fig. 3 には理想推定における位相推定エラーも示している。この図は提案したアルゴリズムが Marron らのアルゴリズムに比べて格段に優れていることを示している。Marron らのアルゴリズムでは $\sigma_n=0.46$ rad までしか理想推定を実現できないが、提案したアルゴリズムによれば、 $\sigma_n=0.87$ rad あたりまで理想推定を実現できる。

Fig. 4 の (a)~(c) に真の振幅と推定位相とを使って得られた像の $\sigma_n=1.2$ rad の場合の例を示す。ただし、Fig. 4 の (a) は Marron らのアルゴリズムによる推定位相を使って得られた像であり、(b) は提案したアルゴリズムによる推定位相を、(c) は理想推定による推定位相を使って得られた像である。この場合、Marron らのアルゴリズムを用いて回復された像からは物体を識別することはほとんど不可能である。しかしながら提案したアルゴリズムを用いれば、ほぼ理想推定を実現することができ、像は物体の特徴をよく保持している。

われわれが確かめた限りでは提案したアルゴリズムはすべての場合に収束した。収束に必要な回数は $\sigma_n \leq 0.9$ rad ではたかだか 3 回程度であり、 $\sigma_n > 0.9$ rad でも 20 回を越えた例はなかった。提案したアルゴリズムでは、

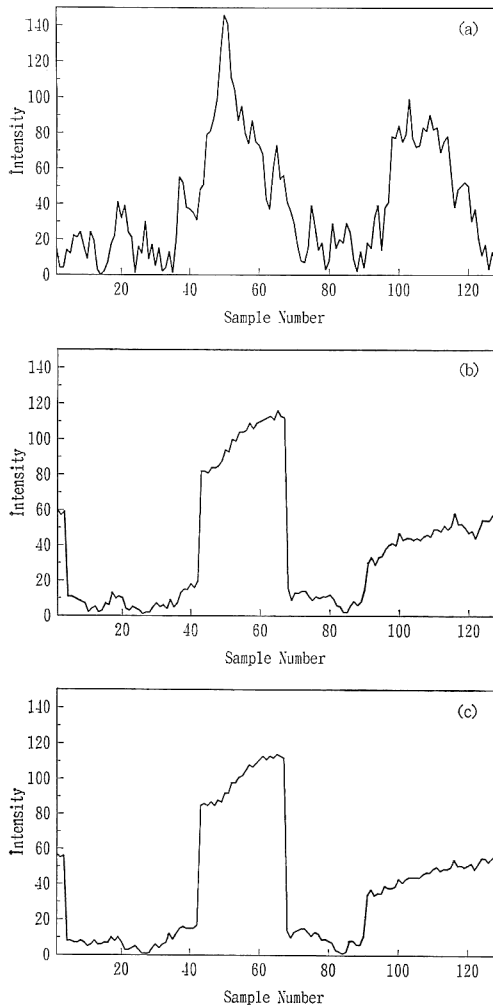


Fig. 4 Reconstructed images for the case where $\sigma_n = 1.2$ rad. (a) The phase estimated by Marron's algorithm is used. (b) The phase estimated by the proposed algorithm is used. (c) The phase obtained in the ideal estimation is used.

アンラップされたバイスペクトル位相から位相を回復する過程で全計算時間のうちのほとんどが費やされる。このことは Marron らのアルゴリズムにもあてはまる。したがって、提案したアルゴリズムの計算時間はほぼ Marron らのそれに必要繰返し回数を乗じたものとな

る。上述のように、多くの場合必要繰返し回数はさほど大きくはないので、提案したアルゴリズムは計算時間の点からみても実用上の問題はないと思われる。

5. む す び

物体のバイスペクトル位相から位相を線形最小自乗法によって回復するためには、測定によって得られるバイスペクトル位相をアンラッピングする必要がある。本論文では、繰返し型の新しいアンラッピング・アルゴリズムを提案した。提案したアルゴリズムは Marron らのアルゴリズムよりも測定ノイズの妨害に対して格段に強く、したがって位相回復ならびに物体回復に大きな改善をもたらすことを計算機シミュレーションによって確かめた。

提案したアルゴリズムは繰返し型であるため、Marron らのアルゴリズムよりも多くの計算時間を必要とする。しかしながら、収束するまでに必要な繰返し回数は多くの場合さほど大きくはなく、したがって繰返しによる計算時間の増大はさほど深刻ではないと思われる。

文 献

- 1) A. W. Lohmann and B. Wirtzner: "Triple correlations," Proc. IEEE, **72** (1984) 889-901.
- 2) H. Bartelt, A. W. Lohmann and B. Wirtzner: "Phase and amplitude recovery from bispectra," Appl. Opt., **23** (1984) 3121-3129.
- 3) A. V. Oppenheim and J. S. Lim: "The importance of phase in signals," Proc. IEEE, **69** (1981) 529-541.
- 4) T. Matsuoka and T. J. Ulrych: "Phase estimation using the bispectrum," Proc. IEEE, **72** (1984) 1403-1411.
- 5) J. C. Marron, P. P. Sanchez and R. C. Sullivan: "Unwrapping algorithm for least-squares phase recovery from the modulo 2π bispectrum phase," J. Opt. Soc. Am. A, **7** (1990) 14-20.
- 6) A. Lannes: "Backprojection mechanism in phase-closure imaging. Bispectral analysis of the phase-restoration process," Exp. Astron., **1** (1989) 47-76.
- 7) P. W. Gorham, A. M. Ghez, S. R. Kulkarni, T. Nakajima, G. Neugebauer, J. B. Oke and T. A. Prince: "Diffraction-limited imaging. III. 30 m as closure phase imaging of six binary stars with the Hale 5 m telescope," Astron. J., **98** (1989) 1783-1799.
- 8) 高橋 徹, 高城洋明: "バイスペクトル位相からの最小2乗位相推定におけるエラーの考察", 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J74-D-II** (1991) 1621-1624.