

# 研究

## 液晶空間光変調素子を用いたウィグナー 分布関数による実時間位相形状計測

河村 直樹\*・岩井 俊昭\*・竹森 民樹\*\*

\* 静岡大学工学部電子工学科 〒432 浜松市城北 3-5-1

\*\* 浜松ホトニクス(株)中央研究所 〒434 浜北市平口 5000

(1992年11月27日受付, 1993年2月9日受理)

### Real-Time Profiling of a Pure Phase Object Using an Auto-Wigner Distribution Function Generated by a Liquid Crystal Light Valve

Naoki KAWAMURA,\* Toshiaki IWAI\* and Tamiki TAKEMORI\*\*

\* Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,  
Shizuoka University, 3-5-1, Johoku, Hamamatsu 432

\*\* Central Research Laboratory, Hamamatsu Photonics  
K. K., 5000, Hiraguchi, Hamakita 434

(Received November 27, 1992; Accepted February 9, 1993)

A real-time method for profiling one-dimensional pure phase objects is achieved on the basis of an auto-Wigner distribution function (AWDF) generated by using a liquid crystal light valve (LCLV). Cylindrical lenses were used as typical examples of the pure phase object to be measured. The LCLV converts the incoherent image to the coherent one, which is available in reflection mode addressable optically. In the process of generating the AWDF, the product of the shifted object and its conjugation was obtained using the modified Michelson interferometer, and the one-dimensional Fourier transform was performed by means of the fully-optical operation after converting the intensity pattern of the interference fringe to a coherent one. As a result, this paper shows that the AWDF can be generated by using fully-optical procedures and the real-time method of phase profiling can be realized successfully.

### 1. まえがき

自己ウィグナー分布関数は、シュレディンガー方程式を満足する粒子の位置と運動量の位相空間分布を記述する関数として、量子力学の分野で導入された<sup>1,2)</sup>。また、位置と運動量の2変数を、フーリエ変換における時間と周波数または空間位置と空間周波数に置き換えて、時間や空間位置の変化に対して非定常変動する信号のスペクトル解析に、自己ウィグナー分布関数を応用する可能性が示された<sup>3-5)</sup>。なお、ウィグナー分布関数の変数である位置と運動量と同様に、時間（空間位置）と周波数（空間周波数）も不確定性原理に従う<sup>6)</sup>。

これまでの応用例としては、音声<sup>7,8)</sup>、ソナー<sup>9,10)</sup>、心電図<sup>11)</sup>などの非定常信号の解析、画像解析<sup>12)</sup>、非定常ランダム媒質からの光散乱の解析<sup>13)</sup>、部分的コヒーレンス理論<sup>14)</sup>、アナログ光コンピューティング<sup>15-19)</sup>などがあり、広範な分野において研究がなされている。これらの応用研究は、互いに不確定な一対の観測量である時間と周波数あるいは空間位置と空間周波数に対するウィグナー分布関数の同時記述の可能性を利用したものである。

さらに、自己ウィグナー分布関数は、位相関数の実関数化という有効な性質を有する。特に、位相関数が空間的に比較的なめらかに変化するとき、その自己ウィグ

ナー分布関数は、位置の変化に対して位相関数の1次微分値の変化を表す。したがって、自己ウィグナー分布関数を位置変数に関して積分すると、元の位相関数を再構成できる。最近われわれは、1次元位相物体とその複素共役との積を光学的に実現し、フーリエ変換をマイクロコンピューターで実行することで、平均精度0.7%で位相物体の形状測定を行った<sup>20)</sup>。しかしながら、フーリエ変換をマイクロコンピューター上で実行したため、眞の実時間性に乏しかった。本論文では、測定の実時間性を向上させるため、光アドレス形液晶空間光変調素子(LCLV)のインコヒーレント・コヒーレント変換作用を用いて、1次元フーリエ変換をも光学的に行うことで、実時間・全光学的なウィグナー分布関数処理系を実現する。

## 2. 自己ウィグナー分布関数

1次元複素信号物体  $f(x)$  の自己ウィグナー分布関数は、

$$W(x, f_s) = \int_{-\infty}^{\infty} J(x, y) \exp(-j2\pi f_s y) dy \quad (1)$$

で定義される。ここで、 $J(x, y)$  は

$$J(x, y) = f(x + y/2) f^*(x - y/2) \quad (2)$$

で与えられ、 $f^*(x)$  は  $f(x)$  の複素共役を表す。自己ウィグナー分布関数を定義する(1)式から、

$$W(x, f_s) = W^*(x, f_s) \quad (3)$$

が成り立ち、任意の複素関数の自己ウィグナー分布関数

は実関数になる。いま、任意の位相物体関数を

$$f(x) = \exp\{j\phi(x)\} \quad (4)$$

とし、位置変数  $x$  の変化に対して、その位相関数  $\phi(x)$  がなめらかに変化すると仮定する。このとき  $\phi(x \pm y/2)$  をテイラー展開し、その3次微分より高次項を無視すると、

$$\phi\left(x \pm \frac{y}{2}\right) \approx \phi(x) \pm \frac{y}{2} \frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{y^2}{8} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \quad (5)$$

を得る。(5)式を(1)式と(2)式に代入すると、位相物体関数の自己ウィグナー分布関数は、

$$W(x, f_s) = \delta\left\{f_s - \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(x)}{dx}\right\} \quad (6)$$

で与えられる。(6)式は、任意の位相物体関数の自己ウィグナー分布関数は、 $x - f_s$  平面上において

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (7)$$

なる曲線を描くことを示す。したがって、この曲線を位置変数に関して、

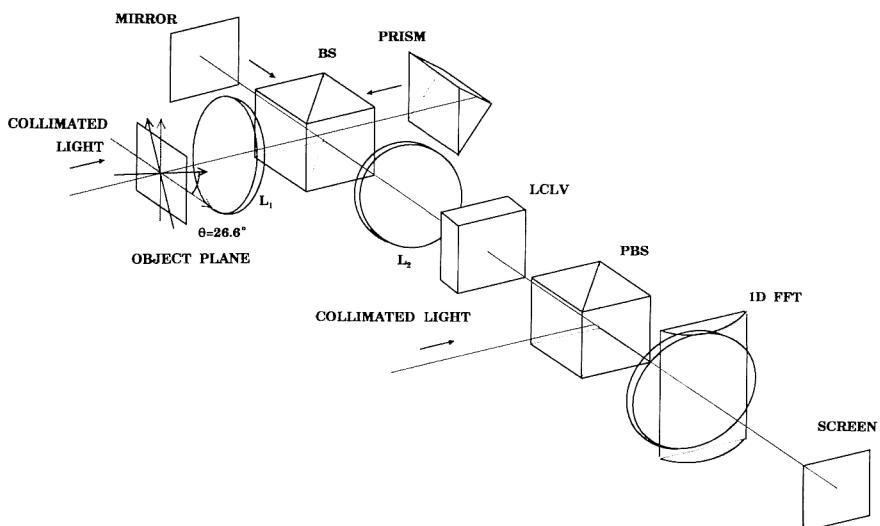
$$\phi(x) = 2\pi \int f_s d.x \quad (8)$$

なる積分を行うと、位相関数  $\phi(x)$  を再構成することができる。

## 3. ウィグナー分布関数の光学的実現

### 3.1 光学系

1次元位相物体の自己ウィグナー分布関数を光学的に



**Fig. 1** Optical arrangement of the fully-optical WDF processor. The configurations in the backward and forward sides of the LCLV were respectively used to produce  $J(x, y)$  and take one-dimensional Fourier transform of it.

実現するためには、(1)式と(2)式の定義にしたがって、信号物体  $f(x)$  から  $f(x+y/2)$  と  $f(x-y/2)$  の複素共役との積を作成したのち、 $y$  方向に 1 次元フーリエ変換を行う。Fig. 1 は、1 次元位相物体の自己ウィグナー分布関数を光学的に実現する光学系である。ここで、光アドレス型液晶空間光変調素子 LCLV をはさんで、物体側が  $J(x, y)$  を生成するための光学系であり、観測面側が  $y$  方向に 1 次元フーリエ変換を行うための光学系である。 $J(x, y)$  生成用光学系では、コリメートされた He-Ne レーザー光（波長  $\lambda=633 \text{ nm}$ ）を 1 次元位相物体に照射する。(2)式で示される  $y/2$  のシフトを  $x-y$  平面で実現するために、物体  $(xf)$  を物体面内で  $\theta$  だけ回転すると、 $f(ax \cos \theta + ay \sin \theta)$  を得る。ここで、 $f(x+y/2)$  と比較して、 $a \approx 1$ 、 $\theta \approx 26.6^\circ$  のとき

$$f(ax \cos \theta + ay \sin \theta) \approx f(x+y/2) \quad (9)$$

が成り立つ。そこで、光軸を中心で  $26.6^\circ$  回転させた位相物体  $f(x+y/2)$  を透過した光波は、ビームスプリッター BS によって、平面鏡に向かう光波と直角プリズムに向かう光波に分割される。平面鏡で反射された光波は、再度ビームスプリッターを透過したのち、球面レンズにより  $f(-x-y/2)$  を結像する。一方、直角プリズムで反射された光波は、 $y$  軸方向に関して上下反転されて、球面レンズにより  $f(-x+y/2)$  を結像する。焦点距離 200 mm の球面レンズ  $L_1$  と  $L_2$  は、テレセントリック結像光学系を形成している。そこで、像面の座標系を物体面に対して反転させて考えると、 $f(x+y/2)$  と  $f(x-y/2)$  とがコヒーレントに重なり、干渉縞光強度分布

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |f(x+y/2) + f(x-y/2)|^2 \\ &= |f(x+y/2)|^2 + |f(x-y/2)|^2 \\ &\quad + f(x+y/2)f^*(x-y/2) \\ &\quad + f^*(x+y/2)f(x-y/2) \end{aligned} \quad (10)$$

を生じる。(10)式において、右辺第 3 項が  $J(x, y)$  を表し、第 4 項がその複素共役を表す。

ウィグナー分布関数を得るために、光強度分布  $I(x, y)$  をフーリエ変換しなければならない。このようなインコヒーレント像をフーリエ変換するには、光強度分布をホログラムに記録し、その再生像を光学的にフーリエ変換する手法がある<sup>15)</sup>。さらに、CCD カメラと画像入出力装置によりコンピューターに、光強度分布をデジタル画像として入力し、高速フーリエ変換を用いて数値的なフーリエ変換を行う手法がある<sup>20)</sup>。しかしながら、両者とも真の実時間性を有していない。したがって、本研究では、光アドレス型液晶空間光変調素子

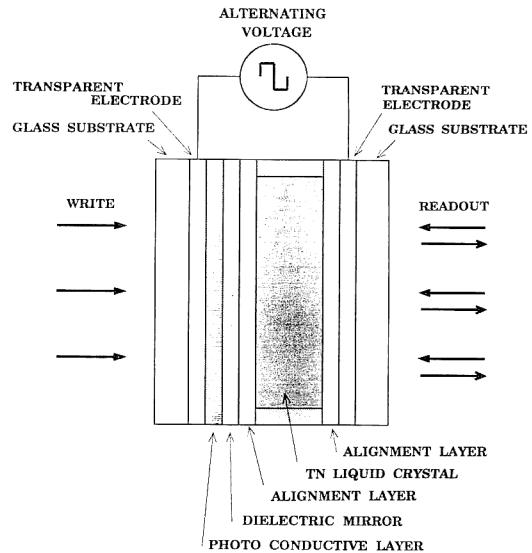


Fig. 2 Cross section of optically-addressable liquid crystal light valve (LCLV).

LCLV のインコヒーレント・コヒーレント変換作用を利用して、実時間操作を実現する。

実験では、LCLV として浜松ホトニクス社製のツイストネマティック液晶 (TNLC-SLM X 4171) を用い、その構造を Fig. 2 に示す。LCLV は、2 枚の透明電極の間に、光導電層 (a-Si)、光反射層 ( $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$  多層膜)、および配向層にはさまれた  $45^\circ$  ツイストネマティック液晶層が積層されている。電極間には、 $10 \text{ kHz}$  交流方形波電圧が印加されている。光反射層は、波長  $633 \text{ nm}$  の光波に対して 99.5% の反射率をもつため、書き込み光と読み出し光は、光学的に分離されている。このような構造の LCLV は、読み出し光が液晶内を往復して、書き込み光強度に対応して光変調される反射型で動作する。Fig. 3 は、LCLV の読み出し面に照射する光量を一定にしたときの、書き込み光強度の変化に対する読み出された光強度の変化を表している。測定に用いた光学系は、Fig. 1 における観測面側の光学系を用いた。S 偏光されたコリメート光が、偏光ビームスプリッター PBS で反射され、LCLV の読み出し面に照射される。照射光が液晶層を往復する間に楕円偏光化され、P 偏光成分のみが PBS を透過し、コヒーレント光として読み出される。ここで、図の実線と破線は、それぞれ印加電圧の振幅が  $4 \text{ V}_{\text{P-P}}$  と  $3.2 \text{ V}_{\text{P-P}}$  である場合の入出力特性を示す。Fig. 3 は、書き込み光強度が  $10 \mu\text{W}/\text{cm}^2$  から  $200 \mu\text{W}/\text{cm}^2$  の範囲において、ほぼ線形に変調が行われていることを示す。本実験では、実線で示されてい

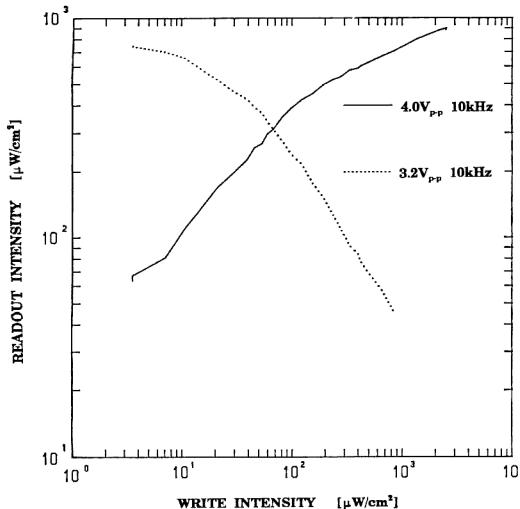


Fig. 3 Write-Read characteristics of liquid crystal valve used in the experiment.

る  $4V_{pp}$  の特性を用いた。

LCLV から読み出された干渉縞強度分布のコヒーレント像を、焦点距離 200 mm の球面レンズとシリンドリカルレンズを密着させた1次元フーリエ変換光学系を用いて、 $y$  方向にフーリエ変換を行うと、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[I(x, y)] &= \mathcal{F}[|f(x+y/2)|^2] + \mathcal{F}[|f(x-y/2)|^2] \\ &\quad + W(x, fs) + W^*(x, -fs) \end{aligned} \quad (11)$$

なる振幅分布を得る。したがって、位相物体関数の自己ウィグナー分布関数  $W(x, fs)$  と、 $x$  軸に関して対称な  $W(x, -fs)$  を光学的に実現できる。 $(11)$ 式のウィグナー分布関数を、CCD カメラで検出し、画像入出力装置によりマイクロコンピューターに取り込み、位置変数  $x$  に関して数値積分を行い、被測定位相物体の形状を再構成する。

### 3.2 シリンドリカルレンズのウィグナー分布関数

実験では、1次元位相物体として、シリンドリカルレ

ンズを用いた。シリンドリカルレンズの中心付近の位相形状は、位置  $x$  の2次関数であり、その物体関数は

$$f(x) = \exp\left(\frac{jkx^2}{2f}\right) \quad (12)$$

になる。ここで、 $k$  と  $f$  は、それぞれ波数とレンズの焦点距離を表す。このとき、LCLV の書き込み面における光強度分布は、 $(10)$ 式より

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |f(x+y/2) + f(x-y/2)|^2 \\ &= 2 + \exp(jkxy/f) + \exp(-jkxy/f) \\ &= 2\{1 + \cos(kxy/f)\} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。**Fig. 4** は、焦点距離  $f=(a)50$  mm,  $(b)100$  mm,  $(c)200$  mm のシリンドリカルレンズに対して、 $(13)$ 式を用いて計算された干渉縞強度分布を示す。ここで、 $n$  を任意の整数とすると

$$xy = n\lambda f \quad (14)$$

なる条件が成立立つ位置に明線を生じ、 $x-y$  平面における軌跡は直角双曲線になる。

$(13)$ 式で表される光強度分布を  $y$  方向に1次元フーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) \exp(-j2\pi fsy) dy \\ = 2\delta(fs) + \delta\left(fs - \frac{x}{\lambda f}\right) + \delta\left(fs + \frac{x}{\lambda f}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。 $(15)$ 式において、右辺の第2項および第3項が、それぞれシリンドリカルレンズの自己ウィグナー分布関数と  $J(x, y)$  の複素共役項から生じる1次回折成分を表す。 $(15)$ 式より、シリンドリカルレンズの自己ウィグナー分布関数は、 $x-fs$  平面において

$$fs = \pm \frac{x}{\lambda f} \quad (16)$$

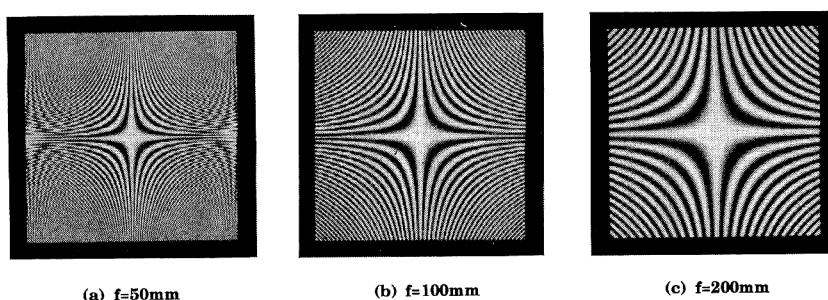
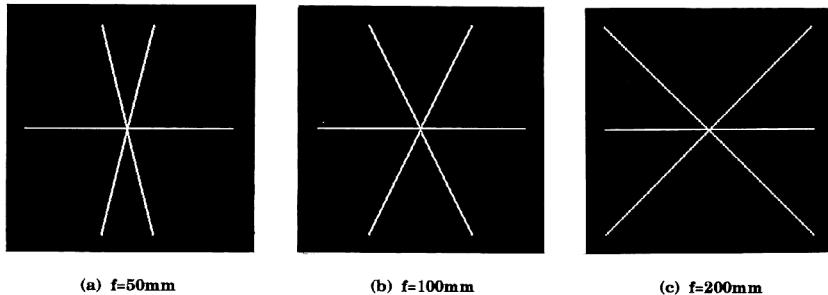
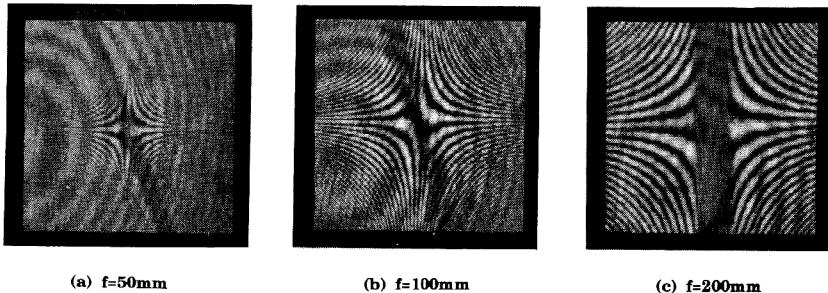


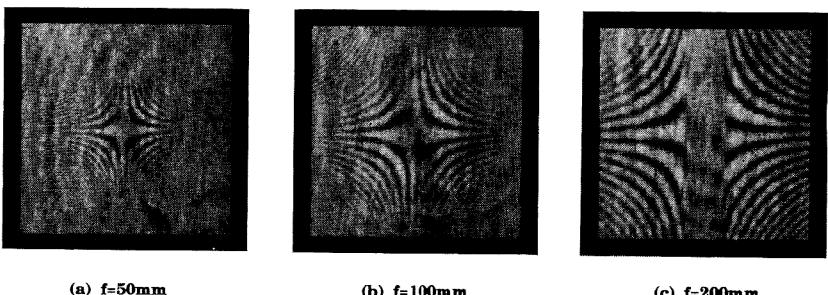
Fig. 4  $J(x, y)$  intensity patterns calculated by Eq. (13) for the cylindrical lenses with three different focal lengths of  $f=(a)50$  mm,  $(b)100$  mm, and  $(c)200$  mm.



**Fig. 5** WDFs calculated by Eq. (16) for the cylindrical lenses with three different focal lengths of  $f =$  (a) 50 mm, (b) 100 mm, and (c) 200 mm.



**Fig. 6**  $J(x, y)$  intensity patterns written to the LCLV for the cylindrical lenses with three different focal lengths of  $f =$  (a) 50 mm, (b) 100 mm, and (c) 200 mm.



**Fig. 7**  $J(x, y)$  intensity patterns read out from the LCLV corresponding to those shown in Fig. 6.

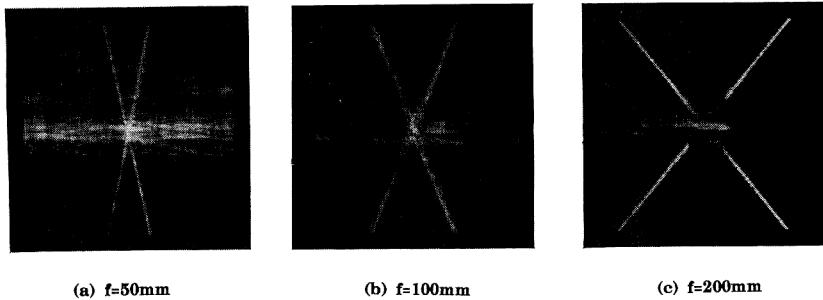
で表される直線になる。Fig. 5 は、Fig. 4 の干渉縞強度分布に対応して、(16)式から計算されたウィグナー分布関数を示す

#### 4. 結果と検討

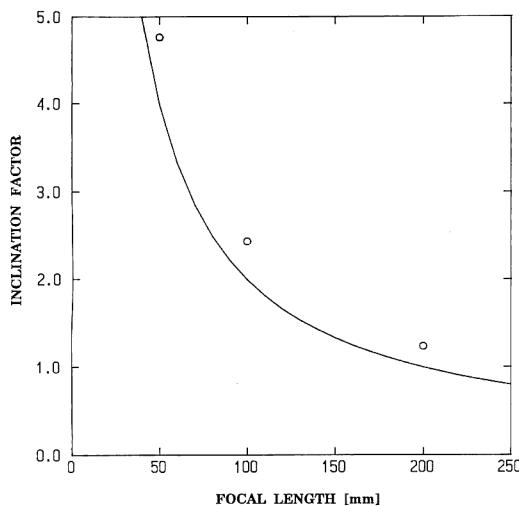
**Fig. 6** は、焦点距離  $f = (a) 50 \text{ mm}, (b) 100 \text{ mm}, (c) 200 \text{ mm}$  のシリンドリカルレンズに対して、LCLV に書き込まれた  $J(x, y)$  強度分布を示す。干渉縞強度分布は、(14)式から予測されたとおり直角双曲線になっており、その縞間隔は焦点距離が短いほど狭くなる。 $J(x, y)$  強度分布に直角プリズムの頂点のエッジ像とマイケルソン干渉計で生じる干渉縞が重なっているため、

その S/N 比は劣化している。特に、焦点距離が増加すると、エッジ像の幅が増加するとともに、その傾きも増加し空間周波数軸に漸近するため、位置  $x$  の中心付近では干渉縞が消失する。しかしながら、干渉縞が観測される部分では、そのコントラストは良好である。

**Fig. 7** は、**Fig. 6** の  $J(x, y)$  強度分布が書き込まれたとき、LCLV からの読み出された光強度分布を示す。読み出された干渉縞強度分布においては、そのコントラストは比較的保持されているものの、新たに雜音性光強度分布が発生している。これは、LCLV の液晶層をはさむように配置されている配向層、透明電極、およびガラス基盤の平行度の誤差から生じると考えられる。さら



**Fig. 8** Resultant WDFs obtained by taking one-dimensional optical Fourier transformation of the intensity patterns shown in Fig. 7 for the cylindrical lenses with three different focal lengths of  $f =$  (a) 50 mm, (b) 100 mm, and (c) 200 mm.



**Fig. 9** Comparison between the inclinations of the WDFs obtained optically and calculated using the manufacturer's data for three different cylindrical lenses with  $f = 50$  mm, 100 mm, and 200 mm.

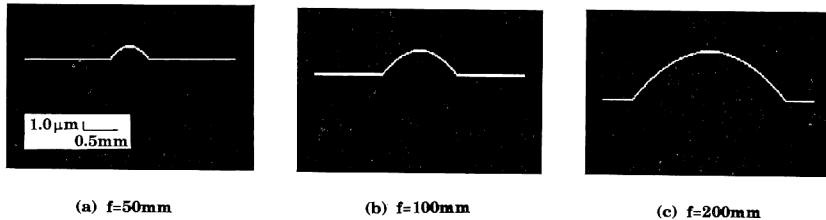
に、LCLV の解像度が約 15 lines/mm と、干渉縞の縞間隔に比べて低いため、干渉縞の高周波成分が消失している。

**Fig. 8** は、**Fig. 7** の LCLV から読み出された干渉縞強度分布を、 $y$  方向に光学的にフーリエ変換したときの結果を示す。正と負の傾きを有する輝線が、それぞれ求めるべきウィグナー分布関数  $W(x, fs)$  と  $J(x, y)$  の複素共役項から生じる  $-1$  次回折像  $W(x, -fs)$  である。**(16)**式から予想されるように、レンズの焦点距離が増加すると、ウィグナー分布関数の傾きは減少する。また、干渉縞強度分布の直流成分は、 $fs=0$  の位置に水平輝線  $\delta(fs)$  として生じる。その直流輝線の周囲には、

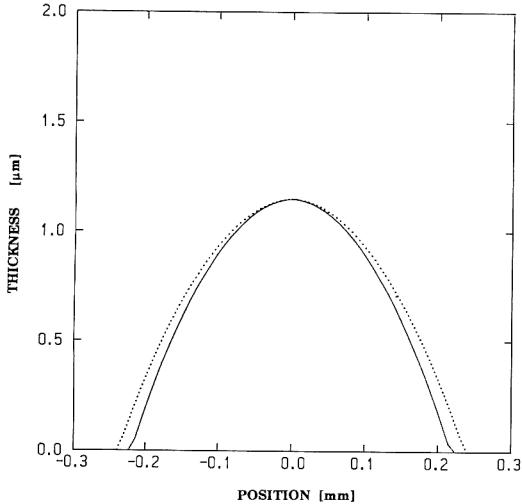
$J(x, y)$  に重畳していた雑音性の干渉縞強度分布に起因する比較的低周波数の雑音が、空間位置全体にわたって生じている。これは、 $J(x, y)$  強度分布のコントラストの低下が原因であるため、**Fig. 7** を参照すると、この傾向は焦点距離が短くなるほど著しくなることが理解できる。また、焦点距離が増加すると、ウィグナー分布関数の中心付近が不鮮明になり、 $f=200$  mm の場合には消失している。これは、**Fig. 7** で示した直角プリズムのエッジ像が主たる原因である。ここで、**Fig. 8** の結果を定量的に検討するため、**Fig. 9** には  $f=50$  mm, 100 mm, 200 mm の焦点距離に対するウィグナー分布関数の傾きの変化を示す。ここで、実線は**(16)**式から計算された理論曲線である。図は、実験結果が測定誤差を含むものの、理論曲線と一致していることを示す。

**Fig. 8** で得たウィグナー分布関数を位置変数に関して積分してレンズ形状を再構成するために、画像を CCD カメラと画像入出力装置を用いてマイクロコンピューターのメモリに入力し、ウィグナー分布関数を表す輝線の位置  $(x, fs)$  を検出した。次に、水平方向の変数に関して数値積分を行い、レンズ形状を再構成した。**Fig. 10** は、**Fig. 8** のウィグナー分布関数を用いて、再構成したレンズ形状を示す。焦点距離が減少すると、1次元フーリエ変換の際に生じる空間周波数が増加するが、光学系の周波数帯域で制限されるため、再構成された範囲が狭くなる。 $f=50$  mm, 100 mm, 200 mm についてそれぞれの再構成された範囲は、 $\pm 0.25$  mm,  $\pm 0.50$  mm,  $\pm 1.00$  mm である。**Fig. 7** と **Fig. 8** に示したように、 $J(x, y)$  強度分布とウィグナー分布関数に雑音性の強度分布や一部情報の欠落があるにもかかわらず、レンズ形状の2乗特性および対称性は良好に再構成されている。

LCLV を用いた位相形状の再構成の結果を定量的に



**Fig. 10** Reconstructed profiles of the lens surfaces obtained by integrating the WDFs shown in Fig. 8 with respect to the horizontal coordinate.



**Fig. 11** Comparison between the profiles reconstructed for  $f=50$  mm (solid line) and calculated using the manufacturer's data (broken line).

評価するために、 $f=50$  mm のシリンドリカルレンズについて、カタログから算出したレンズ形状と、Fig. 10(a) の結果との比較を行う。Fig. 11 の実線と破線は、それぞれ実験結果とカタログから算出したレンズ形状を示す。図において、両レンズ形状の中心における厚さを一致させて表示した。カタログデータを基準にすると、ウィグナー分布関数から再構成したレンズ形状との誤差は、レンズの中心から周辺へ向かうと増加する。これは、 $x$ - $f_s$  平面上で得られる輝線を水平軸の変数に関して数値積分するとき、ウィグナー分布関数の傾きに誤差が存在すると、積分領域が外側へ広がるにしたがって誤差が蓄積されるためである。本実験の結果では、 $f=50$  mm のレンズの場合の最大誤差は、 $x=0.25$  mm の位置において 5 % であった。この値は、コンピューター上で 1 次元のフーリエ変換を行った場合の 0.7% と比べると、測定誤差が増加した。

この再構成誤差の主たる要因は、光学的 1 次元フーリエ変換にあると考えられる。本実験では、球面レンズとシリンドリカルレンズを密着させた 1 次元フーリエ変換

光学系を用いた。この場合、理想的には密着レンズ系も薄肉レンズの仮定が成り立たねばならないが、実際には 2 枚のレンズを完全に密着させることは不可能である。2 枚のレンズ間の距離が増加すると、Fig. 8 で表されるウィグナー分布関数の傾きが増加することを実験で確認した。

## 5. 結 論

本論文では、液晶空間光変調素子 LCLV のインコヒーレント-コヒーレント変換特性を用いて、1 次元位相物体の自己ウィグナー分布関数を全光学的かつ実時間に実現し、位相物体形状を再構成する手法の可能性を示した。LCLV の書き込み強度分布には、変形マイケルソン干渉計から生じる雑音性の干渉縞やエッジ像が重畠し、その S/N 比が低下するが、求めるべき干渉縞のコントラストは良好であった。一方、LCLV からの読み出し強度分布には、LCLV の構造的な誤差から生じる干渉縞が雑音として重畠したが、求めるべき干渉縞のコヒーレント像は十分なコントラストをもって実現できた。結果として、本論文の手法により、レンズ形状を最大誤差 5 % と再構成誤差は増加したもの、実時間の位相形状計測を達成した。この実時間性は、LCLV の応答の高速化およびウィグナー分布関数の後処理系を高速化することで、一層の向上が見込まれる。また、LCLV の液晶にはすでに存在する一対の電極、配向層およびガラス基盤の平行度の向上により、位相形状測定の信頼性が増すものと期待する。さらに、再構成誤差の主たる原因である光学的 1 次元フーリエ変換の精度向上には、何らかの工夫が必要であり、今後の課題として検討すべき点である。

## 文 献

- 1) E. Wigner: "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium," Phys. Rev., **40** (1932) 749-759.
- 2) J.E. Moyal: "Quantum mechanics as a statistical theory," Proc. Cambridge Phil. Soc., **45** (1949) 99-

- 124.
- 3) J. Ville: "Théorie et applications de la notion de signal analytique," *Cables Transm.*, **2** eA (1948) 61-74.
  - 4) W. D. Mark: "Spectral analysis of the convolution and filtering of non-stationary stochastic processes," *J. Sound Vib.*, **11** (1970) 19-63.
  - 5) T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbräuker: "The Wigner distribution—A tool for time-frequency signal analysis Part I : Continuous-time signals," *Philips J. Rev.*, **35** (1980) 217-250.
  - 6) N. G. de Bruijn: "Uncertainty principles in Fourier analysis," *Inequalities*, ed. O. Shisha (Academic Press, New York, 1967) pp. 57-71.
  - 7) H. O. Bartelt, K.-H. Brenner and A. W. Lohmann: "The Wigner distribution function and its optical production," *Opt. Commun.*, **22** (1980) 32-38.
  - 8) K. Hirose, H. Fujisaki and Y. Kosugi: "Use of optical signal processing techniques to spectrum analysis of speech," *ICASSP 86* (IEEE, Tokyo, 1986) pp. 485-488.
  - 9) H. H. Szu: "Two-dimensional optical processing of one-dimensional acoustic data," *Opt. Eng.*, **21** (1982) 804-813.
  - 10) P. Flandrin: "On detection-estimation procedures in the time-frequency plane," *ICASSP 86* (IEEE, Tokyo, 1986) pp. 2331-2334.
  - 11) R. M. S. S. Abeysekera, R. J. Bolton, L. C. Westphal and B. Boashash: "Patterns in Hilbert transforms and Wigner-Ville distributions of electrocardiogram data," *ICASSP 86* (IEEE, Tokyo, 1986) pp. 1793-1796.
  - 12) L. Jacobson and H. Wechsler: "The Wigner distribution function and its usefulness for 2-D image processing," *Proc. the 6th Int. Conf. Pattern Recognition* (IEEE Comp. Soc., 1982) pp. 538-541.
  - 13) H. Bremmer: "General remarks concerning theories dealing with scattering and diffraction in random media," *Radio Sci.*, **8** (1973) 511-534.
  - 14) M. J. Bastiaans: "The Wigner distribution function of partially coherent light," *Opt. Acta*, **28** (1981) 1215-1224.
  - 15) K.-H. Brenner and A. W. Lohmann: "Wigner distribution function display of complex 1D signals," *Opt. Commun.*, **42** (1982) 310-314.
  - 16) G. Eichmann and B. Z. Dong: "Two-dimensional optical filtering of 1-D signals," *Appl. Opt.*, **21** (1982) 3152-3156.
  - 17) R. Bamler and H. Glünder: "The Wigner distribution function of two-dimensional signals coherent-optical generation and display," *Opt. Acta*, **30** (1983) 1789-1803.
  - 18) T. Iwai, A. K. Gupta and T. Asakura: "Simultaneous optical production of the sectional Wigner distribution function for a two-dimensional object," *Opt. Commun.*, **58** (1986) 15-19.
  - 19) A. K. Gupta, T. Iwai and T. Asakura: "Parallel generation of the sectional Wigner distribution function for two-dimensional objects," *J. Opt.*, **16** (1987) 10-19.
  - 20) T. Iwai, N. Kawamura and T. Takemori: "Real-time profiling of a pure phase object using an auto-Wigner distribution function," *Opt. Commun.*, **95** (1993) 199-204.