

研究

計算機合成可変焦点光学素子

豊原裕一郎・谷田貝豊彦

筑波大学物理工学系 〒305 つくば市天王台 1-1-1

(1993年1月13日受付, 1993年3月16日受理)

Computer-Generated Varifocus Optical Elements

Yu-ichiro TOYOHARA and Toyohiko YATAGAI

Institute of Applied Physics, University of Tsukuba,
1-1-1, Tennoudai, Tsukuba 305

(Received January 13, 1993; Accepted March 16, 1993)

It is shown that superposition of two computer generated holograms can give a pattern corresponding a Fresnel zone plate (FZP). By shifting or rotating two CGHs, we can change the focal length of the FZP. Six examples of the varifocus optical elements based on this principle and their experimental results and computer simulation are presented. We also propose a variable astigmatic optical device by combination of two shift directions. Finally we design a kinoform version of the element, which provides high diffraction efficiency.

1. はじめに

Gabor によって発明されたホログラフィは, 光の干渉を用いて, 波動の振幅と位相の両者を記録する方法である¹⁾. ホログラムは画像表示デバイスとしてだけでなく, 光学素子として利用することができる. ホログラフィック光学素子は単なるレンズとして利用されているばかりでなく, 多焦点レンズ, 非球面光学素子など, さまざまな分野応用が考えられている.

ホログラムの一つに計算機ホログラム^{2,3)}がある. 計算機によって波面の振幅と位相を求め, 任意の波面を作り出すことができる. したがって, 架空の3次元物体の表示などに適している. 最近では, 計測, 画像処理, 光コンピューティング, インターコネクション等の光学素子としても重要な役割を果たしており, 各所で研究が行われている.

本論文では, 計算機ホログラムを用いた新たな可変焦点素子⁴⁻⁶⁾を検討した. 一般的な可変焦点素子では, レンズを光軸方向に移動させることによって焦点距離を変える. しかし, ここで検討した素子では, 計算機ホログラムを光軸に対して垂直方向へ移動することによって焦点位置を変化させる. このことにより, 光学系の小型化

が可能となる. また, 独立する二つの移動方向にシフトすることにより, x と y 方向に対する焦点距離を独立に変化させることができた. ここでは, まず振幅ホログラムによる光学系, 続いてキノフォーム⁷⁻⁹⁾を用いた光学系について述べる.

2. バイナリ振幅計算機ホログラムを用いた可変焦点素子

計算機とプロッタ等を用いて, 一对のゾーンプレートマスクを作製し, それらを重ね合わせ, 相対的にずらすことによりモアレ縞を生じさせることができる. ここでは, そのモアレ模様が, フレネルゾーンプレート (FZP; Fresnel zone plate) の形になるように計算機ホログラムを設計する. そのようにして生じる FZP において, 二つのマスクの相対的なずらしの量によって形状が変わればその焦点距離も変化する. このようにして, 計算機ホログラムを用いて, 焦点距離の可変なシステムが実現できる.

2枚の計算機ホログラムをシフトする方向としては, ここでは, x および y 方向への横方向シフトと, 回転について検討した.

2.1 シリンドリカル可変焦点素子

まず、一対の計算機ホログラムのマスクを横方向へシフトすることによってモアレ縞を生じさせる。このモアレ縞の形をシリンドリカル FZP の形になるように計算機ホログラムの位相関数を与えれば、シリンドリカル可変焦点レンズが実現できる。ここでは干渉縞型バイナリ計算機ホログラム¹⁰⁾を利用することとし、その位相分布の設計法を検討する。

一般に、バイナリ計算機ホログラムマスクの振幅透過率分布は、

$$M(x, y) = 1 : |\phi(x, y) - N| \leq q/2$$

$$N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$0 : \text{その他} \quad (1)$$

と表示される。ここで関数 $\phi(x, y)$ は、ホログラムの位相分布であり、 q は、 $0 < q < 1$ で、干渉縞の幅を決める定数である。(1)をフーリエ級数で表すと、

$$M(x, y) = \sum A_n \exp[2\pi i n \phi(x, y)] \quad (2)$$

となる。ただし、

$$A_n = \sin(n\pi q)/n\pi, \quad (3)$$

である。ここで、位相分布を、

$$\phi(x, y) = (x/a)^3 + y/b \quad (4)$$

のように選ぶとする。このように選ぶと、マスクのシフトにより、可変焦点の光学系ができる。この理由は後で述べる。定数 q は普通 $1/2$ である。

これらを2枚重ねてそれぞれ $\Delta x/2$ ずつ $\pm x$ 方向に相対的にシフトした時の合成透過率分布は、

$$P(x, y) = M(x - \Delta x/2, y)M(x + \Delta x/2, y)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n A_m \exp[2\pi i \Phi_{nm}(x, y)] \quad (5)$$

ただし

$$\Phi_{nm}(x, y) = (n+m)x^3/a^3 + (n+m)y/b$$

$$- 3(n-m)(\Delta x/2)x^2/a^3$$

$$+ 3(n+m)(\Delta x/2)^2 x/a^3$$

$$- (n-m)(\Delta x/2a)^3 \quad (6)$$

である。Fig. 1 にホログラムの一例を示す。ここで、(6)の第4項に x^2 の項が含まれており、その係数は、シフト量 Δx に比例していることに注意しよう。この項の存在により、シフト量を変化させることにより焦点距離を変化させることが可能となる。

ここで、理想的なシリンドリカル可変焦点レンズの位相関数は

$$\phi = \phi_0 - \pi x^2/\lambda f \quad (7)$$

で与えられるので、式(6)の第3項 $-3(n-m)x(\Delta x/2)^2/a^3$

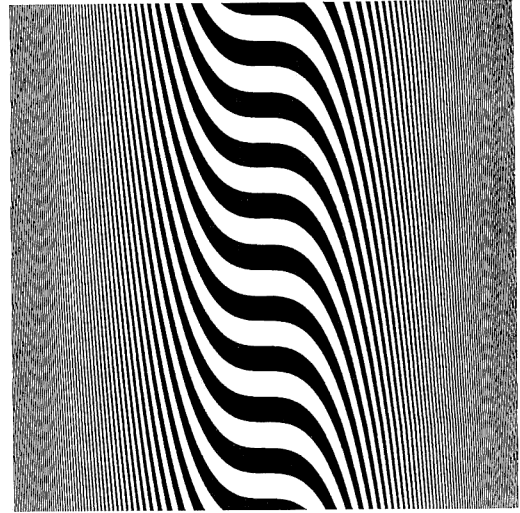


Fig. 1 Binary hologram mask for generating 1-D Fresnel zone plate, whose focal length is changed by lateral shift of masks.

と(7)の第2項 $\pi x^2/\lambda f$ を比較することによりその焦点距離は、 $n-m=2$ の場合には、

$$f = a^3/3\lambda \Delta x \quad (8)$$

となる。つまり、シフト量 Δx に反比例する焦点距離を持つシリンドリカル可変焦点距離システムができることになる。

2.2 球面可変焦点素子

次に、2枚の計算機ホログラムマスクを重ね合わせ、原点を中心に回転させることによって焦点距離を変えるシステムを考える。横方向へのシフトによるものと比較すると、円の中心の1軸で動かせばよいので、駆動系が簡単になる。また、マスクの大きさは有限であるので、2.1の横方向シフトの場合にはマスクが重ならない部分が生じるが、回転の場合には、マスクの全面で重なりモアレ縞が生じるので、マスク面を有効に使うことができ、システムの大きさをより小さくすることが可能となる。

ここでは、回転させることによって、球面 FZP 状のモアレ縞を生じるマスクを作成する。

計算機ホログラムマスクの位相関数を

$$\phi(r, \phi) = r^2/a^2 \quad (9)$$

とする。ただし、

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (10)$$

それぞれのマスクの透過率は、

$$M(r, \phi) = 1 : |\phi(r, \phi) - N| \leq q/2;$$

$$N = 0, 1, 2, \dots;$$

$$0 : 0 \leq \phi < 2\pi \quad (11)$$



Fig. 2 Binary hologram mask for generating 2-D Fresnel zone plate, whose focal length is changed by rotation of masks.

となる。したがってそれらを重ねて、それぞれ相対的に、 $\Delta\phi/2$ ずつ逆方向に回転させると、その合成透過率は

$$P(r) = M(r, \phi - \Delta\phi/2)M(r, \phi + \Delta\phi/2) \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n A_m \exp[2\pi i \Phi_{nm}(r)] \quad (12)$$

ただし、

$$\Phi_{nm}(x, y) = (n+m)r^2\phi/a^2 - (n-m)r^2\Delta\phi/2a^2 \quad (13)$$

となる。Fig. 2 にホログラムの一例を示す。ここで、理想的な球面可変焦点レンズの位相関数は

$$\phi = \phi_0 - \pi r^2 / \lambda f \quad (14)$$

で与えられるので、式(13)の第2項 $(n-m)r^2\Delta\phi/2a^2$ と(14)の第2項 $\pi r^2 / \lambda f$ を比較することによりその焦点距離は、 $n-m=2$ の場合には、

$$f = a^2 / 3\Delta\phi\lambda \quad (15)$$

となる。つまり、ずらし量 $\Delta\phi$ に反比例する焦点距離を持つ球面可変焦点距離システムができることになる。

2.3 多機能可変焦点素子

これまで述べてきたシステムの応用として、 x 方向にシフトすると x 方向に曲率を持ち、 y 方向にシフトすると y 方向に曲率を持つような可変非点収差素子がえられる。これを、また 45 度方向にシフトすると球面レンズシステムにもなる。1組の計算機ホログラムマスクで、2方向の焦点距離が可変なレンズを作ることができるので、このような考え方を発展させていくと、より多機能な光学素子を作成することが可能である。

まず、計算機ホログラムの位相関数を

$$\phi(x, y) = (x/a)^3 + (y/b)^3 \quad (16)$$

とする。この時、二枚のホログラムを重ねて x と y 方向にそれぞれ互いに Δx , Δy だけシフトすると、その合成透過率分布は

$$P(x, y) = M(x - \Delta x/2, y - \Delta y/2)M(x + \Delta x/2, y + \Delta y/2) \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n A_m \exp[2\pi i \Phi_{nm}(x, y)] \quad (17)$$

ただし

$$\Phi_{nm}(x, y) = (n+m)x^3/a^3 + (n+m)y^3/b^3 \\ - 3(n-m)(\Delta x/2)x^2/a^3 \\ - 3(n-m)(\Delta y/2)y^2/b^3 \\ + 3(n+m)(\Delta x/2)^2 x/a^3 \\ + 3(n+m)(\Delta y/2)^2 y/b^3 \\ - (n-m)(\Delta x/2a)^3 \\ - (n-m)(\Delta y/2b)^3 \quad (18)$$

ここで、 $a=b$ で $\Delta x = \Delta y$ のとき、第3項と第4項は

$$3(n-m)(\Delta x/2)(x^2 + y^2)/a^3$$

となり、 $n-m=2$ の場合には、この項の寄与によって焦点可変の特性が得られる。この時、(14)との比較により焦点距離は、

$$f = a^3 / 3\lambda \Delta x \quad (19)$$

となり可変焦点距離球面レンズの働きをする。

一般に、(18)より x と y 方向の焦点距離は、

$$f_x = a^3 / 3\lambda \Delta x \quad (20)$$

$$f_y = b^3 / 3\lambda \Delta y \quad (21)$$

となる。つまりこれにより、特性可変の非点収差素子ができることがわかる。

3. キノフォームを用いた可変焦点素子

3.1 キノフォームの量子化数と回折効率

キノフォームを実際に作成する場合、位相関数をそのままの形でブレース化するのは困難なので、何段階かのステップ関数で近似を行う¹¹⁻¹³⁾。それを量子化と呼ぶ。当然、量子化することによって生じる誤差によって、主焦点以外のところに副焦点が生じる。その焦点距離は

$$f_N = f / \{N(n-1) + 1\} \quad (22)$$

となる。ここで、 N は量子化数、 n は焦点の次数である。したがって、主焦点への回折効率は量子化数によって変化する。ここで p をステップ数、 n 次の焦点での回折効率は、

$$L = \begin{cases} [\text{sinc}(1/p)/n]^2 & \text{for } n-1 = gp \\ 0 & \text{for } n-1 \neq gp \end{cases} \quad (23)$$

で与えられる。ここで g は任意の整数で $p > 2$ である。

Table 1 Quantization level of kinoform and diffraction efficiency.

Quantization level P	Diffraction efficiency $L(\%)$
2	40.5
3	68.5
4	81.0
8	95.0
16	99.0

また, $\text{sinc}(1/p) = \sin(\pi/p)/(\pi/p)$ である. p の変化に対する L の値を **Table 1** にまとめて示す.

3.2 キノフォームによるシステム

一般に, 振幅バイナリーホログラムは, 回折効率が悪いという欠点がある. そこで本節では, マスクをキノフォームによって作成することにより回折効率のよいシステムを考えていく.

キノフォームと振幅バイナリーホログラムとを比較すると, マスクに入射してくる光をすべて回折に利用することができるので, 光の利用効率を高くすることができる. また, キノフォームはその大きな特徴として, 1次回折光のみを再生するという点が挙げられる. つまり高次の回折光が生じないので, その分だけ回折効率は良くなる.

3.2.1 原理

例として, 2節で考えた回転型のシステムを取り上げる. まず, マスク 1, マスク 2 をそれぞれ,

$$M_1(r, \phi) = \exp[2\pi i \phi(r, \phi)], \quad (24)$$

$$M_2(r, \phi) = \exp[-2\pi i \phi(r, \phi)], \quad (25)$$

のように考える. ここで, マスク 1 とマスク 2 の位相は (9) で与える. これを (25) のように反転させているのは, 重ねて置いたときに必要なモアレ縞の空間周波数を下げ, その項を取り出すためである. これらのマスクを 2 枚重ね合わせたときの合成位相分布は,

$$\begin{aligned} M_1(r, \phi - \Delta\phi/2)M_2(r, \phi + \Delta\phi/2) \\ = \exp[-2\pi i r^2 \Delta\phi/a^2], \end{aligned} \quad (26)$$

となり, 式 (14) と比較することにより, 焦点距離は,

$$f = a^2/\lambda 2\Delta\phi, \quad (27)$$

となる.

このシステムでは, モアレ効果を利用しているので, 合成位相分布の縞の周波数は, もとのマスクの縞の周波数に比べ低いものになっている. したがって, 所望の合成位相分布を得るためには, もとのマスクの縞の周波数はそれよりも高くしなければならない.

可変焦点キノフォームレンズは, 屈折型可変焦点レンズと比較すると, 効率の面では同程度であるが, 色収差

があるという点で劣っている. しかし, 厚さが光の波長程度ですむので, 設計時における自由度が大きく, 小型化できるという利点がある.

3.2.2 計算機シミュレーション

まず, 2枚のキノフォームマスク M_1, M_2 の位相分布をそれぞれ計算し, それらを計算機中で重ね合わせ, その合成位相分布を求めるという方法で, 二つの場合について計算機シミュレーションを行った. ここではマスク M_1 と M_2 の位相関数は, 第一の場合については,

$$\phi_{11} = r^2\psi/a^3, \quad \phi_{12} = -r^2\psi/a^3 \quad (28)$$

第二の場合については,

$$\phi_{21} = (x^3 + y^3)/a^3, \quad \phi_{22} = -(x^3 + y^3)/a^3 \quad (29)$$

として, シミュレーションを行った.

(28)の位相分布のマスクに関しては, 量子数 2, 4, 8 の 3通りについてシミュレーションを行った. まず, マスク ϕ_{11} を **Fig. 3** に示す. このマスクを用いて, 回転角を, $\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ としたときの合成位相分布をそれぞれ求めた (**Fig. 4**). 計算点は 512×512 である.

(29)の位相分布のマスクに関しては, 量子数を 8 にして計算を行った.

次に, マスク ϕ_{21} を, **Fig. 5** に示す. x 方向, y 方向, $y=x$ 方向へそれぞれシフトしたときの合成位相分布を **Fig. 6** に示す. 合成位相分布は, それぞれ球面フレネルレンズ, シリンドリカルレンズの位相分布の形状になっていることが確認できる.

3.3 量子化誤差

キノフォームを作製する段階では, 必ず量子化が行われる. 量子化とは, 理想的な曲面をステップ状に近似す

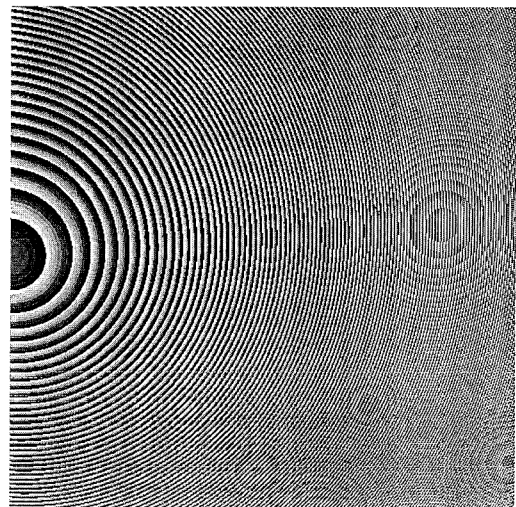


Fig. 3 Kinoform mask with 8 phase quantization levels.

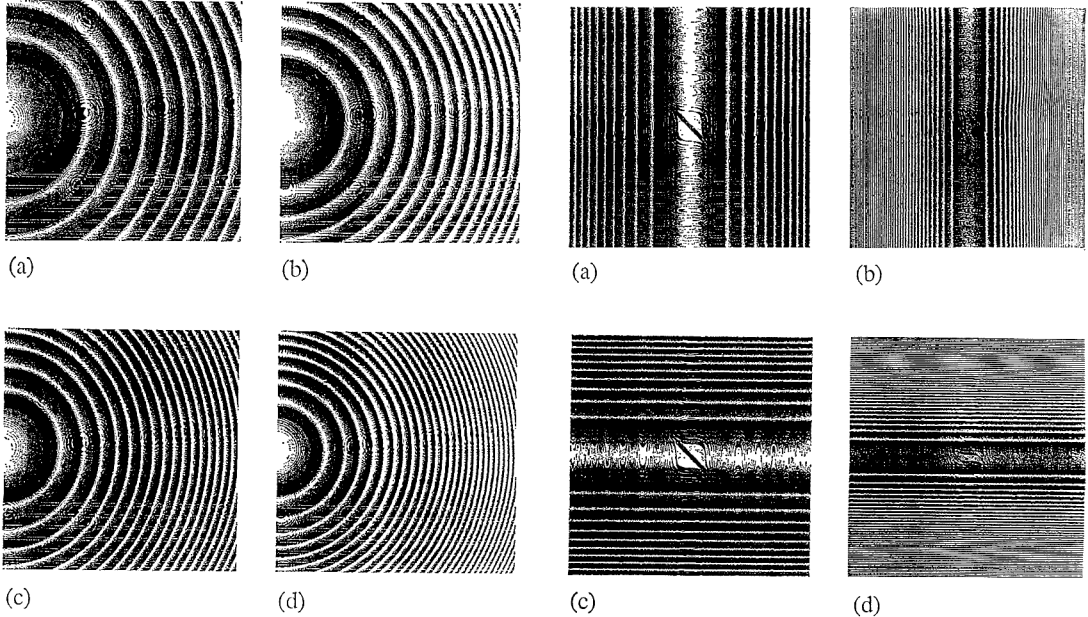


Fig. 4 Phase maps of superposition of kinoform masks of Fig. 3 and its conjugation. (a): $\phi = \pi/6$, (b): $\phi = \pi/4$, (c): $\phi = \pi/3$, (d): $\phi = \pi/4$.

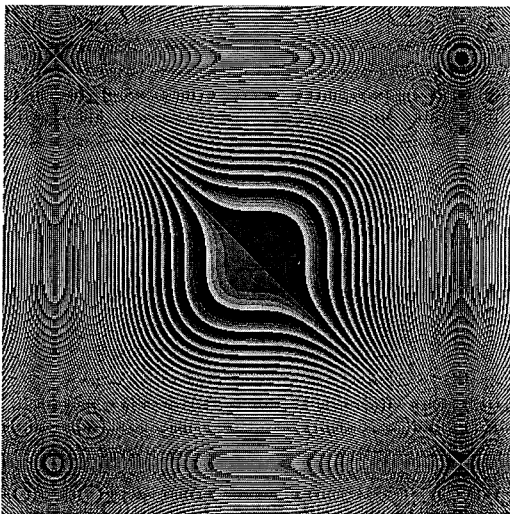


Fig. 5 Kinoform mask with 8 phase quantization levels.

ることであるが、その量子化によって理想的な再生波面から誤差が生じる。ここではその量子数と誤差の関係について検討する。

一般に光学系の性能を示す情報値として、例えば解像力、光学的伝達関数 (OTF), Strehl の比強度¹³⁾ (SD: Strehl definition) あるいは Hartmann 定数など、いろいろな定量的表示法がある。これらの単一数値は光学系

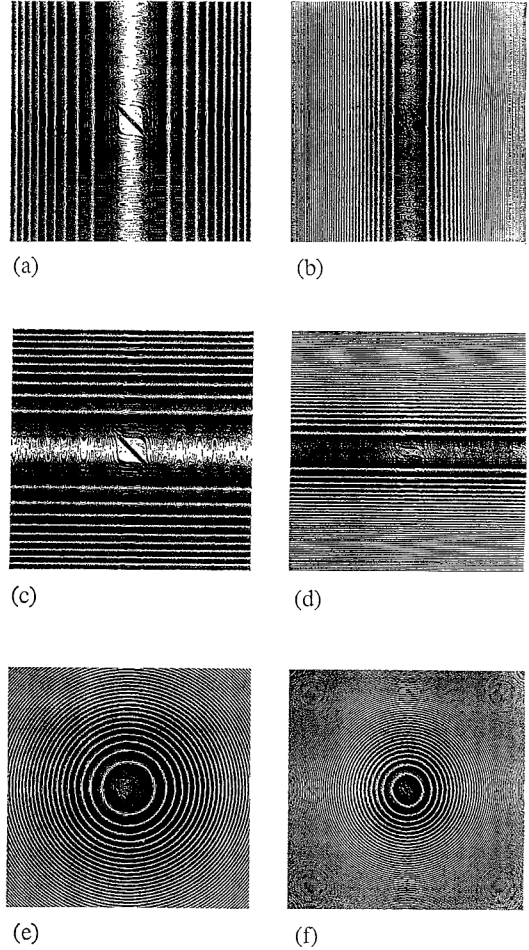


Fig. 6 Phase maps of superposition of kinoform masks of Fig. 5 and its conjugation. (a): x -direction shift of 2.5%, (b): x -direction shift of 10%, (c): y -direction shift of 2.5%, (d): y -direction shift of 10%, (e): combination of x - and y -direction shift of 5%, (f): combination of x - and y -direction shift of 10%.

の特性を示すには、十分なものではないのであるが、簡単に結像特性を比較することが可能であるのでよく用いられている。

ここでは、SD を用いて、量子化による誤差を比較検討した。SD とは、点光源の像の中心強度を I 、同じ開口をもつ無収差の理想的なレンズの場合の中心強度を I_0 とするとき、SD は

$$SD = I/I_0 \quad (30)$$

で定義される。SD が 1 に近いほど誤差が少なくなっているといえる。

実際には、計算機シミュレーションによって求めた合成位相分布からレンズ成分を取り除き、収差成分だけを

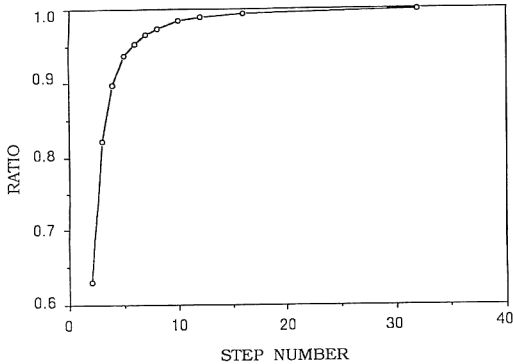


Fig. 7 Comparison of SD values of Fresnel lens and varifocal lens.

取り出し、それをFFT (fast-Fourier-transform) によってフーリエ変換することにより中心強度を求める。そして、理想的なレンズ (つまりここでは平面波のこと) の中心強度を1にするように正規化を行う。この方法で求めた中心強度は、実際の合成位相分布の中心強度とは異なる。しかし、ここでは、モアレを用いたシステムと、実際のフレネルレンズとの比を求めることを目的としているので、この方法を用いている。フーリエ変換のサンプリングポイント数は、 128×128 で計算を行った。

ここでは、キノフォームの位相関数が、

$$\phi = r^2 \psi / a^3, \quad (31)$$

の場合について、回転角を $\pi/4$ で一定にして、量子数の変化による SD の値の変化を計算した。次に、理想的なフレネルレンズを量子化した場合の SD を求める。そして、その両者の SD を比較することによってキノフォームレンズとの誤差を知ることができる。その両者の比を取ったものを **Fig. 7** に示す。

Fig. 7 の結果と、3.1 で求めた回折効率より考えると、量子数を8以上でキノフォームを作成した場合、その理想的な回折効率は90%を越える¹⁴⁾。システムに対する誤差の許容範囲によるが、一般的にSD値が0.8以上であれば良いとされている¹³⁾ことより、量子数8以上のキノフォームでこのシステムを実現した場合に、他の誤差が含まれないとすれば、十分実用可能であると判断できる。

4. 実 験

Fig. 1 と **Fig. 2** で示した計算機プログラム原図を写真にとり、1cm 角に縮小して、プログラムとする。それを用いて、実験を行った。**Fig. 2** の計算機プログラムに対する焦点面での強度分布は **Fig. 8** のようになっ

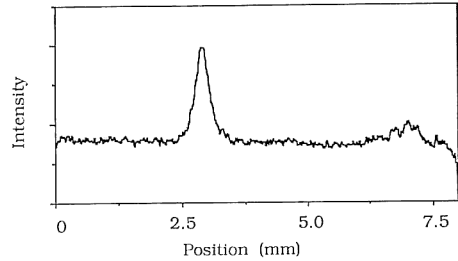


Fig. 8 Intensity profile in the focal plane for a spherical varifocal optical device.

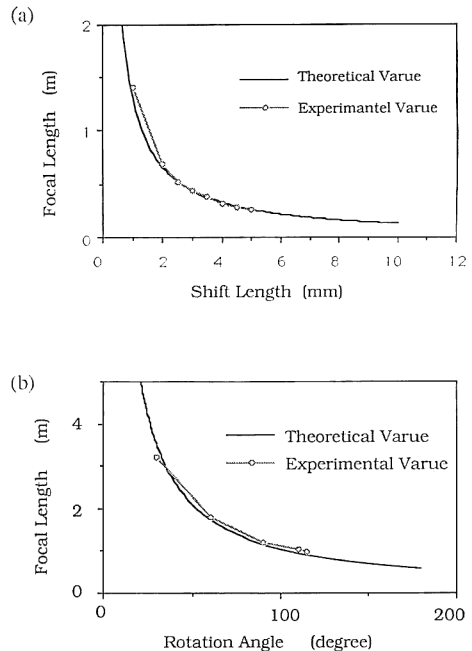


Fig. 9 Change of focal length. (a): Cylindrical varifocal optical device, (b): spherical varifocal optical device.

た。**Fig. 1** と **Fig. 2** の計算機プログラムに対して、シフト量を変化させたときの焦点距離を測定した結果を **Fig. 9** に示す。光源には、He-Ne レーザー (波長 632.8 nm) を用いた。

Fig. 9 で示すように、実験において、ほぼ理論値に近い焦点距離を得ることができた。しかし、理論式のところで行った積分操作は、実験では行うことができなかった。したがって、余分な縞の影響が多く、回折効率は非常に悪くなっている。このような状況は好ましくなく、積分することのないシステムを実現する必要がある。この欠点を補うため、3節で述べたキノフォームを用いたシステムが考えられる。キノフォームの場合は1次光しか再生せず、また、2枚のキノフォームの位相を反転さ

せることにより、空間周波数の低いモアレの項だけを作り出すことができた。

5. アライメント誤差

今まで述べてきた可変焦点距離システムを考えると、計算機上では、キノフォームを重ね合わせてシフトさせるときに正確に位置を合わせることができる。しかし、実際にその作業を行うときは、全く正確にシフト量や位置を制御するのは非常に困難なことである。そこで、系がどの程度のアライメント誤差まで許容できるかということが問題になってくる。

例えば、さきに述べた回転によってモアレ縞を作るシステムの場合では、理想的には2枚のキノフォームの回転軸がきちんと一致していなければならない。しかし、実際にシステムを作製するとき、この回転軸を完全に一致させておくことは困難なので、その軸ずれの許容範囲を知っておく必要がある。

ここでは、回転によるシステムについて、軸ずれ量による中心強度を計算機シミュレーションを行って検討した。キノフォームの位相関数を(31)と与え、量子数は8と設定し、そのときに45度回転させたときの回転軸の軸ずれによる影響を調べた。計算点数は、 128×128 で行った。Fig. 10 にその結果を示す。横軸には x 方向への軸ずれ量をキノフォーム面の x 方向の長さに対する割合にしてとり、縦軸にはそのときの理想的なレンズに対する SD の値をとった。

Fig. 10 より、軸ずれ量が0.2%を越えるとSD値が0.8を割ってしまう。しかし、このSDの定義はある焦点に対して、点像の中心点の値だけをとって求めたものであり、軸ずれにともなって移動する点像ピーク位置を中心としてSDを求めると、軸ずれ量1%まではSD値が0.8以上を保っている。系がどの程度の許容範囲を持っているかによるが、光軸上強度だけを考えた場合は、ず

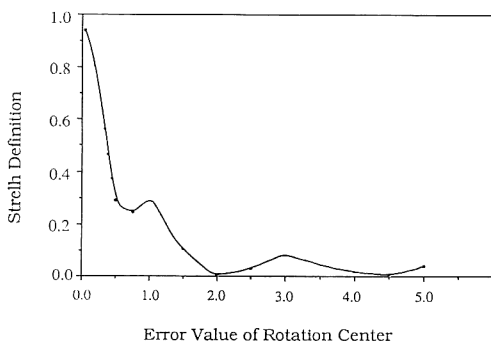


Fig. 10 Alignment error of the rotation center.

れ量は一般的には0.2%以内が許容量であるといえる。

ここではキノフォームの計算点数を 512×512 点とした。この素子を5mm角で作成する場合、1点のピッチは約 $10 \mu\text{m}$ となる。本計算機シミュレーションでは、Fig. 6の合成位相分布よりわかるように、分解能不足による別の模様が生じている。これは、計算点数を増やし、ピッチをより細かくしていくことにより解消できる。したがって、実際にキノフォームを作成する段階では、ピッチを小さくしたほうが良い結果が得られるものと思われる。

また、回転によるシステムの場合、回転した角度だけ位相が反転してしまうという欠点が生じる。しかし、これはFig. 3のようにその周縁部分のみを使用することによって影響を受けずにすむことができる。

本計算機シミュレーションの結果より、量子数8以上のキノフォームを作成すれば、システムはほぼ期待どおりの可変焦点素子の働きをすることが確認された。

6. 結 論

本研究では、1対の計算機プログラム(キノフォームを含む)を重ね合わせて相対的にシフトすることによって生じるモアレ縞を利用した可変焦点システムについて検討を行った。

まず、振幅バイナリ計算機プログラムを用いた可変焦点素子について原理を述べ、実験した結果を示した。この中で、計算機プログラムの位相関数の異なる場合や、異なるシフト方法についての検討を行った。実験結果は、ほぼ理論値に近い焦点距離が得られ、シフト量に伴う焦点距離の変化が確認できた。しかし、この振幅バイナリ計算機プログラムの場合、回折効率が悪いという欠点があった。

次に、キノフォーム(位相計算機プログラム)を用いた可変焦点素子について原理を述べ、それについて行った計算機シミュレーションの結果を述べた。シンドリカルあるいは、球面のレンズ効果が得られるように考えられた2種類の位相関数の場合について、それぞれ計算機シミュレーションを行ったが、すべての場合においてほぼ所望の形状の合成位相分布が得られた。また、その計算機シミュレーションによって得られた合成位相分布に含まれる誤差(量子化誤差、アライメント誤差)についての検討を行った。計算機シミュレーションの結果では、量子数8以上のキノフォームを用いたシステムでよい結果が得られた。アライメント誤差に関しては、純粋に中心強度だけに着目した場合、0.2%以内が許容範囲

となった。

本研究で行った可変焦点システムは、レンズを用いたシステムよりも小型化でき、また独立した2方向のシフトを利用することによって機能の集積化もすることができた。ここで用いたシステムが、今後、光によるさまざまな応用技術の発展において必要不可欠な光デバイスの小型化、集積化に貢献できるものであることを期待している。

文 献

- 1) D. Gabor: "New microscopic principle," *Nature*, **161** (1948) 777.
- 2) B. R. Brown and A. W. Lohmann: "Complex spatial filtering with binary masks," *Appl. Opt.*, **5** (1966) 967.
- 3) A. W. Lohmann and D. P. Paris: "Binary Fraunhofer holograms, generated by computers," *Appl. Opt.*, **6** (1967) 1739.
- 4) A. W. Lohmann and D. P. Paris: "Variable Fresnel zone pattern," *Appl. Opt.*, **6** (1967) 1567.
- 5) A. W. Lohmann: "A new class of varifocal lenses," *Appl. Opt.*, **9** (1970) 1669.
- 6) Z. Jaroszewicz: "A review of Fresnel zone plate moire patterns obtained by translation," *Opt. Eng.*, **31** (1992) 458.
- 7) L. B. Lesem, P. Hirsch and J. A. Jordan, Jr.: "The kinoform: A new wavefront reconstruction device," *IBM J. Res. Dev.*, **13** (1969) 150.
- 8) J. A. Jordan, Jr., P. M. Hirsh, L. B. Lesem and D. L. Van Rooy: "Kinoform lenses," *Appl. Opt.*, **9** (1970) 1883.
- 9) D. A. Buralli, G. M. Morris and J. R. Rogers: "Optical performance of holographic kinoforms," *Appl. Opt.*, **28** (1989) 976.
- 10) W. H. Lee: "Synthetic binary holograms," *Appl. Opt.*, **13** (1974) 1677.
- 11) W. E. Humphrey: "A remote subjective refractor employing continuously variable sphere-cylinder corrections," *Opt. Eng.*, **15** (1976) 286.
- 12) L. d'Auria, J. P. Huignard, A. M. Roy and E. Spitz: "Photographic fabrication of thin film lenses," *Opt. Commun.*, **5** (1972) 232.
- 13) D. W. Ricks and J. M. Boteler: "Abberation reduction using binary optics," *Proc. SPIE*, **1211** (1990) 79.
- 14) H. Dammann: "Blazed synthetic phase only holograms," *Optik*, **31** (1970) 95.